

NOMOGRAME CU TRANSPARENT FĂRĂ ELEMENTE GRADATE¹⁾

DE

LASCU BAL și MARIA PETER

(Cluj)

1. În multe probleme de calcul grafic se folosesc pentru ecuații și sisteme de ecuații mai complexe, nomogramele cu plan mobil sau nomogramele cu transparent. În cazurile când transparentul conține multe elemente gradate, utilizarea lui devine greoaie și precizia suferă. Din acest motiv se folosesc numai acele tipuri de nomograme în care transparentul conține elemente simple: segmente de dreaptă, cercuri, scări rectilinii, scări circulare etc. Astfel sînt nomogramele cu puncte aliniate, nomogramele cu transparent circular, nomogramele cu transparent dreptunghiular, și altele. Rămîne însă o importantă clasă de ecuații reprezentabile nomografic, care nu pot fi rezolvate în acest fel din cauza complexității nomogramei.

În articolul de față ne preocupăm de extinderea transparentului cu elemente negradate și în alte cazuri care pînă în prezent se reprezentau prin nomograme cu transparent cu elemente gradate.

2. Să considerăm la început cazul când legăturile între transparent (π') și planul fix (π) sînt două contacte duble, dintre care primul contact dublu și unul simplu din al doilea sînt contacte de poziție, iar ultimul contact simplu din contactul al doilea este contact de rezolvare.

În ipoteza că în planul mobil (π') avem două cîmpuri binare și în cel fix (π) tot două cîmpuri binare, atunci atașînd celor două plane

¹⁾ Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11—12 decembrie 1964.

sistemele de coordonate $x'O'y'$, respectiv xOy (fig. 1) putem scrie ecuațiile câmpurilor binare :

$$\begin{aligned}
 (\pi') \quad & (u_1, u_2) : \begin{cases} x' = f_{1,2}(u_1, u_2) \\ y' = g_{1,2}(u_1, u_2) \end{cases} & (u_5, u_6) : \begin{cases} x = f_{5,6}(u_5, u_6) \\ y = g_{5,6}(u_5, u_6) \end{cases} \\
 & (u_3, u_4) : \begin{cases} x' = f_{3,4}(u_3, u_4) \\ y' = g_{3,4}(u_3, u_4) \end{cases} & (u_7, u_8) : \begin{cases} x = f_{7,8}(u_7, u_8) \\ y = g_{7,8}(u_7, u_8) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Formula de structură a acestei nomograme este :

$$P'_{1,2} | \equiv | P_{5,6} \quad P'_{3,4} | \Rightarrow | P_{7,8}$$

Această nomogramă rezolvă ecuația :

$$(1) \quad (f_{3,4} - f_{1,2})^2 + (g_{3,4} - g_{1,2})^2 = (f_{7,8} - f_{5,6})^2 + (g_{7,8} - g_{5,6})^2,$$

în care fiind cunoscut orice sistem de valori pentru șapte variabile se determină valorile corespunzătoare a celei de-a opta variabilă.

Să desenăm acum toate câmpurile binare pe un singur plan, planul fix, și să folosim în loc de planul transparent cu elemente gradate, o riglă negradată, sau un dreptunghi. Marcăm punctele $P'_{1,2}$ și $P'_{3,4}$ pe marginea riglei și fixăm apoi rigla astfel încât punctul $P'_{1,2}$ să coincidă cu punctul $P_{5,6}$, iar $P'_{3,4}$ să fie situat pe o curbă cotate din familia u_7 (fig. 2).

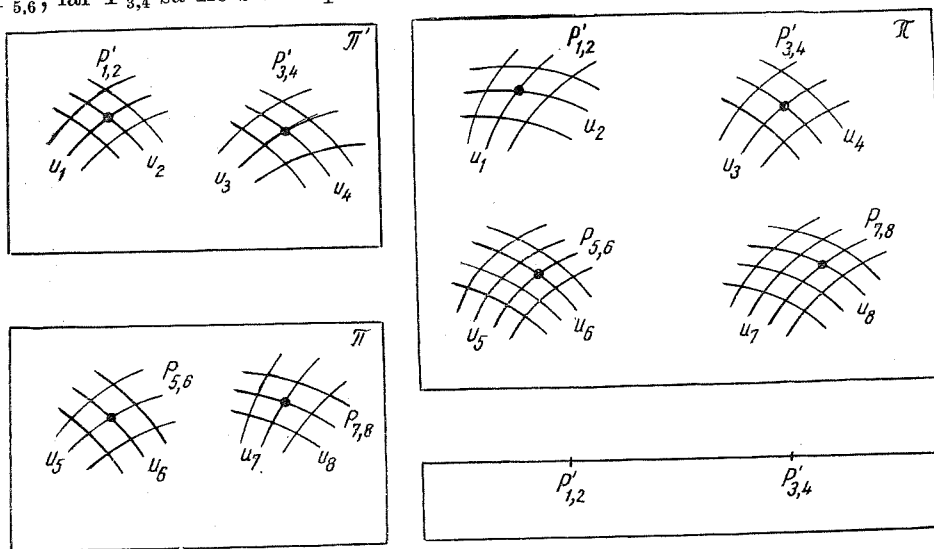


Fig. 1

Fig. 2

Cota curbei din familia u_8 , care trece prin acest punct împreună cu celelalte cote date, formează o soluție a ecuației (1).
Se poate observa că rigla poate fi înlocuită cu compasul.

Acest tip de nomogramă e cunoscut sub numele de „nomogramă cu compas”.

Evident că în acest cadru intră și ecuațiile :

$$(2) \quad (f_3 - f_1)^2 + (g_4 - g_2)^2 = (f_7 - f_5)^2 + (g_8 - g_6)^2$$

$$(3) \quad (f_2 - f_1)^2 + (g_2 - g_1)^2 = (f_4 - f_3)^2 + (g_4 - g_3)^2$$

$$(4) \quad (f_2 - a)^2 + (b - g_1)^2 = (c - f_3)^2 + (g_4 - d)^2$$

care reprezintă, din punct de vedere geometric, particularizări ale primei nomograme.

3. Să considerăm acum cazul în care legăturile între planele (π) și (π') sînt determinate de trei contacte duble : un contact dublu și unul simplu, fiind contacte de poziție, iar un contact simplu și unul dublu — contacte de rezolvare.

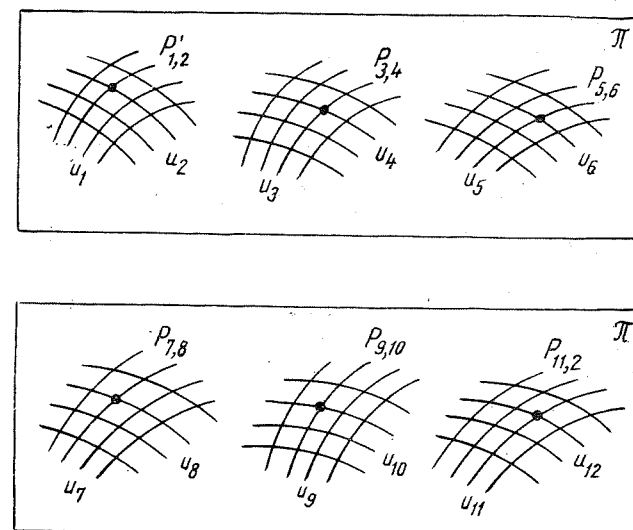


Fig. 3

Să luăm în cele două plane câte trei câmpuri binare (fig. 3) :

$$\begin{aligned}
 (\pi') \quad & (u_1, u_2) : \begin{cases} x' = f_{1,2}(u_1, u_2) \\ y' = g_{1,2}(u_1, u_2) \end{cases} & (u_7, u_8) : \begin{cases} x = f_{7,8}(u_7, u_8) \\ y = g_{7,8}(u_7, u_8) \end{cases} \\
 & (u_3, u_4) : \begin{cases} x' = f_{3,4}(u_3, u_4) \\ y' = g_{3,4}(u_3, u_4) \end{cases} & (u_9, u_{10}) : \begin{cases} x = f_{9,10}(u_9, u_{10}) \\ y = g_{9,10}(u_9, u_{10}) \end{cases} \\
 & (u_5, u_6) : \begin{cases} x' = f_{5,6}(u_5, u_6) \\ y' = g_{5,6}(u_5, u_6) \end{cases} & (u_{11}, u_{12}) : \begin{cases} x = f_{11,12}(u_{11}, u_{12}) \\ y = g_{11,12}(u_{11}, u_{12}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nomograma considerată are formula de structură :

$$P'_{1,2} \mid \mid P_{7,8} \quad P'_{3,4} \mid \rightarrow \mid P_{9,10} \quad P'_{5,6} \mid \rightarrow \mid P_{11,12}$$

și reprezintă următorul sistem de trei ecuații cu 12 variabile :

$$(5) \quad \begin{cases} (f_{3,4} - f_{1,2})^2 + (g_{3,4} - g_{1,2})^2 = (f_{9,10} - f_{7,8})^2 + (g_{9,10} - g_{7,8})^2 \\ (f_{5,6} - f_{1,2}) [(f_{3,4} - f_{1,2})(f_{9,10} - f_{7,8}) + (g_{3,4} - g_{1,2})(g_{9,10} - g_{7,8})] - \\ - (g_{5,6} - g_{1,2}) [(f_{3,4} - f_{1,2})(g_{9,10} - g_{7,8}) - (f_{9,10} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2})] = f_{11,12} - f_{7,8} \\ (g_{5,6} - g_{1,2}) [(f_{3,4} - f_{1,2})(f_{9,10} - f_{7,8}) + (g_{3,4} - g_{1,2})(g_{9,10} - g_{7,8})] - \\ - (f_{5,6} - f_{1,2}) [(f_{3,4} - f_{1,2})(g_{9,10} - g_{7,8}) - (f_{9,10} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2})] = g_{11,12} - g_{7,8} \end{cases}$$

Procedind și în acest caz în mod analog se desenează toate câmpurile binare pe planul fix, iar în loc de transparent cu elemente gradate se folosește un echer sau o placă dreptunghiulară.

Fiind date valorile corespunzătoare a 9 variabile, întotdeauna putem așeza placa dreptunghiulară astfel ca punctele de cote date $P'_{1,2}$, $P'_{3,4}$ și

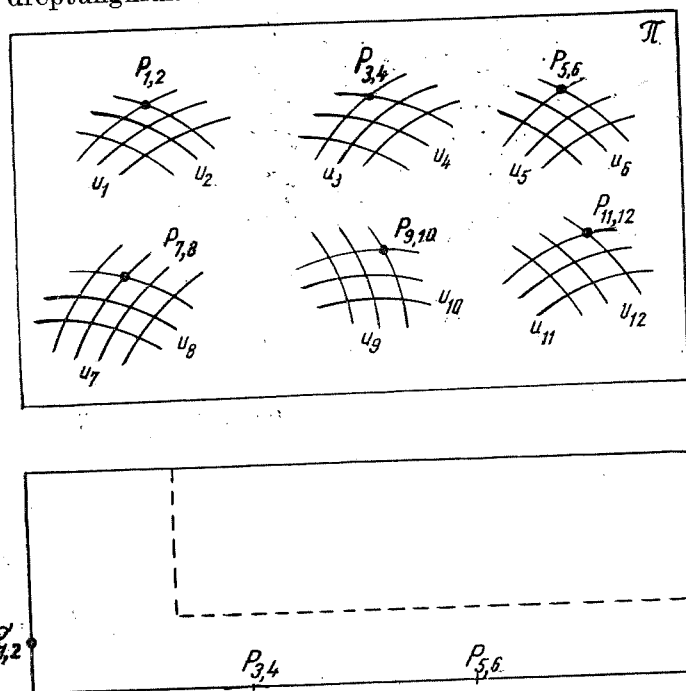


Fig. 4

$P'_{5,6}$ să fie situate pe două laturi care formează un unghi drept (vezi fig. 4).

Deplasăm placa, astfel încât punctul $P'_{1,2}$ să se suprapună peste $P_{7,8}$, iar $P'_{3,4}$ pe o curbă din familia u_9 . Determinăm astfel cota curbei u_{10}

care trece prin punctul $P_{9,10}$ și pe care s-a suprapus punctul $P'_{3,4}$, iar valorile corespunzătoare variabilelor u_{11} , u_{12} sînt date de coordonatele curbii ale punctului cu care va coincide $P'_{5,6}$.

Se poate folosi și în acest caz repetat, de trei ori compasul.

4. Alte nomograme, cu ecuațiile corespunzătoare, se obțin în cazul în care legăturile între cele două plane sînt : un contact dublu și unul simplu — contacte de poziție, și un contact dublu — contact de rezolvare, sau aceleași contacte de poziție ca mai sus, dar un contact simplu de rezolvare.

Ca exemplu luăm cazul în care în planul (π') avem trei câmpuri binare, iar în planul (π) — două câmpuri binare și o familie de curbe (fig. 5).

Formula de structură este :

$$P'_{1,2} \mid \mid P_{7,8} \quad P'_{3,4} \mid - \mid C_9 \quad P'_{5,6} \mid \rightarrow \mid P_{10,11}$$

iar sistemul de ecuații corespunzător :

$$(6) \quad \begin{cases} (f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2 = (f_{10,11} - f_{7,8})^2 + (g_{10,11} - g_{7,8})^2, \\ F_9 \left\{ \frac{f_{7,8} [(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2] + (f_{3,4} - f_{1,2}) [(f_{5,6} - f_{1,2})(f_{10,11} - f_{7,8}) + (g_{5,6} - g_{1,2})(g_{10,11} - g_{7,8})] - (g_{3,4} - g_{1,2}) [(f_{5,6} - f_{1,2})(g_{10,11} - g_{7,8}) - (f_{10,11} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2})]}{(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2} \right. \\ \left. - \frac{(f_{10,11} - f_{7,8})(g_{5,6} - g_{1,2})}{(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2} \cdot \frac{g_{7,8} [(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2] + (f_{3,4} - f_{1,2}) [(f_{5,6} - f_{1,2})(f_{10,11} - f_{7,8}) + (g_{5,6} - g_{1,2})(g_{10,11} - g_{7,8})] - (f_{10,11} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2}) [(f_{5,6} - f_{1,2})(g_{10,11} - g_{7,8}) - (f_{10,11} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2})]}{(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2} \right\} + \\ + \frac{(f_{3,4} - f_{1,2}) [(f_{5,6} - f_{1,2})(g_{10,11} - g_{7,8}) - (f_{10,11} - f_{7,8})(g_{3,4} - g_{1,2})]}{(f_{5,6} - f_{1,2})^2 + (g_{5,6} - g_{1,2})^2} \cdot u_9 \Big\} = 0. \end{cases}$$

Din sistemul (6) determinăm variabilele u_{10} , u_{11} , fiind date celelalte nouă.

Dacă contactul de rezolvare din cazul de mai sus este simplu, nomograma are următoarea formulă de structură :

$$P'_{1,2} \mid \mid P_{7,8} \quad P'_{3,4} \mid - \mid C_9 \quad P'_{5,6} \mid \rightarrow \mid C_{10}$$

și ecuația reprezentată se obține prin eliminarea lui α din sistemul :

$$(7) \quad \begin{cases} F_9 [f_{7,8} + (f_{3,4} - f_{1,2}) \cos \alpha - (g_{3,4} - g_{1,2}) \sin \alpha; \\ g_{7,8} + (g_{3,4} - g_{1,2}) \cos \alpha + (f_{3,4} - f_{1,2}) \sin \alpha; u_9] = 0, \\ F_{10} [f_{7,8} + (f_{5,6} - f_{1,2}) \cos \alpha - (g_{5,6} - g_{1,2}) \sin \alpha; \\ g_{7,8} + (g_{3,4} - g_{1,2}) \cos \alpha + (f_{5,6} - f_{1,2}) \sin \alpha; u_{10}] = 0. \end{cases}$$

Trecînd toate elementele nomogramei în același plan, putem folosi același transparent dreptunghiular ca și în cazul anterior.

Dacă formula de structură conține mai mult de trei puncte în coincidență, atunci utilizarea transparentului dreptunghiular nu mai este simplă; al patrulea punct cade în interiorul dreptunghiului, ceea ce necesită citirea prin transparent (adică tocmai ce am căutat să evităm prin noua metodă de folosire a transparentului).

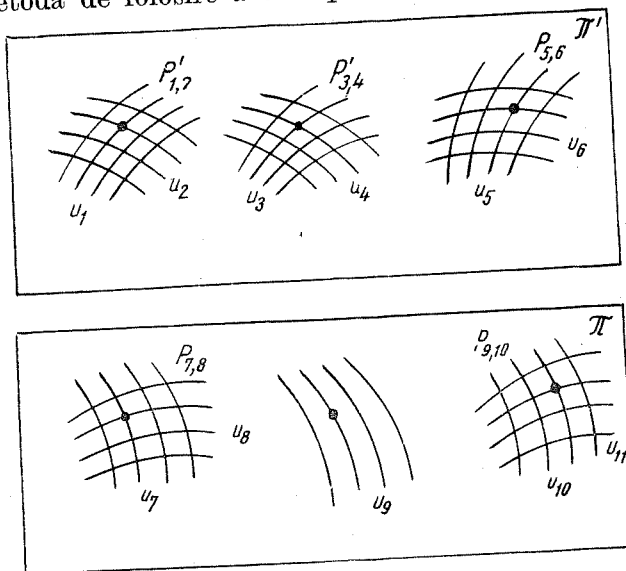


Fig. 5

În aceste cazuri se poate aplica, destul de simplu, compasul, după cum arătăm pe un exemplu cu patru puncte în contact:

$P'_{1,2} \mid \mid P_{9,10}$ $P'_{3,4} \mid - \mid C_{11}$ $P'_{5,6} \mid \Rightarrow \mid P_{12,13}$ $P'_{7,8} \mid \Rightarrow \mid P_{14,15}$.
Trecînd toate cîmpurile și familiile de curbe în același plan (fig. 6) utilizarea nomogramei e următoarea: din $P_{9,10}$ cu o deschidere de compas

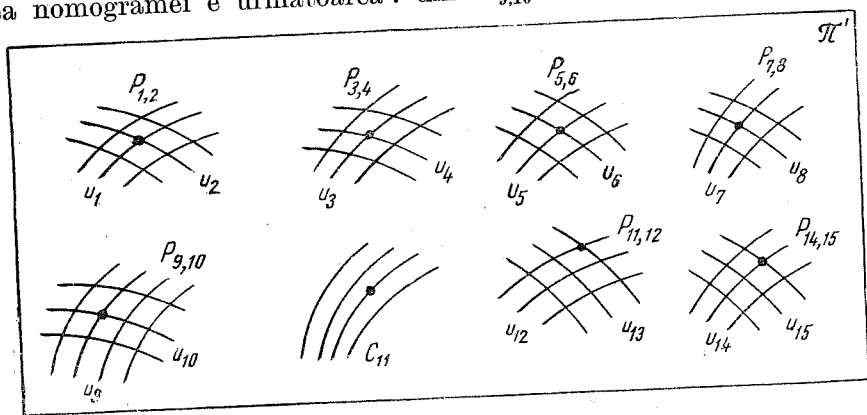


Fig. 6

egală cu $P'_{1,2}$ $P'_{3,4}$ descriem un arc de cerc care taie curba C_{11} dată în unul sau mai multe puncte. Dintr-unul din punctele astfel obținute, cu deschiderea $P'_{3,4}$ $P'_{5,6}$, descriem un arc de cerc în domeniul ocupat de cîmpul (u_{12}, u_{13}) ; cu deschiderea $P'_{1,2}$ $P'_{5,6}$ din $P_{9,10}$, descriem un nou arc de cerc în domeniul aceluiași cîmp. Punctul comun al arcelor de cerc din zona cîmpului (u_{12}, u_{13}) are coordonatele curbilinii căutate. În mod analog se găsește și punctul din cîmpul (u_{14}, u_{15}) pornind cu deschiderile de compas $P'_{1,2}$ $P'_{7,8}$ și $P'_{3,4}$ $P'_{7,8}$ din punctele $P_{9,10}$ și P_{11} .

5. Să cercetăm cazurile în care se poate simplifica utilizarea transparentului orientat.

În acest scop considerăm că legăturile dintre planele (π') și (π) sînt un contact dublu cu paralelismul unei drepte, contact de poziție și un contact simplu, contact de rezolvare.

Luăm în planul (π') două cîmpuri binare și în planul (π) un cîmp binar și o familie de curbă (fig. 7):

$$\begin{aligned} (\pi') & & (\pi) \\ (u_1, u_2) : & \begin{cases} x' = f_{1,2}(u_1, u_2) \\ y' = g_{1,2}(u_1, u_2) \end{cases} & (u_5, u_6) : \begin{cases} x = f_{5,6}(u_5, u_6) \\ y = g_{5,6}(u_5, u_6) \end{cases} \\ (u_3, u_4) : & \begin{cases} x' = f_{3,4}(u_3, u_4) \\ y' = g_{3,4}(u_3, u_4) \end{cases} & u_7 : F_7[x, y, u_7] = 0. \end{aligned}$$

Formula de structură corespunzătoare fiind:

$$P'_{1,2} \mid \mid P_{5,6} \quad D'_{0,\infty} \mid - \mid D_{0,\infty} \quad P'_{3,4} \mid \rightarrow \mid C_7$$

conduce la ecuația:

$$(8) \quad F_7[f_{5,6} + f_{3,4} - f_{1,2}; g_{5,6} + g_{3,4} - g_{1,2}; u_7] = 0,$$

unde se determină una din variabile, dacă se cunosc celelalte șase.

Pentru reprezentarea acestei ecuații putem concepe următoarea nomogramă. Se desenează toate elementele pe un singur plan și se ia un transparent dreptunghiular pe care se trasează linii paralele necotate și se marchează punctele $P'_{1,2}$ și $P'_{3,4}$ pe două laturi neparalele (fig. 8).

Se deplasează apoi transparentul așa încît $P'_{1,2}$ să coincidă cu $P_{5,6}$, iar drepte de pe transparent să fie paralele cu $D_{0,\infty}$. Atunci punctul $P'_{3,4}$ ne determină curba u_7 din familie și deci valoarea necunoscutei ce ne-am propus s-o determinăm.

Pentru cazul cînd contactul de rezolvare este dublu, nomograma rezolvă un sistem de două ecuații:

$$(9) \quad \begin{cases} f_{3,4} - f_{1,2} = f_{7,8} - f_{5,6} \\ g_{3,4} - g_{1,2} = g_{7,8} - g_{5,6} \end{cases}$$

și utilizarea ei este analoagă.

Și în cazul transparentului orientat folosirea a mai mult de două puncte în contact nu mai este simplă, căci al treilea punct cade în interiorul transparentului.

6. Folosim aceste rezultate la reprezentarea unor ecuații și sisteme de ecuații cu ajutorul nomogramelor cu transparent sub forma indicată în cele de mai sus.

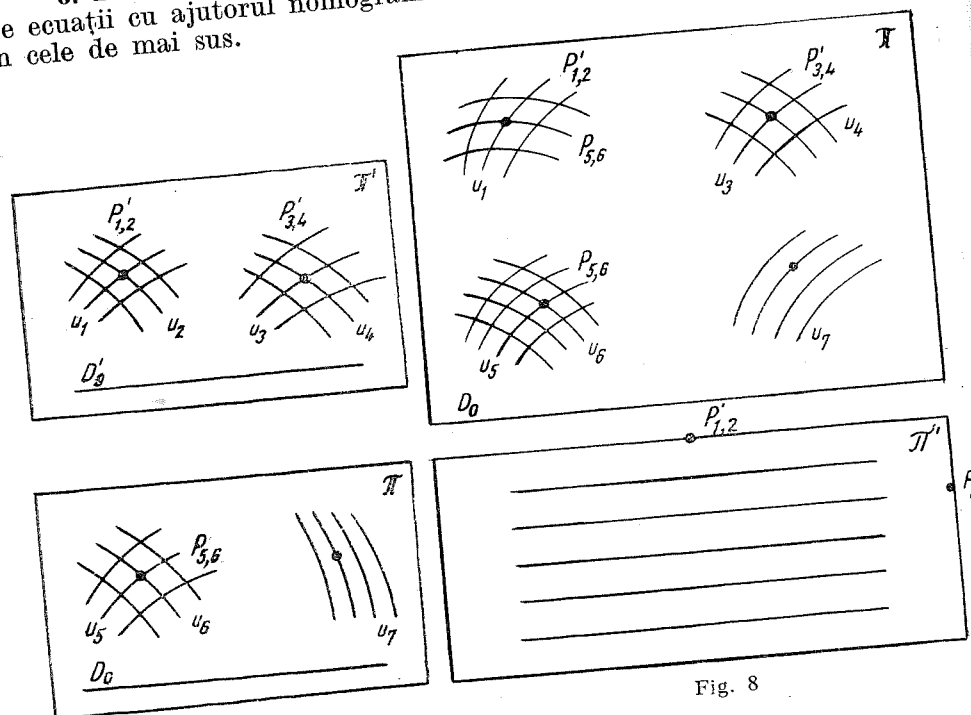


Fig. 7

a. Fie sistemul de ecuații de studiat de forma:

$$(10) \begin{cases} (t-r)^2 + (u-s)^2 = x^2, \\ (v+w-r)[x(t-r)] + (v-w-s)[x(u-s)] = y^2 + z, \\ (v-w-s)[x(t-r)] - (v+w-r)[x(u-s)] = y + z^2. \end{cases}$$

El se reprezintă cu o nomogramă cu plan mobil de formă dreptunghiulară sau un echer care se utilizează conform indicațiilor date la punctul 3. Se consideră date x, y, z, r, s, t , și se caută u, v, w (fig. 9).

b. Considerăm formulele folosite pentru calculul și dimensionarea tensiunilor în plăci și grinzi simple cu secțiune dreptunghiulară

$$(11) \quad x = \sqrt{\frac{30M}{b(\sigma_e + 10\sigma_b)}} \quad F_e = \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \sqrt{\frac{7,5Mb}{\sigma_e + 10\sigma_b}}$$

$$h = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b} + 15 \right) \sqrt{\frac{M}{7,5b(\sigma_e + 10\sigma_b)}}$$

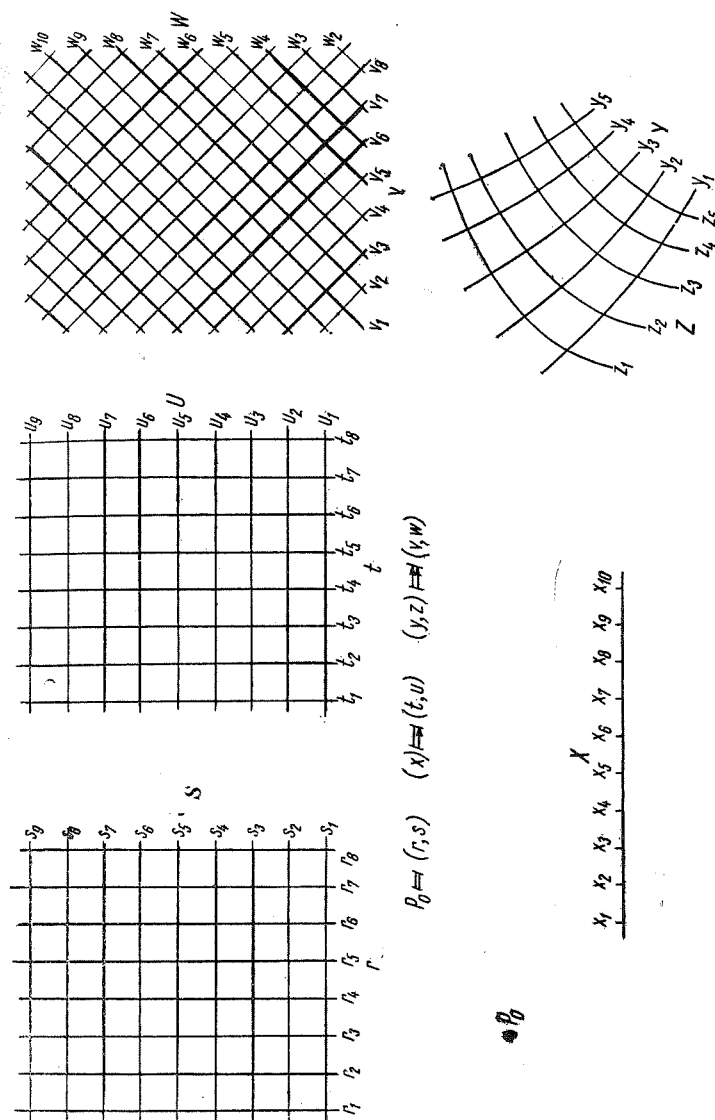


Fig. 9

unde F_e , M , h , b , x , σ_e , σ_b sînt diferite mărimi tehnice ce variază în intervale date.

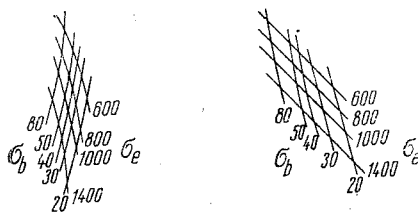
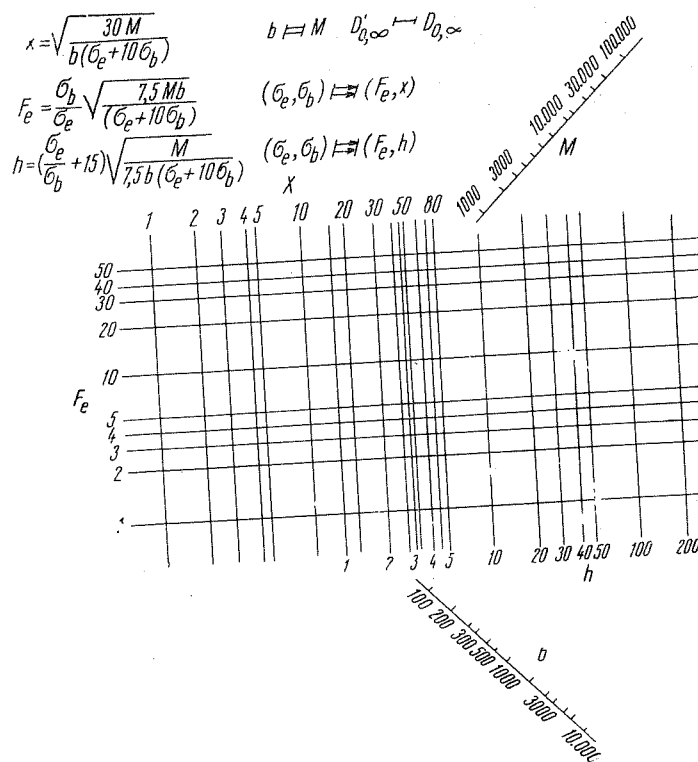


Fig. 10

Se construiește o nomogramă cu transparent fără elemente gradate, care conține în planul mobil un dreptunghi transparent pe care se trasează linii paralele și care se utilizează conform indicațiilor de la punctul 5, orientarea planului mobil fiind determinată de două puncte date din cîmpul (σ_e , σ_b). Sînt considerate date σ_e , σ_b , b , M , și se caută x , F_e , h (fig. 10).

Exemplu numeric: $\sigma_b = 50$, $\sigma_e = 1\,000$, $b = 200$, $M = 10\,000$, și cu ajutorul nomogramei, folosind metoda indicată, se găsește $x = 1$, $h = 2, 3$, $F_e = 5$.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. L. BAL și F. RADÓ, *Lecții de nomografie*, Ed. tehnică, București, 1956.
2. L. BAL, *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuații cu patru și cinci variabile*, St. cerc. mat. (Cluj), VIII, 1-2, 169-176 (1957).
3. L. BAL, *Cîteva ecuații reprezentate cu nomograme cu transparent orientat*, Buletinul Științific al Institutului Politehnic Cluj, 5 (1952).
4. C. J. BELGRANO, LOPEZ NIETO, J. M. URCELAJ, *Tratado de Nomografia*, Madrid, 1953.
5. Г. С. ХОВАНСКИЙ, *Методика построения номограмм с ориентированным транспарантом*, Вычислительная матем. и вычислительная техника, сб. 2 Изд-во АН. СССР, 1955.
6. P. LUCKEY, *Nomographie*, Leipzig, 1953.
7. W. MARGOULIS, *Les abaques à transparent orienté ou tournant*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
8. V. PLESKOT, *Nomografie*, Statni Nakladatelstvi Techncke Literatury, Praha, 1963.
9. Б. А. СИРЕНКО, *Новый способ пользования номограммами с ориентированным транспарантом*, Номографический сборник, 1, 92-101, Москва, 1962.