

ASUPRA UNOR EVALUĂRI ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE, CU APLICAȚII LA STUDIUL PROBLEMEI POLILOCALE (II)

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Se consideră ecuația diferențială (2), în care $L_1, \dots, L_n$ reprezintă operatori diferențiali dați, de forma (1), având respectiv ordinele $k_1, \dots, k_n$, iar F — o funcție reală de $n + 1$ variabile reale, definită în domeniul D . Se consideră de asemenea condițiile polilocale (3), în care nodurile $x_1, \dots, x_m$, precum și valorile reale $y_i^{(s)}$ ($s = 0, \dots, p_i - 1$; $i = 1, \dots, m$) sînt date, numerele naturale $m, p_1, p_2, \dots, p_m$ verificînd egalitatea $p_1 + \dots + p_m = k_1 + \dots + k_n$. În această lucrare, utilizîndu-se unele rezultate anterioare [1], se dau condiții care asigură existența și unicitatea soluției $y(x)$ a problemei (2)–(3)

1. Fie dați n operatori diferențiali liniari și omogeni

$$(1) \quad L_i[y] = a_{i,0}(x) \frac{d^{k_i} y}{dx^{k_i}} + a_{i,1}(x) \frac{d^{k_i-1} y}{dx^{k_i-1}} + \dots + a_{i,k_i}(x) y$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

operatorul L_i avînd ordinul k_i , iar coeficienții săi $a_{i,j}(x)$ ($j = 0, \dots, k_i$) fiind funcții reale de o variabilă reală x , funcții despre care presupunem că admit derivate continue de ordinul $\tau_{i+1} = k_{i+1} + \dots + k_n$ ($\tau_{n+1} = 0$) într-un interval $[a, b]$. Fie $F(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ o funcție reală, de $n + 1$ variabile reale, definită în domeniul

$$D: a \leq x \leq b, -\infty < u_j < +\infty, (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Considerăm ecuația diferențială

$$(2) \quad L_n L_{n-1} \dots L_1 [y] = F(x, y, L_1[y], L_2 L_1[y], \dots, L_{n-1} L_{n-2} \dots L_1 [y]).$$

Aici notația $L_q L_p$ reprezintă produsul operatorilor L_p și L_q , adică $L_q L_p [y] = L_q \{L_p [y]\}$. Ecuația diferențială (2) are ordinul $\sigma_n = k_1 +$

LEMA 1. În ipotezele 1° și 2° de mai sus, fie f o funcție din clasa $C^{(\tau_n)}[a, b]$, funcție care se anulează de cel puțin σ_n ori pe intervalul $[a, b]$ pentru valori $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{\tau_n}$, unde $x_1 = a$ și $x_{\sigma_n} = b$. Atunci are loc următoarea delimitare, valabilă pentru orice $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| \leq M(\Pi_1; a, b) \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[f(x)]|, (\Pi_1 = L_n L_{n-1} \dots L_1).$$

De asemenea, oricare ar fi $i = 2, 3, \dots, n$ și oricare ar fi $x \in [a, b]$ are loc delimitarea

$$(9) |L_{i-1} L_{i-2} \dots L_2 L_1 [f(x)]| \leq M^*(\Pi_i; a, b) \max_{x \in [a, b]} |L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 [f(x)]|.$$

Aici $[a, b]$ reprezintă cel mai mic interval care conține rădăcinile în cauză ale funcției $f(x)$.

Inegalitatea (8) rezultă din afirmația teoremei 2 din lucrarea [1]. Inegalitatea (9) rezultă din afirmația teoremei 6 din aceeași lucrare, considerând acolo $A_\sigma = L_{i-1} L_{i-2} \dots L_1$, $B_\tau = L_n L_{n-1} \dots L_i$ și observând că soluția $H_f(x; L_n L_{n-1} \dots L_1; x_1 \dots x_{\sigma_n})$ a ecuației diferențiale omogene $L_n L_{n-1} \dots L_1[y] = 0$, soluție care verifică condițiile $H_f(x_i) = f(x_i)$ ($i = 1, \dots, \sigma_n$) este identic nulă, întrucât prin ipoteză $f(x_i) = 0$ ($i = 1, \dots, \sigma_n$) și întrucât operatorul diferențial $\Pi_1 = L_n L_{n-1} \dots L_1$ are proprietatea $I_{\sigma_n}^*[a, b]$ (după cum s-a menționat anterior).

3. În continuare vom stabili următoarea teoremă de existență și de unicitate referitoare la soluția problemei (2)–(3).

TEOREMA 1. Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele 1° și 2° de la § 2, referitoare la operatorii diferențiali L_i ($i = 1, \dots, n$). Presupunem, de asemenea, că funcția F care figurează în membrul al doilea al ecuației (2) este continuă în raport cu $x \in [a, b]$ și verifică pe domeniul $-\infty < u_i < +\infty$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) inegalitatea

$$(10) |F(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) - F(x, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} P_i |u_i - \bar{u}_i|, x \in [a, b],$$

unde P_i sînt constante (nenegative).

În aceste ipoteze o condiție suficientă pentru existența și unicitatea soluției ecuației (2), care să verifice condițiile (3) (unde prin ipoteză $x_1 = a$ și $x_m = b$), este ca să aibă loc inegalitatea

$$(11) P_0 M(\Pi_1; a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^*(\Pi_{i+1}; a, b) < 1.$$

Metoda de demonstrație pe care o vom folosi în vederea demonstrării acestei teoreme este asemănătoare unei metode utilizate de G. A. Besmertnih și A. Iu Levin în lucrarea [4] și ea se bazează pe utilizarea unor teoreme de punct fix.

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor funcțiilor din clasa $C^{(\sigma_n)}[a, b]$, verificînd condițiile (3). Se definește pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{M}$ operatorul B precum urmează: $B\varphi$ reprezintă soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale

$$L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 [y] = F(x, \varphi, L_1[\varphi], \dots, L_{n-1} \dots L_1[\varphi])$$

soluție care verifică condițiile (3). Existența și unicitatea unei astfel de soluții este garantată de faptul că operatorul produs $\Pi_1 = L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1$ are proprietatea $I_{\sigma_n}^*[a, b]$, proprietate care rezultă din ipoteza că operatorii $L_1, L_2, \dots, L_n$, care intervin ca factori în expresia lui Π_1 , au respectiv proprietățile $I_{k_1}^*[a, b], I_{k_2}^*[a, b], \dots, I_{k_n}^*[a, b]$ (a se vedea teorema 4 din lucrarea [3]).

Evident că operatorul B transformă mulțimea $\mathcal{M}$ în ea însăși. Introducem în $\mathcal{M}$ următoarea metrică ρ :

Dacă $y \in \mathcal{M}$ și $z \in \mathcal{M}$, atunci

$$\begin{aligned} \rho(y, z) &= \max_{x \in [a, b]} |L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 [y] - L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 [z]| = \\ &= \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[y - z]|. \end{aligned}$$

Prin introducerea acestei metrici, mulțimea $\mathcal{M}$ devine un spațiu metric complet, ceea ce se constată cu ușurință din formula

$$y(x) - z(x) = \int_a^b G(x, s) \cdot \Pi_1[y(s) - z(s)] ds,$$

unde $G(x, s)$ reprezintă funcția lui Green asociată operatorului π_1 precum și unor condiții polilocale, analoage condițiilor (3), cu singura deosebire că toate valorile care figurează în membrii dreپتي ai acestor condiții se consideră nule. Existența unei astfel de funcții a lui Green rezultă din proprietatea $I_{\sigma_n}^*[a, b]$ a operatorului Π_1 .

Operatorul B apare în spațiul $\mathcal{M}$ un operator de contracție. Într-adevăr, în baza definiției acestui operator, se poate scrie

$$\begin{aligned} \rho(By, Bz) &= \max_{x \in [a, b]} |F(x, y, L_1[y], \dots, L_{n-1} \dots L_2 L_1 [y]) - \\ &- F(x, z, L_1[z], \dots, L_{n-1} \dots L_2 L_1 [z])|. \end{aligned}$$

Aplicînd în membrul al doilea inegalitatea (9) a lui Lipschitz, se obține

$$(12) \quad \rho(By, Bz) \leq \max_{x \in [a, b]} \left(P_0 |y(x) - z(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \dots \dots L_1 [y(x) - z(x)]| \right).$$

Dar întrucît funcțiile y și z verifică condițiile (3), rezultă că diferența lor $\delta = y - z$ verifică condițiile

$$(13) \quad \begin{cases} \delta(x_1) = \delta'(x_1) = \dots = \delta^{(p_1-1)}(x_1) = 0 \\ \delta(x_2) = \delta'(x_2) = \dots = \delta^{(p_2-1)}(x_2) = 0 \\ \dots \\ \delta(x_m) = \delta'(x_m) = \dots = \delta^{(p_m-1)}(x_m) = 0 \end{cases}$$

care ne arată că funcția δ se anulează pe intervalul $[a, b]$ de cel puțin $p_1 + p_2 + \dots + p_m = \sigma_n$ ori. Dar întrucît prin ipoteză $x_1 = a$ și $x_m = b$, vom avea în baza lemei 1, pentru orice $x \in [a, b]$, următoarele delimitări:

$$(13') \quad |\delta(x)| \leq M(\Pi_1; a, b) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|,$$

$$(13'') \quad |L_{i-1} \dots L_2 L_1[\delta(x)]| \leq M^*(\Pi_i; a, b) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_i[\delta(x)]|, (i=2, \dots, n).$$

Înlocuind în (12) obținem

$$(14) \quad \rho(By, Bz) \leq \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[y(x) - z(x)]| \cdot \left[P_0 M(\Pi_1; a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^*(\Pi_{i+1}; a, b) \right] = q \cdot \rho(y, z),$$

unde s-a notat

$$(15) \quad q = P_0 M(\Pi_1; a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^*(\Pi_{i+1}; a, b).$$

Ținînd seamă de inegalitatea (11), din care rezultă $q < 1$, relația (14) ne arată că operatorul B este un operator de contracție pe spațiul $\mathcal{M}$.

În consecință operatorul B va admite în mulțimea $\mathcal{M}$ un punct fix, de unde rezultă existența soluției problemei (2)–(3). Totodată rezultă și unicitatea unei astfel de soluții. Astfel, teorema 1 este demonstrată.

Observații. a) Întrucît operatorul B este un operator de contracție pe mulțimea $\mathcal{M}$, rezultă că în condițiile teoremei 1, pentru a afla soluția problemei (2)–(3), se poate aplica metoda aproximațiilor succesive. Rapiditatea de convergență a șirului de aproximații către soluție va fi egală cel puțin cu aceea a unei serii geometrice de rație q .

b) Condiția (11) care împreună cu condiția (10) și cu ipotezele 1° și 2° de la § 2 asigură existența și unicitatea problemei polilocale (2)–(3), nu depinde de poziția nodurilor $x_2, \dots, x_{m-1}$ în intervalul $[a, b]$ ($x_1 = a, x_m = b$) și de asemenea nu depinde de sistemele de valori $\{y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(p_i-1)}\}$ ($i = 1, \dots, m$), care intervin în condițiile polilocale (3).

4. Dacă ne limităm numai la asigurarea existenței soluției problemei (2)–(3), atunci este suficient ca în locul condiției lui Lipschitz (10), să considerăm o condiție privind modul de creștere al funcției F . Are loc în această direcție următoarea teoremă.

TEOREMA 2. Dacă funcția F este continuă în domeniul

$$D: a \leq x \leq b, -\infty < u_i < +\infty \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

și verifică în acest domeniu inegalitatea

$$(16) \quad |F(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})| \leq P + P_0|u_0| + P_1|u_1| + \dots + P_{n-1}|u_{n-1}|,$$

în care $P, P_0, \dots, P_{n-1}$ sînt constante astfel încît să fie verificată inegalitatea (11), atunci problema (2)–(3) (unde prin ipoteză $x_1 = a$ și $x_m = b$) admite cel puțin o soluție.

Metoda de demonstrație pe care o utilizăm este analoagă unei metode, indicate în lucrarea [4]. Fie $R(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale liniare și omogene $L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1[y] = 0$, soluție care verifică condițiile (3) și fie

$$(17) \quad p = \max_{x \in [a, b]} \left(P_0 |R(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[R(x)]| \right).$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ sfera cu centrul în $R(x)$ și de rază $\frac{P+p}{1-q}$ din spațiul $\mathcal{M}$

(considerat în cadrul demonstrației teoremei precedente), numărul q fiind dat de formula (15). Să considerăm din nou operatorul B definit anterior și să arătăm că acest operator transformă sfera $\mathcal{S}$ în ea însăși.

Într-adevăr, dacă $y \in \mathcal{M}$ și $\rho(y, R) \leq \frac{P+p}{1-q}$, atunci

$$(18) \quad \begin{aligned} \rho(By, R) &= \max_{x \in [a, b]} |F(x, y, L_1[y], \dots, L_{n-1} \dots L_2 L_1[y])| \leq \\ &\leq P + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0 |y(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[y(x)]| \right) = \\ &= P + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0 |(y-R) + R| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[y-R] + \right. \\ &\quad \left. + L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[R]| \right) \leq P + p + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0 |y-R| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[y-R]| \right). \end{aligned}$$

Ținînd seamă de faptul că $y \in \mathcal{M}$ și de definiția mulțimii $\mathcal{M}$, se constată că funcția $\delta = y - R$ verifică condițiile de anulare (13). Observăm apoi că întrucît $x_1 = a$ și $x_m = b$, vom putea, în baza lemei 1, să scriem următoarele inegalități, valabile pentru orice $x \in [a, b]$:

$$(19) \quad |\delta(x)| \leq M(\Pi_1; a, b) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|,$$

$$(20) \quad |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[\delta(x)]| \leq M^*(\Pi_{i+1}; a, b) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_{i+1}[\delta(x)]|$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Înlocuind în (18), obținem

$$\rho(By, R) \leq P + p + q \cdot \rho(y, R) \leq P + p + q \frac{P + p}{1 - q} = \frac{P + p}{1 - q},$$

ceea ce demonstrează afirmația că operatorul B transformă sfera S în ea însăși.

Pe de altă parte, din continuitatea funcției F pe domeniul D , rezultă complet-continuitatea operatorului B pe mulțimea M . De aici, în baza principiului lui Schauder, operatorul B va admite cel puțin un punct fix, ceea ce înseamnă că problema (2)–(3) are cel puțin o soluție $y(x)$ care să verifice inegalitatea

$$(21) \quad |L_n L_{n-1} \dots L_1[y(x)]| \leq \frac{P + p}{1 - q}, \quad x \in [a, b].$$

Observație. Din (19) și (20), ținând seamă de (21), precum și de faptul că $R(x)$ constituie o soluție a ecuației diferențiale $\Pi_1[y] = 0$, rezultă următoarele delimitări valabile pentru orice $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |y(x) - R(x)| &\leq M(\Pi_1; a, b) \cdot \frac{P + p}{1 - q}, \\ |L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[y(x)] - L_i L_{i-1} \dots L_2 L_1[R(x)]| &\leq \\ &\leq M^*(\Pi_{i+1}; a, b) \frac{P + p}{1 - q}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

5. În cazul când funcția F este liniară și omogenă în raport cu argumentele $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, se poate da o demonstrație mai simplă relativ la existența și unicitatea soluției problemei (2)–(3) în anumite condiții corespunzătoare. Presupunem deci că ecuația (2) are forma

$$(2') \quad L_n L_{n-1} \dots L_1[y] + A_1(x) L_{n-1} \dots L_1[y] + \dots + A_{n-1}(x) L_1[y] + A_n(x) y = 0,$$

unde $A_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) sînt funcții continue pe $[a, b]$ ($a = x_1$ și $b = x_m$). Condiția lui Lipschitz (10) este îndeplinită în acest caz, dacă se consideră pentru P_i valorile

$$(22) \quad P_i = \max_{x \in [a, b]} |A_{n-i}(x)|, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Vom demonstra următoarea teoremă.

TEOREMA 1*. Dacă sînt îndeplinite condițiile 1° și 2° (§ 2) referitoare, la operatorii diferențiali L_i ($i = 1, \dots, n$) și dacă are loc inegalitatea (11), în care P_i sînt dați de formulele (22), atunci ecuația diferențială (2') admite o soluție (unică), care verifică condițiile (3) (unde prin ipoteză, $x_1 = a$ și $x_m = b$).

În vederea demonstrării acestei teoreme, este suficient să arătăm că în ipotezele adoptate, ecuația (2') nu poate avea nici o soluție neidentică nulă $\delta(x)$, care să verifice condițiile de anulare (13), corespunzătoare condițiilor (3). Să presupunem prin absurd că există o soluție $\delta(x)$, neidentică

nulă pe $[a, b]$, a ecuației (2'), care să verifice condițiile (13). Atunci, din faptul că $\delta(x)$ este soluție a ecuației (2') rezultă

$$\begin{aligned} L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1[\delta(x)] &\equiv -A_1(x) L_{n-1} \dots L_2 L_1[\delta(x)] - \\ &- A_2(x) L_{n-2} \dots L_2 L_1[\delta(x)] - \dots - A_{n-1}(x) L_1[\delta(x)] - A_n(x) \delta(x), \end{aligned}$$

de unde, luînd în ambii membri valorile absolute și delimitînd termeni din membrul al doilea în conformitate cu formulele (22), precum și în conformitate cu afirmația lemei 1 (în baza căreia se obțin inegalități analoge cu (19) și (20)), obținem inegalitatea

$$\begin{aligned} |\Pi_1[\delta(x)]| &\leq (P_{n-1} M^*(\Pi_n; a, b) + P_{n-2} M^*(\Pi_{n-1}; a, b) + \dots \\ &\dots + P_1 M^*(\Pi_2; a, b) + P_0 M(\Pi_1; a, b)) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]| \end{aligned}$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$. Înlocuind în primul membru pe x cu valoarea x_0 pentru care este atins $\mu = \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|$, și simplificînd ambii

memברי ai inegalității precedente cu numărul μ , se obține o inegalitate, care contrazice inegalitatea (11). Numărul μ nu poate fi egal cu zero, întrucît dacă $\mu = 0$, atunci din afirmația lemei 1 s-ar obține că $|\delta(x)| \equiv 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că $\delta(x)$ nu este o soluție identică nulă pe $[a, b]$.

Exemplul 1. Dacă $L_1 = L_2 = \dots = L_n = \frac{d}{dx}$, atunci $\sigma_n = n$ și

după cum s-a arătat în lucrarea anterioară [1], au loc în acest caz egalitățile

$$M(\Pi_1; a, b) = M\left(\frac{d^n}{dx^n}; a, b\right) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n! n^n} (b-a)^n,$$

$$M^*(\Pi_{i+1}; a, b) = \frac{1}{(n-i)!} (b-a)^{n-i}.$$

Inegalitatea (11) se transcrie în acest caz astfel:

$$(11') \quad P_0 \frac{(n-1)^{n-1}}{n! n^n} (b-a)^n + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \frac{1}{(n-i)!} (b-a)^{n-i} - 1 < 0.$$

6. În ipotezele 1° și 2° (§ 2) referitoare la operatorii L_i ($i = 1, \dots, n$), condiția (11) care asigură existența soluției problemei (2)–(3) poate fi înlocuită cu o condiție mai puțin restrictivă, care s-ar obține considerînd (în condițiile lemei 1) delimitări mai bune decît delimitările (9). În lucrarea [1] am dat cîteva precizări în acest sens. În cazul particular cînd $L_1 = L_2 = \dots = L_n = \frac{d}{dx}$, G. A. Bessmertnîh și A. Iu. Levin au obținut

în lucrarea [4] constantele (pozitive) *minimale* care pot fi înlocuite respectiv în locul constantelor $M^*(\Pi_i; a, b)$ din inegalitățile (9), astfel încît aceste inegalități să rămîină adevărate pentru orice funcție f verificînd condițiile lemei 1. Cu această ocazie, autorii respectivi au reușit să obțină

în cazul particular considerat, o condiție mai puțin restrictivă decât (11') care asigură existența soluției problemei polilocale (2)–(3). În cele ce urmează, vom arăta cum se poate preciza condiția (11) în cazul particular când $n = 2$ și când $k_1 = k_2 = 1$. În acest scop, vom reaminti următoarea lema, stabilită în lucrarea noastră anterioară [1] și al cărui enunț este conținut în enunțul teoremei 8 din lucrarea citată.

LEMA 2. Fie dați doi operatori diferențiali liniari și omogeni de ordinul întâi

$$(23) \quad L_1[y] = a_{10}(x) \frac{dy}{dx} + a_{11}(x)y$$

$$L_2[Y] = a_{20}(x) \frac{dy}{dx} + a_{21}(x)y,$$

operatorul L_1 avînd coeficienții din clasa $C^{(1)}[a, b]$ iar coeficienții operatorului L_2 aparținînd clasei $C^{(0)}[a, b]$. Presupunem de asemenea că $a_{10}(x) \neq 0$ și $a_{20}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. (În aceste ipoteze operatorul-produs L_2L_1 va avea proprietatea $I_2^*[a, b]$. Fie f o funcție oarecare din clasa $C^{(2)}[a, b]$ astfel încît $f(a) = f(b) = 0$. Atunci are loc pentru orice $x \in [a, b]$ delimitarea

$$(24) \quad |L_1[f(x)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]| \cdot \max_{x \in [a, b]} |L_2L_1[f(x)]|,$$

unde $N(x; L_2L_1; a, b)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale neomogene $L_2L_1[y] = 1$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$.

Constanta $C = \max_{x \in [a, b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]|$ care intervine în membrul al doilea al inegalității (24) este „optimală” (adică nu poate fi înlocuită cu o constantă mai mică), fapt care se constată observînd că inegalitatea respectivă se transformă în egalitate, dacă se consideră $f(x) = N(x; L_2L_1; a, b)$ și dacă se ia în primul membru pentru x valoarea $x = x_0$, unde x_0 reprezintă un punct din $[a, b]$ în care funcția $|L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]|$ își atinge valoarea sa maximă pe intervalul $[a, b]$. Dar în baza relației (9), are loc și următoarea delimitare asemănătoare cu (24)

$$(25) \quad |L_1[f(x)]| \leq M^*(L_2; a, b) \cdot \max_{x \in [a, b]} L_2L_1[f(x)], \quad x \in [a, b],$$

unde $M^*(L_2; a, b)$ se definește în conformitate cu formulele (5) și (7). Rezultă din cele de mai sus că între coeficienții care figurează ca factori în membrii drepte ai inegalităților (24) și (25), are loc relația

$$(26) \quad C = \max_{x \in [a, b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]| \leq M^*(L_2; a, b).$$

Cu ajutorul lemei 2, în cazul particular $n = 2$, teoremele 1, 2 și 1* stabilite anterior, se pot îmbunătăți, obținîndu-se în locul condiției (11), care intervine în enunțurile lor, următoarea condiție mai puțin restrictivă.

$$(27) \quad P_0 \cdot \max_{x \in [a, b]} |N(x; L_2L_1; a, b)| + P_1 \max_{x \in [a, b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]| < 1.$$

În acest scop, în demonstrațiile teoremelor 1 și 2 se va considera în locul delimitărilor (13'') și (20), referitoare la funcțiile $\delta(x)$, care intervin în demonstrațiile acestor teoreme și care satisfac în cazul de față condițiile $\delta(a) = \delta(b) = 0$, următoarea delimitare mai precisă, dată de lema 2 (formula (24)):

$$|L_1[\delta(x)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]| \cdot \max_{x \in [a, b]} |L_2L_1[\delta(x)]|,$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$.

Exemplul 2. Fie dat operatorul

$$(28) \quad \mathcal{L}[y] = y'' + [\alpha(x) - 3]y' + [\beta(x) - \alpha(x) + 2]y,$$

unde $\alpha(x)$ și $\beta(x)$ sînt funcții continue pe intervalul $[0, 2]$. Presupunem că aceste funcții îndeplinesc condițiile

$$(29) \quad \begin{aligned} -1 &\leq \alpha(x) \leq 3, \quad -1 \leq \beta(x) \leq 1, \quad x \in [0, 2], \\ \alpha(0) &= -1, \quad \beta(0) = +1. \end{aligned}$$

Fie h un număr astfel încît $0 < h < 2$. Ne propunem să stabilim o condiție suficientă care să asigure proprietatea $I_2^*[0, h]$ a operatorului $\mathcal{L}$ din (28). Vom putea proceda în mai multe moduri:

a) Considerînd de exemplu $L_1 = L_2 = \frac{d}{dx}$, iar $A_1(x) = \alpha(x) - 3$, $A_2(x) = \beta(x) - \alpha(x) + 2$, vom obține conform formulei (22)

$$P_0 = \max_{x \in [0, h]} |A_2(x)| = 4; \quad P_1 = \max_{x \in [a, h]} |A_1(x)| = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Apoi, } N(x; L_2L_1; 0, h) &= \frac{1}{2} x(x-h) \text{ și deci } \max_{x \in [0, h]} |N(x; L_2L_1; 0, h)| = \\ &= \frac{h^2}{8}, \quad \max_{x \in [0, h]} |L_1[N(x; L_2L_1; 0, h)]| = \max_{x \in [0, h]} \left| x - \frac{h}{2} \right| = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Inegalitatea (27) se va scrie în acest caz $h^2 + 4h - 2 < 0$, de unde rezultă pentru h condiția

$$(30) \quad h < \sqrt{6} - 2 = 0,449 \dots = h_0,$$

h_0 reprezentînd rădăcina pozitivă a ecuației $\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$.

b) Observăm că operatorul $\mathcal{L}$ din (28) admite și reprezentarea

$$(31) \quad \mathcal{L}[y] = L_2L_1[y] + \alpha(x)L_1[y] + \beta(x)y,$$

unde

$$L_1[y] = \left(\frac{d}{dx} - 1 \right) y, \quad L_2[y] = \left(\frac{d}{dx} - 2 \right) y.$$

Putem considera relativ la descompunerea (31), $A_1(x) = \alpha(x)$ și $A_2(x) = \beta(x)$ și în consecință numerele P_i ($i = 1, 2$) corespunzătoare vor fi

$$P_0 = \max_{x \in [0, h]} |A_2(x)| = \max_{x \in [0, h]} |\beta(x)| = 1,$$

$$P_1 = \max_{x \in [0, h]} |A_1(x)| = \max_{x \in [0, h]} |\alpha(x)| = 1.$$

Soluția $N(x; L_2 L_1; 0, h)$ a ecuației diferențiale $L_2 L_1[y] = 1$, soluție care se anulează pentru $x = 0$ și pentru $x = h$ va fi

$$N(x; L_2 L_1; 0, h) = \frac{1}{2e^h} [e^{2x} - (1 + e^h) e^x + e^h].$$

De aici obținem

$$\max_{x \in [0, h]} |N(x; L_2 L_1; 0, h)| = \frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2$$

și

$$\max_{x \in [0, h]} |L_1[N(x; L_2 L_1; 0, h)]| = \frac{1}{2} (e^h - 1).$$

Inegalitatea (27) se va scrie în cazul de față astfel

$$\frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2 + \frac{1}{2} (e^h - 1) - 1 < 0,$$

de unde rezultă pentru h condiția

$$(32) \quad h < 1,003 \dots = h_1,$$

h_1 reprezentând rădăcina ecuației

$$\frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2 + \frac{1}{2} (e^h - 1) - 1 = 0.$$

Pentru a face o apreciere asupra eficacității metodei propuse, să considerăm și inegalitatea lui De la Vallée Poussin [16], care în cazul operatorului $\mathcal{L}$ din (28) se scrie $P_0 \cdot \frac{h}{2} + P_1 \cdot h < 1$, adică $2h^2 + 4h < 1$, ceea ce ne dă pen-

tru h condiția $h < \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 = 0,224 \dots = h_2$.

Se observă că

$$h_1 > 2h_0 = 4h_2.$$

Acest exemplu ne arată că, în general, în studiul problemei poli-locale este util de a se cunoaște diversele reprezentări de forma (2), pe care le admite o ecuație diferențială (liniară sau neliniară) de un ordin σ_n și de a se aplica metoda propusă mai sus, utilizându-se reprezentarea

„cea mai convenabilă”. În legătură cu această idee, este de observat faptul că fiind dat un operator diferențial liniar și omogen

$$(33) \quad \mathcal{L} = a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x)$$

ai cărui coeficienți sînt funcții din clasa $C^{(0)}[a, b]$, un astfel de operator admite întotdeauna reprezentarea

$$(34) \quad \mathcal{L} = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1 + a_2(x) L_{n-2} \dots L_2 L_1 + \dots + a_{n-2}(x) L_2 L_1 + a_{n-1}(x) L_1 + a_n(x),$$

$$\text{unde } L_1 = L_2 = \dots = L_{n-2} = \frac{d}{dx}, \text{ iar } L_{n-1} = \left[a_0(x) \frac{d}{dx} + a_1(x) \right] \frac{d}{dx}.$$

Dacă se mai presupune că $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci operatorul L_{n-1} va avea proprietatea $I_2^*[a, b]$ și astfel ipotezele 1° și 2° de la § 2 sînt îndeplinite. Pentru studiul problemei poli-locale de tipul celei tratate în prezenta lucrare, este uneori mai convenabil de a se utiliza reprezentarea (34) în locul reprezentării (33). Rezultate și mai bune se pot obține dacă se consideră pentru $\mathcal{L}$ reprezentarea

$$\mathcal{L} = \Lambda_{n-p+1} \Lambda_{n-p} \dots \Lambda_2 \Lambda_1 + a_p(x) \Lambda_{n-p} \dots \Lambda_2 \Lambda_1 + \dots + a_{n-1}(x) \Lambda_1 + a_n(x),$$

$$\text{unde } \Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_{n-p} = \frac{d}{dx}, \text{ iar } \Lambda_{n-p+1} = \left[a_0(x) \frac{d}{dx^{p-1}} + a_1(x) \frac{d}{dx^{p-1}} + \dots + a_{p-1}(x) \right] \frac{d}{dx} \text{ și unde } p \text{ reprezintă numărul natural maxim posibil } (2 \leq p \leq n) \text{ pentru care operatorul } \Lambda_{n-p+1} \text{ are proprietatea } I_2^*[a, b].$$

Primită la redacție la 20 mai 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. ARAMĂ O., *Asupra unor evaluări ale funcțiilor derivabile, cu aplicații la studiul problemei poli-locale* (I). St. cerc. mat., **17** (1965).
2. — *Intervale de neoscilație la ecuații diferențiale liniare*. St. cerc. mat. (Cluj) **XIII** 213—239 (1962).
3. — *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica, **3** (26), 197—216 (1961); St. și cerc. mat. (Cluj), **XIII** 7—25 (1962).
4. БЕССМЕРТНЫХ Г. А., ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. наук СССР, **144**, 3, 47—474 (1962).