

GENERALIZAREA UNEI FORMULE DE CVADRATURĂ A LUI N. OBRESCHKOFF LA INTEGRALE DUBLE ¹⁾

DE

D. V. IONESCU
(Cluj)

Vom numi *formule de cubatură de tip N. Obreschkoff* cu gradul de exactitate 3 formulele de forma

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \iint_D f dx dy = & a_{11}f(x_1, y_1) + a_{12}f(x_1, y_2) + a_{21}f(x_2, y_1) + a_{22}f(x_2, y_2) + \\
 & + b_{11} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + b_{12} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) + b_{21} \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) + b_{22} \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \\
 & + b'_{11} \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) + b'_{12} \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) + b'_{21} \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) + b'_{22} \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \\
 & + c_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) + c_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_2) + c_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + c_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + \\
 & + c'_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) + c'_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + c'_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \\
 & + c'_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \\
 & + c''_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) + c''_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) + c''_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_1) + c''_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) + R,
 \end{aligned}$$

¹⁾ Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11—12 decembrie 1964.

unde D este dreptunghiul cu vîrfurile de coordonate (x_i, y_k) , $i, k = 1, 2$ iar constantele $a_{ik}, b_{ik}, b'_{ik}, c_{ik}, c'_{ik}, c''_{ik}$ se aleg astfel ca restul R să fie nul cînd f este un polinom oarecare de variabilele x și y de gradul al treilea, dar să fie diferit de zero, cel puțin pentru un polinom de gradul al patrulea.

Într-o lucrare precedentă [1], am stabilit formule de tipul 1, cu două noduri, vîrfurile opuse $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ale dreptunghiului D și am determinat restul acestor formule sub formă de integrală dublă, presupunînd că funcția f este continuă pe dreptunghiul D ,

$$(2) \quad D: x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$$

împreună cu derivatele ei parțiale în raport cu x și y , de ordinele 1, 2, 3, 4.

În această lucrare vom pune în evidență anumite formule de tipul 1, cu trei noduri $(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ și vom pune restul lor tot sub formă de integrală dublă, făcînd asupra funcției f aceleași ipoteze.

§ 1. PRELIMINARI

1. Vom ajunge la formule de forma (1), procedînd ca în lucrarea [1]. Se consideră sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$(3) \quad \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} = \alpha_1, \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x \partial y^3} = \alpha_1,$$

în care α_1 și α_2 sînt doi parametri, și-l vom integra cu condițiile la limită:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ și } x = x_2 \\ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ și } x = x_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^3} = 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ și } x = x_2$$

și

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} &= 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ și } y = y_2 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ și } y = y_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial y^3} = 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ și } y = y_2$$

unde

$$(6) \quad \varphi_0(x, y) = \frac{1}{24} (x - x_1)^3 (x - x_2)$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{24} (y - y_1)^3 (y - y_2)$$

sau

$$(7) \quad \varphi_0(x, y) = \frac{1}{24} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{24} (y - y_1)^2 (y - y_2)^2.$$

Constantele α_1 și α_2 se aleg astfel ca rezolvarea acestei probleme la limită să fie posibilă.

Dacă $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y)$ este o soluție a sistemului (3) cu condițiile (4), (5) și (6) sau cu condițiile (4), (5) și (7), se obține formula de cubatură

$$(8) \quad \begin{aligned} \iint_D f dx dy &= -A_0^2(x_2, y_2) f(x_2, y_2) - A_0^2(x_1, y_2) f(x_1, y_2) - \\ &\quad - A_0^2(x_2, y_1) f(x_2, y_1) - A_0^2(x_1, y_1) f(x_1, y_1) + \\ &\quad + A_1^1(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + A_1^1(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \\ &\quad - A_1^1(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - A_1^1(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) - \\ &\quad - A_1^1(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) - A_1^1(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) + \\ &\quad + A_1^1(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + A_1^1(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) - \\ &\quad - A_0^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) - A_1^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \\ &\quad - A_2^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) + A_0^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_2) + \\ &\quad + A_1^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + A_2^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_0^0(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + A_1^0(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \\
& + A_2^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_1) - A_0^0(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) - \\
& - A_1^0(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) - A_2^0(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) + R,
\end{aligned}$$

unde restul R este dat de formula

$$\begin{aligned}
(9) \quad R = \iint_D \left(\varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \right. \\
\left. + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) dx dy
\end{aligned}$$

iar

$$(10) \quad A_0^0(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad A_1^0(x, y) = \varphi_2(x, y), \quad A_2^0(x, y) = \varphi_3(x, y)$$

$$(11) \quad A_0^1(x, y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad A_1^1(x, y) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}$$

$$(12) \quad A_0^2(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2}.$$

Deoarece în lucrarea [1] am dat metoda de integrare a sistemului (3) cu condițiile (4), (5) și (6) sau (4), (5) și (7), în această lucrare dăm numai rezultatele obținute.

Într-o lucrare ulterioară, vom relua formulele de tip Obreschkoff, cu gradul de exactitate 4.

§ 2. PRIMA FORMULĂ DE TIP OBRESCHKOFF

2. O soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3) cu condițiile la limită (4), (5) și (6) este

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= \frac{\alpha_1}{6} (x - x_1)^3 (y - y_1) - \frac{\alpha_1}{12} (y_2 - y_1) (x - x_1)^3 - \\
&\quad - \frac{1 + 4\alpha_1}{24} (x_2 - x_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \\
\varphi_2(x, y) &= \frac{\alpha_2}{4} (x - x_1)^2 (y - y_1)^2 - \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)}{8} (y_2 - y_1) (x -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13) \quad & - x_1)^2 (y - y_1) - \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)}{8} (x_2 - x_1) (x - x_1) (y - y_1)^2 + \\
& \frac{1 + 4\alpha_1}{48} (y_2 - y_1)^2 (x - x_2)^2 + \frac{1 + 4\alpha_1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2, \\
\varphi_3(x, y) &= \frac{\alpha_1}{6} (x - x_1) (y - y_1)^3 - \frac{\alpha_1}{12} (x_2 - x_1) (y - y_1)^3 - \\
& \quad - \frac{1 + 4\alpha_1}{24} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1) (y - y_1),
\end{aligned}$$

parametrii α_1 și α_2 fiind astfel încât

$$(14) \quad 1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Aplicînd formula (8) și exprimînd parametrul α_2 cu ajutorul lui α_1 din relația (14), sîntem conduși la formula de cubatură:

$$\begin{aligned}
\iint_D f dx dy &= \frac{1 + 2\alpha_1}{24} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + \right. \\
&\quad \left. + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) \right] - \frac{\alpha_1}{12} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - \right. \\
&\quad \left. - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) \right] + \frac{1 + 4\alpha_1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - \\
&\quad \left. - y_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \right] - \\
(15) \quad & - \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) \right] - \\
& - \frac{1}{8} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) \right] + \\
& + \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) [2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + R,
\end{aligned}$$

unde restul R este dat de formula (9), cu funcțiile (6) și (13). Formula (15) este de forma

$$A + \alpha_1 B = 0$$

și ea trebuind să fie valabilă oricare ar fi parametrul α_1 , conduce la formulele

$$(16) \quad A = 0,$$

$$(17) \quad B = 0.$$

Formula (16) este formula de cubatură :

$$\begin{aligned}
 \iint_D f dx dy &= \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) [2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] - \\
 (18) \quad & - \frac{1}{8} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y_1) \right] - \\
 & - \frac{1}{8} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y} (x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y} (x_1, y_2) \right] + \\
 & + \frac{1}{24} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_2, y_2) \right] + \\
 & + \frac{1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_1, y_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_1) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_2) \right] + R
 \end{aligned}$$

în care

$$(19) \quad R = \iint_D \left(\varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) dx dy$$

cu

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x, y) &= \frac{1}{24} (x - x_1)^3 (x - x_2), \\
 \varphi_1(x, y) &= -\frac{1}{24} (x_2 - x_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \\
 (20) \quad \varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{4} (x - x_1)^2 (y - y_1)^2 + \frac{1}{8} (y_2 - y_1) (x - x_1)^2 (y - y_1) + \\
 & + \frac{1}{8} (x_2 - x_1) (x - x_1) (y - y_1)^2 + \frac{1}{48} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1)^2 + \\
 & + \frac{1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2, \\
 \varphi_3(x, y) &= -\frac{1}{24} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \\
 \varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24} (y - y_1)^3 (y - y_2).
 \end{aligned}$$

3. Formula (17) este

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \frac{1}{12} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_2, y_1) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_1, y_2) \right] - \\
 & - \frac{1}{12} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_2, y_2) \right] - \\
 & - \frac{1}{12} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_1, y_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_1) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_2) \right] = R_1,
 \end{aligned}$$

unde

$$(22) \quad R_1 = \iint_D \left(\varphi_1^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3^* \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right) dx dy$$

în care

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^*(x, y) &= \frac{1}{6} (x - x_1)^3 (y - y_1) - \frac{1}{12} (y_2 - y_1) (x - x_1)^3 - \\
 & - \frac{1}{6} (x_2 - x_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \\
 (23) \quad \varphi_2^*(x, y) &= -\frac{1}{2} (x - x_1)^2 (y - y_1)^2 + \frac{1}{4} (y_2 - y_1) (x - x_1)^2 (y - y_1) + \\
 & + \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (x - x_1) (y - y_1)^2 + \frac{1}{12} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1)^2 + \\
 & + \frac{1}{12} (x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2, \\
 \varphi_3^*(x, y) &= \frac{1}{6} (x - x_1) (y - y_1)^3 - \frac{1}{12} (x_2 - x_1) (y - y_1)^3 - \\
 & - \frac{1}{6} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1) (y - y_1).
 \end{aligned}$$

Formula (21) este deosebit de interesantă și va fi studiată amănunțit într-o lucrare ulterioară.

4. Se pot obține diferite formule de cubatură, făcând combinații liniare între formulele (18) și (21).

De exemplu, dacă între formulele (18) și (21) se elimină termenul

$$(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)$$

se obține formula de cubatură

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) [2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] - \\ (24) \quad & - \frac{1}{8} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) \right] - \\ & - \frac{1}{8} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) \right] + \\ & + \frac{1}{24} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) \left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + \right. \\ & \left. + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) \right] - \frac{1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \right] + R \end{aligned}$$

în care

$$(25) \quad R = \iint_D \left(\varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \right. \\ \left. + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) dx dy,$$

unde

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{24} (x - x_1)^3 (x - x_2),$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= -\frac{1}{12} (x - x_1)^3 (y - y_1) + \frac{1}{24} (y_2 - y_1) (x - x_1)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} (x_2 - x_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \end{aligned}$$

$$(26) \quad \varphi_2(x, y) = -\frac{1}{48} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1)^2 - \frac{1}{48} (x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y) &= -\frac{1}{12} (x - x_1) (y - y_1)^3 + \frac{1}{24} (x_2 - x_1) (y - y_1)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} (y_2 - y_1)^2 (x - x_1) (y - y_1), \end{aligned}$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{24} (y - y_1)^3 (y - y_2).$$

Formula (24) se poate deduce din formula (15), în care se exprimă parametrul α_1 cu ajutorul parametrului α_2 din relația (14) și apoi se face $\alpha_2 = 0$.

§ 3 A DOUA FORMULĂ DE TIP OBRESCHKOFF

5. O soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3) cu condițiile (4), (5) și (7) este

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{\alpha_1}{12} [2(x - x_1)^3 (y - y_1) - 2(x_2 - x_1)^2 (x - x_1) (y - \\ &- y_1) - (y_2 - y_1) (x - x_1)^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (27) \quad \varphi_2(x, y) &= \frac{\alpha_2}{4} (x - x_1)^2 (y - y_1)^2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} (y_2 - y_1) (x - x_1)^2 (y - \\ &- y_1) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} (x_2 - x_1) (x - x_1) (y - y_1)^2 + \frac{2\alpha_1 - 1}{24} (y_2 - \\ &- y_1)^2 (x - x_1)^2 + \frac{2\alpha_1 - 1}{24} (x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y) &= \frac{\alpha_1}{12} [2(x - x_1) (y - y_1)^3 - 2(y_2 - y_1)^2 (x - x_1) (y - \\ &- y_1) - (x_2 - x_1) (y - y_1)^3] \end{aligned}$$

parametrii α_1 și α_2 fiind legați tot prin relația (14).

Ținând seama de relația (14) și aplicând formula (8), vom avea formula de cubatură

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) [f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + \\ &+ \frac{1}{12} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \left[2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(28) \quad & -3 \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) \Big] + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \Big[2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \\
& -3 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) \Big] + \frac{\alpha_1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \Big[(x_2 - \\
& - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) \Big] - \frac{\alpha_1}{12}(x_2 - \\
& - x_1)(y_2 - y_1) \Big[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) \Big] + \\
& + \frac{1}{24}(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1)^2 \Big[(2\alpha_1 - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + (2\alpha_1 - \\
& - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) - 4(1 + \alpha_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \Big] + R,
\end{aligned}$$

unde restul este dat de formula (9), cu funcții la limită (7) și (27). Formula (28) este de forma

$$A' + \alpha_1 B' = 0$$

și ea trebuind să fie valabilă oricare ar fi parametrul α_1 , vom avea

$$(29) \quad A' = 0,$$

$$(30) \quad B' = 0.$$

Formula (29) este formula de cubatură

$$\begin{aligned}
(31) \quad & \iint_D f \, dx \, dy = \frac{1}{2} [f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + \\
& + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1) \Big[2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - \\
& - 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) \Big] + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \Big[2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \\
& - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) \Big] - \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^2(y_2 - \\
& - y_1)^2 \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \Big] + R
\end{aligned}$$

în care

$$(32) \quad R = \iint_D \left(\varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) dx dy$$

cu

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{24}(x - x_1)^2(x - x_2)^2$$

$$\begin{aligned}
(33) \quad \varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{24}(x - x_1)^2(y - y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(x - x_1)^2(y - y_1) + \\
&+ \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(x - x_1)(y - y_1)^2 - \frac{1}{24}(y_2 - y_1)^2(x - x_1)^2 - \\
&- \frac{1}{24}(x_2 - x_1)^2(y - y_1)^2 \\
\varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24}(y - y_1)^2(y - y_2)^2.
\end{aligned}$$

Formula (30) este identică cu formula (21).

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. IONESCU, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui N. Obreschkoff la integrale duble*. St. cerc. mat. (Cluj) **XIII**, 35–86 (1962).
2. N. OBRESCHKOFF, *Neue Quadraturformeln*. Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, p. 6–26.