

PROBLEME LEGATE DE STUDIUL ȘIRURILOR NORMALE DE CIFRE

DE

ȘTEFAN N. BERTI

Baia Mare

În șirurile normale de cifre apare problema studiului funcției

$$L(a, r, g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j \mu_S(a, r, j) - \frac{r}{g^k}$$

despre care se știe că

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(a, r, g) = 0(r).$$

În această lucrare vom evalua exact funcția L și vom stabili formule de recurență pentru unele probleme legate de șirurile normale de cifre.

§ 1. NOTĂȚII

În cele ce urmează vom folosi următoarele notații: g, k, r, n numere întregi care satisfac cerințele $g \geq 2, 1 \leq k \leq r, n \geq 0$; $\overline{0, g-1}$ mulțimea $\{0, \dots, g-1\}$ și $\overline{0, g-1}^k$ mulțimea sistemelor de forma $(a_1, \dots, a_k)$ unde $a_j \in \overline{0, g-1}^k, (j = 1, \dots, k)$.

Dacă $a, a' \in \overline{0, g-1}^k$, atunci

$$I(a, a') = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a = a', \\ 0 & \text{dacă } a \neq a'; \end{cases}$$

cu ajutorul mărimii $I(a, a')$ definim mărimea

$$t(a, b) = \sum_{j=1}^{r-k+1} I(a, b^{(j)})$$

unde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) \in \overline{0, g-1}^r$ și $\mathbf{b}^{(i)} = (b_i, \dots, b_{i+k-1})$. Astfel, $t(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ este numărul acelor sisteme din :

$$(b_1, \dots, b_k), (b_2, \dots, b_{k+1}), \dots, (b_{r-k+1}, \dots, b_r)$$

care sînt egale cu $\mathbf{a}$. Fie $S(\mathbf{a}, r, n)$ mulțimea acelor elemente $\mathbf{b} \in \overline{0, g-1}^r$ pentru care $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = n$, $S_1(\mathbf{a}, r, n)$ submulțimea lui $S(\mathbf{a}, r, n)$ formată din elementele $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$ pentru care

$$(b_{r-k+2}, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_{k-1}),$$

iar $s(\mathbf{a}, r, n)$, respectiv $s_1(\mathbf{a}, r, n)$, numărul de elemente din mulțimile $S(\mathbf{a}, r, n)$, respectiv $S_1(\mathbf{a}, r, n)$.

Dacă $S \subseteq \overline{0, g-1}^r$, atunci mulțimii S îi asociem măsura

$$\mu S = \frac{s}{g^r},$$

unde s este numărul de elemente din S .

Elementele mulțimii $\overline{0, g-1}^k$ se împart în clase după periodicitatea lor. Dacă $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \overline{0, g-1}^k$ și $a_i = a_{i+j}$, $1 \leq i < i+j \leq k$, atunci spunem că j este perioadă pentru elementul $\mathbf{a}$, iar cu $\pi(\mathbf{a})$ notăm cea mai mică perioadă a lui $\mathbf{a}$. Dacă elementul $\mathbf{a}$ nu are perioadă, atunci punem $\pi(\mathbf{a}) = 0$.

§ 2. INTRODUCERE

În lucrare stabilim expresia funcției

$$L(\mathbf{a}, r, g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j \cdot \mu S(\mathbf{a}, r, j) - \frac{r}{g^k}$$

care apare în teoria șirurilor normale de cifre. Este cunoscută formula lui Markov [4]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(\mathbf{a}, r, g)}{r} = 0.$$

Arătăm că funcția $L(\mathbf{a}, r, g)$ nu depinde de r , iar de $\mathbf{a}$ depinde numai prin intermediul lungimii lui $\mathbf{a}$, deci L depinde numai de g și de k . În acest caz formula lui Markov se poate îmbunătăți prin formula

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(\mathbf{a}, r, g)}{r^u} = 0,$$

care are loc oricare ar fi numărul pozitiv u .

Pentru stabilirea acestui rezultat, introducem funcțiile $s(\mathbf{a}, r, n)$ și $s_1(\mathbf{a}, r, n)$ și stabilim formule de recurență pentru calculul acestor funcții.

În continuare, arătăm că aceste funcții depind de $\mathbf{a}$ numai prin intermediul perioadei $\pi(\mathbf{a})$ și a lungimii lui $\mathbf{a}$.

Expresiile efective ale funcțiilor s și s_1 pentru $k = 2, 3$ sînt calculate în tabelele 1 și 2 de la sfîrșitul lucrării. Relația de recurență din teorema 1 devine cunoscuta relație

$$C_{r+1}^n = C_r^n + C_r^{n-1}.$$

§ 3. EXEMPLU NUMERIC

Din exemplul prezentat în acest paragraf reiese importanța pentru calcule a expresiilor funcțiilor s și s_1 introduse în lucrarea de față.

Dacă $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, atunci $\pi(\mathbf{a}) = 1$, deoarece $a_j = a_{j+1}$, $j = 1, 2$. Introducînd notația

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \mathbf{b}^{(1+b+b_4(g-1)+b_3(g-1)^2+b_2(g-1)^3+b_1(g-1)^4)},$$

elementele mulțimii $\overline{0, g-1}^5$ se scriu sub forma

$$(0, 0, 0, 0, 0) = \mathbf{b}^{(1)}, (0, 0, 0, 0, 1) =$$

$$= \mathbf{b}^{(2)}, \dots, (g-1, g-1, g-1, g-1, g-1) = \mathbf{b}^{(g^5)}.$$

În acest caz deducem că

$$S((0, 0, 0), 5, 3) = \{\mathbf{b}^{(1)}\} = A,$$

$$S((0, 0, 0), 5, 2) = \{\mathbf{b}^{(k)}; k \in \overline{2, g}\} \cup \{\mathbf{b}^{(mg^4+1)}; m \in \overline{1, g-1}\} = B \cup C,$$

$$S((0, 0, 0), 5, 1) = \{\mathbf{b}^{(k)}; k \in \overline{g+1, g^2}\} \cup \{\mathbf{b}^{(kg^4+mg^3+1)}; k \in \overline{0, g-1}, m \in \overline{1, g-1}\} \cup$$

$$\cup \{\mathbf{b}^{(kg^4+m+1)}; k \in \overline{1, g-1}, m \in \overline{1, g-1}\} = D \cup E \cup F.$$

Mulțimea A are un singur element, deci $s((0, 0, 0), 5, 3) = 1$. Mulțimile B, C sînt disjuncte și au cîte $g-1$ elemente, deci

$$s((0, 0, 0), 5, 2) = g-1 + g-1 = 2g-2.$$

Mulțimile D, E, F sînt disjuncte cîte două și au $g^2 - g, g(g-1)$ respectiv $(g-1)^2$ elemente, deci

$$s((0, 0, 0), 5, 1) = g^2 - g + g^2 - g + g^2 - 2g + 1 = 3g^2 - 4g + 1.$$

Mulțimile $S((0, 0, 0), 5, j)$, $j \in \overline{0, 3}$, sînt disjuncte două cîte două și reuniunea lor este $\overline{0, g-1}^5$, deci

$$s((0, 0, 0), 5, 0) = g^5 - 3g^2 - 4g + 1 + 2g - 2 + 1 = g^5 - 3g^2 - 2g.$$

Astfel, am aflat expresiile funcțiilor $s(a, 5, j)$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, pentru $\pi(a) = 1$, care sînt prezentate în tabelul 2. În acest caz vom avea

$$L((0, 0, 0), 5, g) = 1 \cdot \frac{s((0, 0, 0), 5, 1)}{g^5} + 2 \cdot \frac{s((0, 0, 0), 5, 2)}{g^5} + 3 \cdot \frac{s((0, 0, 0), 5, 3)}{g^5} - \frac{5}{g^3} = \frac{3g^2 - 4g + 1 + 4g - 4 + 3 - 5g^2}{g^5} = -\frac{2g^2}{g^5} = -\frac{2}{g^3}.$$

Calculule asemănătoare cu cele de sus ne arată că dacă $\pi(a) = 0$, de exemplu, pentru $a = (0, 1, 1)$ sau $a = (0, 1, 2)$, obținem

$$s(a, 5, 0) = g^5 - 3g^2, \quad s(a, 5, 1) = 3g^2, \quad s(a, 5, 2) = s(a, 5, 3) = 0$$

în care caz

$$L(a, 5, g) = \frac{3g^2 - 5g^2}{g^5} = -\frac{2}{g^3}.$$

Dacă $\pi(a) = 2$, de exemplu, pentru $a = (0, 1, 0)$ deducem

$$s(a, 5, 0) = g^5 - 3g^2 + 1, \quad s(a, 5, 1) = 3g^2 - 2, \quad s(a, 5, 2) = 1, \quad s(a, 5, 3) = 0,$$

deci în acest caz

$$L(a, 5, g) = \frac{3g^2 - 5g^2}{g^5} = -\frac{2}{g^3}.$$

Din acest exemplu numeric observăm că în cazul studiat în acest paragraf, $L(a, r, g)$ nu depinde decît de lungimea lui a și de g .

§ 4. ȘIRURI NORMALE DE CIFRE

É. Borel [1], punînd problema modelării caracterului de neregularitate totală a șirului de variabile aleatoare, problemă legată de schema bilei reîntoarse, introduce noțiunea de șir simplu normal de cifre; astfel, un șir de cifre

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

este simplu normal, dacă frecvența de apariție a unei cifre oarecare tinde spre o valoare constantă care nu depinde de cifra aleasă, valoare care este egală cu inversul numărului cifrelor considerate. Limita acestei frecvențe,

în cazul bazei de numerație g , va fi $\frac{1}{g}$.

Astfel, numărul $\frac{3}{5}$ în baza 2 are reprezentarea 0, (1001) iar șirul de cifre corespunzător

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = 1, \dots$$

este simplu normal, deoarece

$$A_n(0) = \sum_{j=1}^n \delta_{0, a_j} = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{dacă } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{n}{2} & \text{dacă } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

și

$$A_n(1) = \sum_{j=1}^n \delta_{1, a_j} = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{dacă } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{n-1}{2} & \text{dacă } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{n}{2} & \text{dacă } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{n-1}{2} & \text{dacă } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Rezultă, prin urmare,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(1) = \frac{1}{2}.$$

D. G. Champernowne [2] introduce noțiunea mai complexă de șir normal de cifre. Dacă se asociază șirului (1) șirul de puncte din spațiul aritmetic k -dimensional

$$(2) \quad (a_1, \dots, a_k), (a_2, \dots, a_{k+1}), (a_3, \dots, a_{k+2}), \dots$$

numit k -întinderea lui (1), atunci se vor numi „cifre” cele g^k puncte din spațiul aritmetic k -dimensional, avînd coordonatele $0, 1, \dots, g-1$. Dacă pentru orice număr natural k , k -întinderea (2) a șirului (1) este un șir

simplu-normal, atunci șirul (1) se numește șir normal. Tot D. G. Champernowne dă primul exemplu de șir normal de cifre :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, ..., 9, 9, 1, 0, 0, 1, 0, 1, ...

format din cifrele numerelor scrise în baza 10, în ordine crescătoare.

Șirurile normale de cifre au aplicații la metoda Monte-Carlo, cu ajutorul acestora obținându-se numere cvasialeatoare, numere care modelează numerele aleatoare. O. Onicescu [3] le consideră ca fiind numere fără caracter aleator care au proprietatea de neregularitate. Generarea numerelor cvasialeatoare, cu ajutorul calculatoarelor electronice, se poate efectua mult mai simplu decât generarea numerelor aleatoare.

§ 5. FORMULE DE RECURENȚĂ

LEMA 1. Dacă $a \in \overline{0, g-1}^k$ și $g \geq 2$, $r \geq k$ sînt numere întregi, atunci

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{r-k+1} s(a, r, n) = g^r$$

și

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{r-k+1} s_1(a, r, n) = g^{r-k+1}.$$

Demonstrație. Din descompunerile în mulțimi disjuncte două câte două

$$\overline{0, g-1}^r = \bigcup_{n=0}^{r-k+1} S(a, r, n), \quad \overline{0, g-1}^{r-k+1} = \bigcup_{n=0}^{r-k+1} S_1(a, r, n)$$

și din faptul că $\overline{0, g-1}^r$, $\overline{0, g-1}^{r-k+1}$ sînt mulțimi cu g^r , respectiv, g^{r-k+1} elemente, rezultă relațiile (3) și (4).

LEMA 2. Dacă $x = (x_1, \dots, x_r) \in \overline{0, g-1}^r$ și $y \in \overline{0, g-1}$, atunci din apartenența $x \in S_1(a, r, n)$ rezultă că

$$xy = (x_1, \dots, x_r, y) \in \begin{cases} S(a, r+1, n) & \text{dacă } y \neq a_k \text{ (în } g-1 \text{ cazuri),} \\ S(a, r+1, n+1) & \text{dacă } y = a_k \text{ (într-un singur caz).} \end{cases}$$

Demonstrație. Dacă $x = (x_1, \dots, x_r) \in S_1(a, r, n)$, atunci

$$(x_{r-k+2}, x_{r-k+3}, \dots, x_r) = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$$

și $x \in S(a, r, n)$. Atunci $(x_{r-k+2}, x_{r-k+3}, \dots, x_r, y) = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, y) = a$, dacă și numai dacă $y = a_k$, deci în acest caz $xy \in S(a, r+1, n+1)$. În celelalte cazuri, cînd $y \neq a_k$, avem $xy \in S(a, r+1, n)$.

LEMA 3. Dacă $x = (x_1, \dots, x_r) \in S(a, r, n) - S_1(a, r, n)$, atunci pentru orice $y \in \overline{0, g-1}$ are loc apartenența $xy \in S(a, r+1, n)$.

Demonstrație. Din $x \in S(a, r, n) - S_1(a, r, n)$ rezultă că $x \notin S_1(a, r, n)$, deci xy nu poate conține mai multe succesiuni a decât x , adică

$$xy \in S(a, r+1, n).$$

TEOREMA 1. Dacă $a \in \overline{0, g-1}^k$, $0 \leq n \leq r-k+1$, atunci

$$(5) \quad s(a, r+1, n) = g \cdot s(a, r, n) + s_1(a, r, n-1) - s_1(a, r, n).$$

Demonstrație. Folosind lemele 2 și 3, apartenența

$$xy \in S(a, r+1, n)$$

are loc în următoarele cazuri :

- a) $x \in S_1(a, r, n)$ și $y \neq a_k$ (în $(g-1) s_1(a, r, n)$ cazuri),
- b) $x \in S_1(a, r, n-1)$ și $y = a_k$ (în $s_1(a, r, n-1)$ cazuri),
- c) $x \in S(a, r, n) - S_1(a, r, n)$ (în $gs(a, r, n) - gs_1(a, r, n)$ cazuri).

Deci

$$s(a, r+1, n) = (g-1) s_1(a, r, n) + s_1(a, r, n-1) + gs(a, r, n) - gs_1(a, r, n) = gs(a, r, n) + s_1(a, r, n-1) - s_1(a, r, n).$$

LEMA 4. Are loc relația

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r+1, n) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r, n) + \sum_{n=0}^r s_1(a, r, n).$$

Demonstrație. Înmulțind cei doi membri ai relației (5) cu n și însumînd, avem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r+1, n) &= g \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r, n) + \sum_{n=1}^{r+1} ns_1(a, r, n-1) - \\ &- \sum_{n=1}^{r+1} ns_1(a, r, n) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r, n) + \sum_{n=0}^r (n+1)s_1(a, r, n) - ns_1(a, r, n) - \\ &- (r+1)s_1(a, r, r+1) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r, n) + \sum_{n=0}^r s_1(a, r, n). \end{aligned}$$

LEMA 5. Dacă $a \in \overline{0, g-1}^k$, atunci

$$(7) \quad s(a, k, n) = \begin{cases} g^k - 1 & \text{dacă } n = 0, \\ 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 0 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Demonstrație. Din faptul că mulțimea

$$S(a, k, 1) = \{(b_1, \dots, b_k); t(a, (b_1, \dots, b_k)) = 1\} = \{(a_1, \dots, a_k)\}$$

are un singur element, iar pentru $n > 1$

$$s(a, k, n) = 0,$$

din lema 1 rezultă afirmația dorită.

TEOREMA 2. Dacă $a \in \overline{0, g-1}^k$, atunci are loc relația

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{r-k+1} ns(a, r, n) = (r-k+1)g^{r-k}.$$

Demonstrație. Relația (8) are sens pentru $r \geq k$, deoarece peste tot se presupune că $a \in \overline{0, g-1}^k$. Astfel, pentru $r = k$ din relația (7) obținem

$$\sum_{n=1}^k ns(a, k, n) = s(a, k, 1) = 1 = (k-k+1)g^{k-k},$$

deci pentru $r = k$ relația (8) are loc. Aplicând metoda inducției și presupunând că relația (8) are loc pentru r , din relația (6) deducem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r+1, n) &= g \sum_{n=1}^r ns(a, r, n) + \sum_{n=0}^r s_1(a, r, n) = g(r-k+1)g^{r-k} + \\ &+ \sum_{n=0}^r s_1(a, r, n) = (r-k+1)g^{r-k+1} + \sum_{n=0}^r s_1(a, r, n). \end{aligned}$$

Folosind acum relația (4), obținem

$$\sum_{n=1}^{r+1} ns(a, r+1, n) = (r-k+1)g^{r-k+1} + g^{r-k+1} = (r+1-k+1)g^{r+1-k},$$

deci relația (8) are loc pentru $r+1$ și astfel teorema este demonstrată.

§ 6. ÎMBUNĂTĂȚIREA FORMULEI LUI A. A. MARKOV

TEOREMA 3. Dacă $a \in \overline{0, g-1}^k$, $r \geq k$, $g \geq 2$, atunci

$$(9) \quad L(a, r, g) = -\frac{k-1}{g^k}.$$

Demonstrație. Folosind definițiile date în paragraful 1 și 2, avem

$$\mu S(a, r, j) = \frac{s(a, r, j)}{g^r}$$

și

$$L(a, r, g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j\mu S(a, r, j) - \frac{r}{g^k} = \frac{1}{g^r} \sum_{j=1}^{r-k+1} js(a, r, j) - \frac{r}{g^k}.$$

Din teorema (2) rezultă că are loc relația

$$L(a, r, g) = \frac{1}{g^r} \cdot (r-k+1)g^{r-k} - \frac{r}{g^k} = -\frac{k-1}{g^k}.$$

§ 7. FORMULE SPECIALE DE RECURENȚĂ PENTRU FUNCȚIA s_1 ÎN CAZUL DIFERITELOR PERIOADE ALE LUI a

În funcție de periodicitatea elementelor din $\overline{0, g-1}^k$, aceste elemente au funcțiile s și s_1 diferite, după cum s-a văzut și în § 3. În afară de formula de recurență (5), au loc și alte formule de recurență care depind de perioada lui a .

Se pot stabili următoarele două leme:

LEMA 6. Dacă $\pi(a) = 1$, atunci pentru $r \geq 2k$ avem formula

$$(10) \quad s_1(a, r, n) = (g-1)s(a, r-k, n) + s_1(a, r-1, n-1).$$

LEMA 7. Pentru $\pi(a) = 0$, deci în cazul în care elementul a nu are perioadă, are loc relația de recurență:

$$(11) \quad s_1(a, r, n) = s(a, r-k, n).$$

Demonstrațiile lemelor 6 și 7 se deduc imediat folosind rezultatele de mai sus.

§ 8. FUNCȚIILE s ȘI s_1 ÎN CAZUL $k = 1$

În acest caz, funcțiile s și s_1 sînt identice, deoarece condiția ca ultimele $k-1 = 0$ cifre din b să fie identice cu primele $k-1 = 0$ cifre din a , este satisfăcută. Atunci formula (5) devine formula de recurență

$$(12) \quad s(a, r+1, n) = (g-1)s(a, r, n) + s(a, r, n-1).$$

Din relația (12) obținem pentru s formula

$$(13) \quad s(a, r, n) = C_r^n (g-1)^{r-n}.$$

Așadar, formula de recurență (12) și formula (13) ne conduc la relația clasică

$$(14) \quad C_{r+1}^n = C_r^n + C_r^{n-1}.$$

§ 9. TABELE PENTRU FUNCȚIILE s ȘI s_1 PENTRU CAZURILE $k = 2, 3$

Cazul $k = 2$. Elementele pot avea fie perioada 1, cum este cazul elementului $a = (0, 0)$, fie perioada 0, cum este cazul elementului $a = (0, 1)$. Folosind formulele de recurență stabilite, se pot calcula expresiile funcțiilor s și s_1 pentru aceste cazuri. În tabelul 1 sînt prezentate pentru $r = 1, 2, \dots, 6$ funcțiile $s(a, r, n)$ și pentru $r = 1, 2, \dots, 5$ funcțiile $s_1(a, r, n)$ în cazul $k = 2$.

Cazul $k = 3$. Perioadele posibile pentru elementele din $\overline{0, g-1}^3$ după cum s-a arătat în § 3 sînt 0, 1 și 2. În tabelul 2 se dau expresiile funcțiilor s și s_1 pentru $r = 3, 4, \dots, 9$.

Dacă k este arbitrar, sîntem conduși la cercetarea unui număr de $k-1$ formule de recurență pentru funcțiile s și s_1 , deoarece în acest caz există $k-1$ perioade posibile în $\overline{0, g-1}^k$.

Primită la redacție la 24 aprilie 1965

Institutul Pedagogic Baia Mare

Tabelul I
Expresiile funcțiilor s și s_1 pentru $k=2$

$\pi(a)$	r	n	$s(a, r, n)$	$s_1(a, r, n)$
0 1	2 2	0 0	g^2 g^2	-1 -1
0 1	2 2	1 1	1 1	1
0 1	3 3	0 0	g^3 g^3	$-2g$ $-2g+1$
0 1	3 3	1 1	$2g$ $2g-2$	1 $g-1$
0 1	3 3	2 2	1	1
0 1	4 4	0 0	g^4 g^4	$-3g^2$ $-3g^2+2g$
0 1	4 4	1 1	$3g^2$ $3g^2-4g+1$	-2 $2g$
0 1	4 4	2 2	1 $2g-2$	1 $g-1$
0 1	4 4	3 3	1	1
0 1	5 5	0 0	g^5 g^5	$-4g^3$ $-4g^3+3g^2$
0 1	5 5	1 1	$4g^3$ $4g^3-6g^2$	$-6g$ $+2$
0 1	5 5	2 2	$3g$ $3g^2-3g$	1 g^2+g-2
0 1	5 5	3 3	$2g-2$	$g-1$
0 1	5 5	4 4	1	1
0 1	6 6	0 0	g^6 g^6	$-5g^4$ $-5g^4+4g^3+3g^2-4g+1$
0 1	6 6	1 1	$5g^4$ $5g^4-8g^3-3g^2+10g-4$	$-12g^2$ $+3$
0 1	6 6	2 2	$6g^2$ $4g^3-3g^2-6g+5$	-3 $+5$
0 1	6 6	3 3	1 $3g^2-2g-1$	1
0 1	6 6	4 4	$2g-2$	1
0 1	6 6	5 5	1	1

Tabelul II
Expresiile funcțiilor s și s_1 pentru $k=3$

(a)	r	n	$s(a, r, n)$	$s_1(a, r, n)$
0 1 2	3 3 3	0 0 0	g^3 g^3 g^3	-1 -1 -1
0 1 2	3 3 3	1 1 1	1 1 1	1
0 1 2	4 4 4	0 0 0	g^4 g^4 g^4	$-2g$ $-2g+1$ $-2g$
0 1 2	4 4 4	1 1 1	$2g$ $2g-2$ $2g$	$g-1$ 1
0 1 2	4 4 4	2 2 2	1	1
0 1 2	5 5 5	0 0 0	g^5 g^5 g^5	$-3g^2$ $-3g^2+2g$ $-3g^2+1$
0 1 2	5 5 5	1 1 1	$3g^2$ $3g^2-4g+1$ $3g^2-2$	g^3-g^2 $-g-1$ g^2-g
0 1 2	5 5 5	2 2 2	$2g-2$ 1	$g-1$
0 1 2	5 5 5	3 3 3	1	1
0 1 2	6 6 6	0 0 0	g^6 g^6 g^6	$-4g^3$ $-4g^3+3g^2$ $-4g^3+2g+1$
0 1 2	6 6 6	1 1 1	$4g^3$ $4g^3-6g^2+2g$ $4g^3-4g-2$	-2 $2g$ g^3-g^2+g-1
0 1 2	6 6 6	2 2 2	$3g^2$ $3g^2-4g+1$ $2g+1$	g^2-g 1
0 1 2	6 6 6	3 3 3	$2g-2$	$g-1$
0 1 2	6 6 6	4 4 4	1	1
0 1 2	7 7 7	0 0 0	g^7 g^7 g^7	$-5g^4$ $-5g^4+4g^3$ $-5g^4+3g^2+3g-1$
				g^5 g^5-g^4 $g^5-g^3-3g^2+g+2$

Tabelul II (continuare)

(a)	r	n	s (a, r, n)	s ₁ (a, r, n)
0	7	1	$5g^4 - 8g^3 + 3g^2 - 6g$	$g^4 - g^3 + 2g^2 - 5g + 3$
1	7	1	$5g^4 - 8g^3 + 3g^2 - 2g + 2$	$g^4 - g^3 + 2g^2 - 5g + 3$
2	7	1	$5g^4 - 6g^2 - 6g + 3$	$g^4 - g^3 + 2g^2 - 5g + 3$
0	7	2	$4g^3 - 6g^2 + 3g - 1$	$g^3 - g^2 + 2g - 1$
1	7	2	$4g^3 - 6g^2 + 3g - 1$	$g^3 - g^2 + 2g - 1$
2	7	2	$3g^2 + 3g - 3$	$g^3 - g^2 + 2g - 1$
0	7	3	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
1	7	3	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	7	3	1	$g^2 - g$
0	7	4	$2g - 2$	$g - 1$
1	7	4	$2g - 2$	$g - 1$
2	7	4	$2g - 2$	$g - 1$
0	7	5	1	1
1	7	5	1	1
2	7	5	1	1
0	8	0	$g^5 - 6g^5 + 5g^4 + 6g^2$	$g^6 - g^5 - 4g^3 + 5g^2 - 2g$
1	8	0	$g^5 - 6g^5 + 5g^4 + 3g^2 - 4g + 1$	$g^6 - g^5 - 4g^3 + 5g^2 - 2g$
2	8	0	$g^5 - 6g^5 + 5g^4 + 4g^3 + 6g^2 - 2g - 2$	$g^6 - g^5 - 4g^3 + 5g^2 - 2g$
0	8	1	$6g^5 - 10g^4 + 4g^3 - 12g^2 + 10g - 4$	$g^5 - g^4 + 3g^3 - 9g^2 + 8g - 2$
1	8	1	$6g^5 - 10g^4 + 4g^3 - 12g^2 + 10g - 4$	$g^5 - g^4 + 3g^3 - 9g^2 + 8g - 2$
2	8	1	$6g^5 - 8g^3 - 12g^2 + 6g + 6$	$g^5 - g^4 + 3g^3 - 9g^2 + 8g - 2$
0	8	2	$5g^4 - 8g^3 + 6g^2 - 8g + 5$	$g^4 - g^3 + 4g^2 - 9g + 5$
1	8	2	$4g^3 + 6g^2 - 6g - 6$	$g^4 - g^3 + 4g^2 - 9g + 5$
2	8	2	$4g^3 + 6g^2 - 6g - 6$	$g^4 - g^3 + 4g^2 - 9g + 5$
0	8	3	$4g^3 - 6g^2 + 4g - 2$	$g^3 - g^2 + 3g - 3$
1	8	3	$4g^3 - 6g^2 + 4g - 2$	$g^3 - g^2 + 3g - 3$
2	8	3	$2g + 2$	$g^3 - g^2 + 3g - 3$
0	8	4	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
1	8	4	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	8	4	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
0	8	5	$2g - 2$	$g - 1$
1	8	5	$2g - 2$	$g - 1$
2	8	5	$2g - 2$	$g - 1$
0	8	6	1	1
1	8	6	1	1
2	8	6	1	1
0	9	0	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 10g^3 - 2g^2 + 3g - 2$	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 10g^3 - 2g^2 + 3g - 2$
1	9	0	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 10g^3 - 2g^2 + 3g - 2$	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 10g^3 - 2g^2 + 3g - 2$
2	9	0	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 5g^4 + 10g^3 - 3g^2 - 6g$	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 5g^4 + 10g^3 - 3g^2 - 6g$
0	9	1	$7g^6 - 12g^5 + 5g^4 - 12g^3 + 24g^2 - 14g + 2$	$7g^6 - 12g^5 + 5g^4 - 12g^3 + 24g^2 - 14g + 2$
1	9	1	$7g^6 - 12g^5 + 5g^4 - 12g^3 + 24g^2 - 14g + 2$	$7g^6 - 12g^5 + 5g^4 - 12g^3 + 24g^2 - 14g + 2$
2	9	1	$7g^6 - 10g^4 - 20g^3 + 9g^2 + 18g - 1$	$7g^6 - 10g^4 - 20g^3 + 9g^2 + 18g - 1$
0	9	2	$10g^3 - 21g^2 + 22g - 7$	$10g^3 - 21g^2 + 22g - 7$
1	9	2	$10g^3 - 21g^2 + 22g - 7$	$10g^3 - 21g^2 + 22g - 7$
2	9	2	$5g^4 + 10g^3 - 9g^2 - 18g + 3$	$5g^4 + 10g^3 - 9g^2 - 18g + 3$
0	9	3	$5g^4 - 8g^3 + 9g^2 - 14g + 8$	$5g^4 - 8g^3 + 9g^2 - 14g + 8$
1	9	3	$5g^4 - 8g^3 + 9g^2 - 14g + 8$	$5g^4 - 8g^3 + 9g^2 - 14g + 8$
2	9	3	$3g^2 + 6g - 3$	$3g^2 + 6g - 3$

Tabelul II (continuare)

(a)	r	n	s (a, r, n)	s ₁ (a, r, n)
0	9	4	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$
1	9	4	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$
2	9	4	1	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$
0	9	5	$3g^2 - 4g + 1$	$3g^2 - 4g + 1$
1	9	5	$3g^2 - 4g + 1$	$3g^2 - 4g + 1$
2	9	5	$3g^2 - 4g + 1$	$3g^2 - 4g + 1$
0	9	6	$2g - 2$	$2g - 2$
1	9	6	$2g - 2$	$2g - 2$
2	9	6	$2g - 2$	$2g - 2$
0	9	7	1	1
1	9	7	1	1
2	9	7	1	1

BIBLIOGRAFIE

1. É. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1914.
2. D. G. CHAMPEREREROWNE, *The construction of decimals normal in the scale of ten*. L. London math. Soc., 8, 254-260 (1933).
3. O. ONICESCU, *Nombres et systèmes aleatoires*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1964.
4. А. Г. ПОСТНИКОВ, *Арифметическое моделирование случайных процессов*. Труды мат. института им. В. А. Стеклова, 57 (1960).