

ȘTEFAN BERȚI și AUREL IOANOVICIU

NECOMUTATIVITATEA TRANSFORMĂRIILOR
DE TIP PEANO

EXTRAS

din

ANALELE UNIVERSITĂȚII DIN TIMIȘOARA — SERIA ȘTIINȚE MATEMATICE-FIZICE

Vol. III, 1965

NECOMUTATIVITATEA TRANSFORMĂRILOR DE TIP PEANO

DE

ȘTEFAN BERTI și AUREL IOANOVICIU

(Institutul pedagogic Baia-Mare)

Problema pusă în culegerea lui S.M.ULAM „A collection of mathematical problems”, notată în continuare cu [1], referitoare la existența unor transformări de tip Peano în care înmulțirea și adunarea sînt comutative, adică

$$\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c)), \quad (1)$$

este rezolvată în lucrarea noastră ; astfel se arată că nu poate exista o transformare de tip Peano care să satisfacă condiția (1).

În lucrare, pe lîngă transformarea cunoscută

$$c = 2^{a-1} (2b-1) \quad (2)$$

se introduc transformările de tip Peano pentru metoda diagonală și metoda gnomonilor, metode folosite pentru demonstrarea echivalenței dintre N și N^2 (unde cu N s-a notat mulțimea numerelor naturale). Se tratează de asemenea și inversarea acestor transformări de tip Peano.

1. Transformări de tip Peano

Orice corespondență biunivocă de forma

$$p : N^2 \rightarrow N, \quad p(a, b) = c \quad (3)$$

se numește *transformare de tip Peano*. Transformările de tip Peano se obțin punînd în corespondență fiecărei perechi ordonate (a, b) de numere naturale un număr natural $p(a, b)$ astfel ca

$$(a, b) \neq (a', b') \Rightarrow p(a, b) \neq p(a', b'),$$

deci ecuația

$$p(a, b) = c$$

are o soluție bine determinată în numere naturale

$$a = q(c), \quad b = r(c), \quad (4)$$

oricare ar fi numărul natural c . Sînt evidente și următoarele proprietăți ale funcțiilor (3):

$$c \neq c' \Rightarrow (q(c), r(c)) \neq (q(c'), r(c'))$$

și

$$p(q(c), r(c)) = c.$$

Vom folosi notația

$$p(a, b), q(c), r(c)$$

respectiv

$$p, q, r$$

în cazul cînd $c = p(a, b)$ este o transformare de tip Peano cu inversarea

$$a = q(c), b = r(c).$$

Tripletul p, q, r îl vom numi *funcție de tip Peano*.

2. Exemple de funcții de tip Peano

O transformare de tip Peano cunoscută [1] este

$$c = p_1(a, b) = 2^{a-1} (2b-1). \quad (5)$$

Să definim funcția

$$n = \omega(c)$$

prin condițiile

$$\left\{ \frac{c}{2^n} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{c}{2^{n+1}} \right\} \neq 0.$$

Inversarea transformării (5) se realizează prin

$$q_1(c) = \omega(c) + 1, \quad r_1(c) = \frac{c + 2^{\omega(c)}}{2^{\omega(c)+1}}.$$

Tripletul p_1, q_1, r_1 este funcția de tip Peano corespunzătoare transformării (5).

Alte exemple de funcții de tip Peano se obțin pornind de la metodele clasice de demonstrare a echivalenței mulțimilor N și N^2 .

Astfel în cazul metodei diagonalelor corespondența dintre N^2 și N se realizează prin tablourile

1,1	1,2	1,3	1,4	...	1	2	4	7	...
2,1	2,2	2,3	2,4	...	3	5	8	12	...
3,1	3,2	3,3	3,4	...	6	9	13	18	...
4,1	4,2	4,3	4,4	...	10	14	19	25	...

Funcția de tip Peano corespunzătoare este tripletul p_2, q_2, r_2 , unde

$$p_2(a, b) = \frac{(a+b-2)(a+b-1)}{2} + a \quad (6)$$

$$q_2(c) = \frac{2c - u^2 + u}{2}, \quad r_2(c) = \frac{u^2 + u - 2c + 2}{2}, \quad (6')$$

u fiind dat de relația

$$u = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8c-7}}{2} \right\rfloor.$$

În cazul metodei gnomonilor

1,1	1,2	1,3	1,4	...	1	2	5	10	...
2,1	2,2	2,3	2,4	...	4	3	6	11	...
3,1	3,2	3,3	3,4	...	9	8	7	12	...
4,1	4,2	4,3	4,4	...	16	15	14	13	...
.	.	.	.	...	.	.	.	.	...

se obține

$$p_3(a, b) = \begin{cases} (b-1)^2 + a & \text{dacă } a \leq b \\ a^2 - b + 1 & \text{dacă } a > b \end{cases} \quad (7)$$

$$q_3(c) = \begin{cases} \sqrt{c} & \text{dacă } c = [\sqrt{c}]^2 \\ c - [\sqrt{c}]^2 & \text{dacă } [\sqrt{c}]^2 < c \leq [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \\ 1 + [\sqrt{c}] & \text{dacă } c > [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \end{cases} \quad (7')$$

$$r_3(c) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } c = [\sqrt{c}]^2 \\ 1 + [\sqrt{c}] & \text{dacă } [\sqrt{c}]^2 < c \leq [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \\ (1 + [\sqrt{c}])^2 - c + 1 & \text{dacă } c > [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1. \end{cases}$$

3. Funcții de tip Peano comutative

O funcție de tip Peano p, q, r este prin definiție *comutativă*, dacă oricare ar fi perechea de numere naturale a, b , are loc relația

$$q(a+b)r(a+b) = q(ab) + r(ab). \quad (8)$$

Definirea comutativității cu ajutorul relației (8) este echivalentă cu cea dată în lucrarea [1]. Într-adevăr, dacă $c \in N$, atunci pentru o funcție p, q, r avem

$$\sigma(c) = a + b, \quad \mu(c) = ab,$$

unde $p(a, b) = c$, $a = q(c)$ și $b = r(c)$. Transformării de tip Peano căutate în lucrarea [1] îi corespunde o funcție p, q, r care verifică relația de comutativitate

$$\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c)) \quad (9)$$

pentru orice $c \in N$. Evident că $\sigma(\mu(c)) = \sigma(ab) = q(ab) + r(ab)$ și $\mu(\sigma(c)) = \sigma(a+b) = q(a+b)r(a+b)$, deci relațiile (8) și (9) sînt echivalente.

Necomutativitatea funcției de tip Peano p_1, q_1, r_1 rezultă imediat din lucrarea [1]. Se verifică ușor și necomutativitatea funcțiilor p_2, q_2, r_2 și p_3, q_3, r_3 . Într-adevăr, pentru p_2, q_2, r_2 , avem

$$\sigma(\mu(2)) = \sigma(2) = 3, \quad \mu(\sigma(2)) = \mu(3) = 2,$$

iar pentru p_3, q_3, r_3 , avem

$$\sigma(\mu(2)) = \sigma(2) = 3, \quad \mu(\sigma(2)) = \mu(3) = 4.$$

În încheiere vom demonstra următoarea

Teorema. *Nu există funcții de tip Peano comutative.*

Demonstrație. Dacă p, q, r este o funcție de tip Peano comutativă, atunci pentru orice pereche de numere naturale a, b are loc relația (8). În acest caz

$$p(1, 1) = 1. \quad (10)$$

Într-adevăr, dacă $p(1, 1)$ ar fi egal cu un număr $\alpha > 1$, atunci, $\alpha - 1$ fiind un număr natural, putem înlocui în (8) $a = \alpha - 1$ și $b = 1$ și obținem

$$q(\alpha)r(\alpha) = q(\alpha - 1) + r(\alpha - 1) = 1 \cdot 1 = 1,$$

egalitate care nu poate avea loc deoarece $q(\alpha - 1)$ și $r(\alpha - 1)$ sînt numere naturale. Contradicția obținută ne arată că are loc (10).

Să arătăm în continuare că dacă p, q, r ar fi comutativă, atunci

$$p(1, 2) = p(2, 1) = 2. \quad (11)$$

Din condiția de biunivocitate a funcțiilor de tip Peano, rezultă că relația (11) este contradictorie. O dată stabilită relația (11), teorema este demonstrată.

Fie $p(1, 2) = \beta$ unde $\beta > 1$. $\beta - 1$ fiind un număr natural, putem înlocui în (8) $a = \beta - 1$, $b = 1$ și obținem

$$q(\beta)r(\beta) = q(\beta - 1) + r(\beta - 1) = 1 \cdot 2 = 2,$$

de unde rezultă $q(\beta - 1) = r(\beta - 1) = 1$, deci folosind (10) avem $\beta - 1 = 1$, adică

$$\beta = p(1, 2) = 2.$$

Dacă notăm $p(2, 1) = \gamma$, atunci se demonstrează exact la fel că

$$\gamma = p(2, 1) = 2.$$

Relația (11) fiind stabilită, teorema este complet demonstrată.

НЕПРЕВРАТИМОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ТИПА ПЕАНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пусть $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ и $p : N^2 \rightarrow N$ (взаимнооднозначная). Преобразование p называется преобразованием типа Пеана. Если $p(a, b) = c$, тогда обозначим $\sigma(c) = a + b$ и $\mu(c) = a \cdot b$.

С. М. Улам в «A collection of mathematical problems» ставит вопрос о существовании коммутативных преобразований типа Пеана, т. е. таких, для которых

$$\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$$

В данной работе доказывается что не существуют коммутативных преобразований типа Пеана. Далее, мы вводим преобразования типа Пеана для способа диагоналей и гномов и трактуется обращение преобразований типа Пеана.

NON COMMUTATIVITÉ DES TRANSFORMATIONS DE TYPE PEANO

(RÉSUMÉ)

Soient $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ et $p : N^2 \rightarrow N$ (biunivoque). La transformation p est dite transformation de type Peano. Si $p(a, b) = c$ on désigne $\sigma(c) = a + b$ et $\mu(c) = a \cdot b$.

S.M.ULAM dans „A collection of mathematical problems“ pose le problème d'existence des transformations de type Peano commutatives, c'est à dire tel que

$$\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c)).$$

Dans cette travail il se démontre qu'il ne peut pas exister une transformation de type Peano commutative. En outre on introduit les transformations de type Peano pour le procédé des diagonales et le procédé des gnomons et on traite l'inversion des transformations de type Peano.