ASUPRA UNOR TIPURI DE ECUAȚII ANAMORFOZABILE

DE

L. BAL

1. Se știe că nomogramele cu puncte aliniate reprezintă ecuațiile cu trei variabile

$$F(z_1,\ z_2,\ z_3) = 0 \tag{1}$$

care au proprietatea că membrul întîi al ecuației (1) sau produsul lui cu factori care nu conțin decît două variabile se pot pune sub forma

$$F(z_1,\ z_2,\ z_3) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$F(z_1, z_2, z_3) \cdot \varphi_1(z_1, z_2) \cdot \varphi_2(z_1, z_3) \cdot \varphi_3(z_2, z_3) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

O extindere a reprezentării ecuațiilor cu nomograme cu puncte aliniate se poate concepe și la ecuațiile cu 4—6 variabile, dacă scările se înlocuiesc cu cîmpuri binare.

Astfel ecuația

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 1 \\ f_{56} & g_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

se poate reprezenta cu o nomogramă cu trei cîmpuri binare.

În acest caz ecuația (3) conduce la o nomogramă cu puncte aliniate formată din cîmpurile

$$x = f_{12}; \qquad x = f_{34} \qquad x = f_{56}$$
$$y = g_{12} \qquad y = g_{34} \qquad y = f_{56} \tag{4}$$

Margoulis [6] G. S. Hovanski [4] au arătat că aceste tipuri de ecuații pot fi reprezentate și cu nomograme cu transparent orientat, care cîteodată pot fi mai simple.

Dacă între elementele unei linii a determinantului (3) există o relație liniară

$$\alpha_1 f_{12} + \beta_1 g_{12} + \gamma_1 = 0, \tag{5}$$

atunci cîmpul (z_1, z_2) dispare și e înlocuit de dreapta

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0.$$

In aceste cazuri este necesar să se găsească alte reprezentări pentru ecuația (3).

2°. Să considerăm la început cazul cînd elementele unei singure linii (linia întîia) din determinantul (3) sînt funcții de două variabile, între care există relația (5). In acest caz ecuația se încadrează într-un tip mai general de ecuații de forma

$$f_{12} F_{34} + G_{34} = 0, \tag{6}$$

unde

$$F_{34} = a_1 f_3 + b_1 f_4 + c_1 g_3 + d_1 g_4 + c_1$$
$$G_{34} = a_2 f_3 g_4 + c_2 f_3 + b_2 g_3 f_4 + d_2 g_3 + e_2 f_4 + h_2 g_4 + k_2$$

($a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; h_2, k_2$ fiind constante.)

De la început constatăm că ecuația (6) se încadrează în clasa ecuațiilor cu variabilele separate

$$\varphi_{12} = \varphi_{34}; \qquad \left(\varphi_{12} = f_{12}; \qquad \varphi_{34} = -\frac{G_{34}}{F_{34}}\right) \tag{7}$$

și se poate reprezenta în general printr-o nomogramă compusă din două nomograme reticulare (Fig.1) unde u este variabilă intermediară.

Dacă una din cele două nomograme elementare este formată numai din familii de drepte, atunci nomograma compusă poate fi formată dintr-o nomogramă cu puncte aliniate și o nomogramă cu scară binară (Fig.2).

Ecuația (7) admite și o reprezentare cu nomogramă cu transparent orientat, prin introducerea unor funcții și variabile auxiliare. Se consideră sistemul auxiliar

$$\varphi_{12} = \varphi_{34}$$
$$T_1 = T_3 + \alpha$$

care conduce la sistemul fundamental

$$x = f_{12} \qquad x = 0; \qquad x = \varphi_{34}; \qquad x = 0$$
$$y = T_1 \qquad y = 0 \qquad y = T_3; \qquad y = \alpha,$$

reprezentabil prin nomograma cu transparent orientat din figura 3 a cărei utilizare rezultă din formula de structură

$$M_{12} \square A; \qquad M_{34} \leftarrow (\alpha)$$

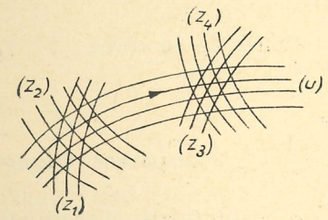


Fig. 1

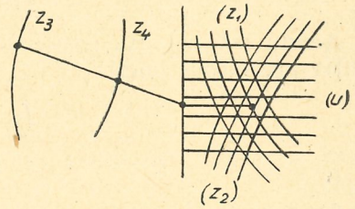


Fig. 2

3°. Dacă între elementele a două linii ale determinantului (3) există relații liniare, atunci cele două cîmpuri degenerează în două drepte. Ecuația(3) se încadrează în clasa ecuațiilor de forma

$$f_5 F(f_{12}, f_{34}) + g_5 G(f_{12}, f_{34}) + H(f_{12}, f_{34}) = 0 \tag{8}$$

Prin introducerea variabileor auxiliare

$$M = f_{12} \qquad N = f_{34}$$

ecuația (8) este echivalentă cu sistemul

$$M = f_{12} \qquad N = f_{34}$$
$$f_5 F(M, N) + g_5 G(M, N) + H(M, N) = 0, \tag{9}$$

care se poate reprezenta printr-o nomogramă cu transparent orientat.

Prin introducerea unor funcții și variabile auxiliare se obține sistemul fundamental

$$f_{12} = T_3 - \alpha = M - 0$$
$$T_2 - \beta = f_{34} = N - 0 \tag{10}$$

care ne conduce la nomograma din figura 4.

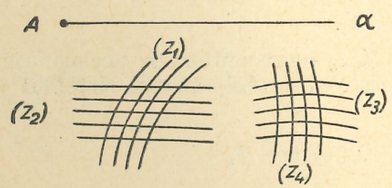


Fig. 3

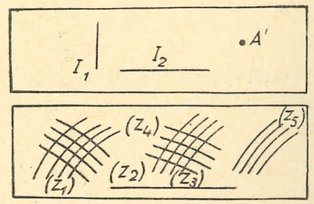


Fig. 4

Pentru ușurarea orientării planului mobil se ia familia de curbe (Z_2) un fascicol cu direcția axa Ox.

4°. Dacă toate cele trei cîmpuri degenerează în drepte atunci (8) este de forma

$$f_{56}F(f_{12}, f_{34}) + G(f_{12}, f_{34}) = 0$$

sau

$$f_{56} = \Phi(f_{12}, f_{34}) \tag{11}$$

Acesta este un caz particular al celui studiat în lucrarea [2]. Dacă ecuația are forma simplă

$$f_{56} = f_{12} + f_{34}$$

atunci se poate reprezenta cu o nomogramă cu transparent triunghiular [4].

5°. In nomogramele concepute pentru cazurile anterioare, cînd principiul punctelor aliniate nu mai putea fi aplicat, planul transparent a conținut un punct și o dreaptă, două sau chiar trei drepte, a căror poziție depinde și de parametrii aleși.

Nomogramele sînt simple și în cazul cînd în planul transparent sînt trei scări rectilinii, două sau una singură.

a) In primul rînd să considerăm cazul simplu, cînd toate cele trei scări sînt situate pe aceeași dreptă (fig. 5.)

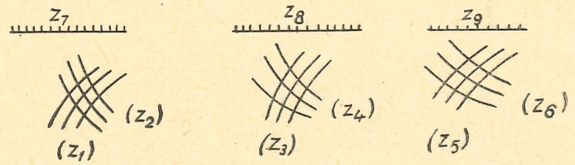


Fig. 5

Această nomogramă reprezintă sistemul

$$f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9 \tag{12}$$

$$g_{12} = g_{34} = g_{56}$$

Dacă considerăm variabilele z_2, z_4 și z_6 reprezentate de același fascicol paralel cu direcția de orientare a transparentului, atunci sistemul (12) devine

$$f_1\alpha - f_7 = f_3\alpha - f_8 = f_5\alpha - f_9$$

$$T(\alpha) = T(\alpha) = T(\alpha) \tag{13}$$

In acest caz momograma este simplă, atît în construcție, cît și în utilizare (fig. 6.)

Eliminînd pe (α) între primele două ecuații ale sistemului (13) obținem o ecuație cu șase variabile care se reprezintă cu acest tip de nomogramă

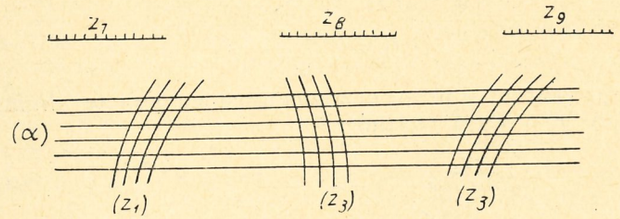


Fig. 6

Dacă considerăm numai ecuațiile

$$f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 \tag{14}$$

$$T(z_2) = T(z_4),$$

unde funcția $T(z)$ este arbitrară, găsim o nomogramă simplă pentru reprezentarea ecuației

$$f_{12} + f_{34} = f_7 - f_8$$

Dacă două din scările situate în planul mobil sînt pe aceeași dreaptă, iar a treia pe altă dreaptă, neparalelă cu prima, atunci sistemul corespunzător este

$$f_{12} - f_7 = f_{34} - a f_8 = f_{56} - f_9$$

$$g_{12} - A = g_{34} - f_8 = g_{56} - A \tag{15}$$

Luînd $g_{12} = g(z_2)$; $g_{56} = g(z_6)$; $f_{12} = z_2 f_1$; $f_{56} = f_5 z_6$, avem o nomogramă simplificată (fig.7.)

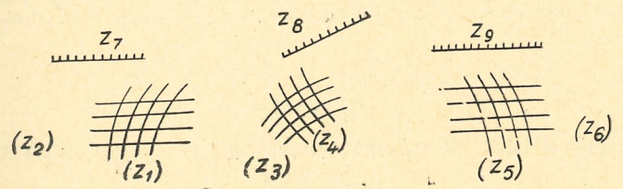


Fig. 7

care reprezintă, în cazul cînd $z_2 = z_6 = \alpha$, $g(\alpha) = \alpha$ este o variabilă auxiliară, sistemul

$$g_{34} - f_4 = \frac{f_7 - f_8}{f_1 - f_5} - A$$

$$f_{34} - a f_8 = \frac{f_7 - f_8}{f_1 - f_5} f_5 - f_9$$

Ca o particularizare a acestei nomograme se poate lua cazul cînd în planul mobil sînt considerate două scări nesituate pe aceeași dreptă fig.6.

Ecuația reprezentată de această nomogramă are cinci variabile și e de forma

$$(g_{23} - f_5)f_1 - f_4 = f_{23} - af_5$$

$$f_1 = \frac{f_{23} - af_5 + f_4}{g_{23} - f_5}$$

și poate fi reprezentată și printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu două cîmpuri binare și o scară rectilinie.

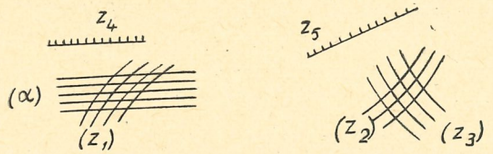


Fig. 8

Pot fi concepute și alte tipuri de nomograme care să nu poarte pe planul transparent decît drepte sau scări rectilinii. Ele au o anumită importanță practică din punct de vedere a construcției și al utilizării, multe din ele au fost cuprinse în studiul detailat al nomogramelor cu transparent [2].

BIBLIOGRAFIE

[1] *L. Bal*, Nomograme cu transparent orientat pentru ecuații cu patru și cinci variabile. Studii și cercetări de matematică (Cluj), VIII, 1–2, 169–176 (1957).
[2] *L. Bal*, Nomograme cu transparent orientat pentru sisteme ramificate. Studii și cercetări de matematică (Cluj). XIII, 2, p. 241–252, (1962).
[3] *L. Bal și Gh. Ionescu*, Reprezentarea unor sisteme de ecuații cu ajutorul nomogramelor cu transparent orientat. Studii și cercetări de matematică (Cluj), XIV p. 235–246, (1963).
[4] *Г. С. Хованский*, Некоторы вопросы практическои номографии. Вычис. Мат. 4.3-10 (1959).
[5] *V. Pleskot*, Nomografie. Statni Nakladatelstvi Technické Literatury. Praha 1963.
[6] *W. Margoulis*, Les abaques a transparent orienté ou tournant. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

РЕЗЮМЕ

О НЕКОТОРЫХ НОМОГРАФИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯХ

Л. БАЛ

В настоящей статье изучается возможность постоенип некоторых номограмм, ориетированны транспарантом содержащий только прямые или прямые шкалы.

Расматриваются уравнения, номографируемые номограммами из выраженных точек с бинарными полями в том случае, когда поля дегенерируют.

Так же расматриваются некоторые типы номограмм содержащих в транспаранте две или три прямых шкал.

RÉSUMÉ

SUR QUELQUES ÉQUATIONS ANAMORPHOSABLES

PAR

L. BAL

Dans cet article, on étudie la possibilité de construction de nomogrammes à transparent orienté qui ne possèdent dans le plan mobile que des droites ou des échelles rectilignes.

On examine les équations représentables par des nomogrammes à points alignés à champs binaires, au cas où les champs dégénèrent.

On présente également quelques types de nomogrammes qui possèdent dans le plan mobile deux ou trois échelles rectilignes.