NOMOGRAME DE GEN ZERO CU SCĂRI PROIECTIVE

DE

L. BAL

O ecuaţie de ordinul trei nomografic

$$F(u,v,w) = Af(u)g(v)h(w) + B_1 g(v)\,h(w) + B_2 f(u)h(w) + B_3 f(u)\,g(v) + C_1 f(u) + C_2 g(v) + C_3 h(w) + D = 0 \tag{1}$$

este reprezentabilă cu diferite tipuri de nomograme cu puncte aliniate. Printre acestea se remarcă prin simplitate şi precizie nomogramele cu puncte aliniate cu scări rectilinii. Scările acestor nomograme sînt situate pe trei drepte care au două poziţii distincte proiectiv: trei drepte ce formează un triunghi, sau trei drepte concurente.

În acest articol se studiază reprezentarea ecuaţiei (1) cu ajutorul nomogramelor de gen zero cu scări proiective.

Ecuaţia lui Soreau, corespunzătoare nomogramei cu toate scările proiective are forma

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\alpha u+\beta}{u+\gamma} & 1 \\ \dfrac{\alpha_1 v+\beta_1}{v+\gamma_1} & 0 & 1 \\ \dfrac{\alpha_2 w+\beta_2}{w+\gamma_2} & \dfrac{\delta w+\lambda}{w+\gamma_2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

în ipoteza că

$$(\mu+\gamma)(v+\gamma_1)(w+\gamma_2) \neq 0,$$

iar două scări sînt situate pe axele de coordonate.

Fără a restrînge generalitatea problemei putem lua $\beta_2 = 1$, $\lambda = 1$ şi să scriem ecuaţia (2) sub forma mai simplă

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha u+\beta & u+\gamma \\ \alpha_1 v+\beta_1 & 0 & v+\gamma_1 \\ \alpha_2 w+1 & \delta w+1 & w+\gamma_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2'}$$

unde dezvoltînd determinantul din membrul întîi obţinem

$$\begin{array}{l}(\alpha_1\delta + \alpha\alpha_2 - \alpha\alpha_1)\,u\,v\,w + (\gamma\delta\alpha_1 + \beta\alpha_2 - \alpha_1\beta)\,u\,v + \\ + (\alpha\gamma_1\alpha_2 + \beta_1\delta - \alpha\beta_1)\,u\,w + (\alpha_1 + \alpha - \alpha\alpha_1\gamma_2)\,v\,w + \\ + (\beta_1 + \alpha\gamma_1 - \alpha\beta_1\gamma_2)\,u + (\gamma\alpha_1 + \beta - \beta\alpha_1\gamma_2)\,v + \\ + (\gamma\beta_1\delta + \beta\alpha_2\gamma_1 - \beta\beta_1)\,w + \gamma\beta_1 + \beta\gamma_1 - \beta\beta_1\gamma_2 = 0.\end{array} \tag{3}$$

Membrul întîi al ecuaţiei (3) este un caz particular al membrului întîi al ecuaţiei (1), cînd $f(u)$, $g(v)$ şi $h(w)$ se reduc la funcţiile identice u, v şi w

$$Auvw + B_1vw + B_2uw + B_3wv + C_1u + C_2v + C_3w + D = 0. \tag{1'}$$

Din identificarea polinoamelor din membrii întîi ai celor două ecuaţii (3) şi (1'), obţinem un sistem de 8 ecuaţii cu 9 necunoscute, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, δ, γ_2, care sînt parametrii scărilor proiective ale nomogramei

$$\begin{array}{llll}\alpha_1\delta + \alpha\alpha_2 - \alpha\alpha_1 = A & \alpha\gamma_1 + \beta_1 - \alpha\beta_1\gamma_2 = C_1 \\ \gamma\delta\alpha_1 + \beta\alpha_2 - \alpha_1\beta = B_1 & \alpha_1\gamma + \beta - \alpha_1\beta\gamma_2 = C_2 \\ \alpha\gamma_1\alpha_2 + \beta_1\delta - \alpha\beta_1 = B_2 & \beta_1\delta\gamma + \beta\alpha_2\gamma_1 - \beta\beta_1 = C_3 \\ \alpha_1 + \alpha - \alpha\alpha_1\gamma_2 = B_3 & \gamma\beta_1 + \beta\gamma_1 - \beta\beta_1\gamma_2 = D.\end{array} \tag{4}$$

Din (4) se obţine sistemul mai simplu

$$\begin{array}{llll}\alpha_1 & (\beta - \alpha\gamma) = B_3\beta - C_2\alpha; & \beta_1\delta(\beta - \alpha\gamma) & = B_2\beta - C_1\gamma. \\ (\alpha_1\gamma_2 - 1) & (\alpha\gamma - \beta) = C_2 - B_3\gamma; & (\alpha_2\gamma_1 - \beta_1)(\beta - \alpha\gamma) & = C_3 - C_3\alpha \\ \alpha_1\delta & (\alpha - \alpha\gamma) = A\beta - B_1\alpha; & \beta_1(\beta - \alpha\gamma) & = C_1\beta - B_3\gamma \\ (\alpha_2 - \alpha_1) & (\beta - \alpha\gamma) = B_1 - A\gamma; & (\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)(\beta - \alpha\gamma) & = D - D\alpha\end{array} \tag{5}$$

Pentru simplificarea discuţiei sistemului (5) introducem notaţiile

$$\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4\,(B_2B_3 - AC_1)(C_2C_3 - B_1D)$$

numit discriminantul ecuaţiei (1) şi

$$\begin{array}{c}I_1 = B_2B_3 - AC_1;\ I_2 = B_1B_3 - AC_2;\ I_3 = B_1B_2 - AC_3 \\ K_1 = C_2C_3 - B_1D;\ K_2 = C_1C_3 - B_2D;\ K_3 = C_1C_2 - B_3D \\ I = B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD.\end{array} \tag{6}$$

Rezolvarea sistemului (5), în afara unor cazuri de restricţie, care trebuie studiate separat, conduce la ecuaţia

$$I_1\beta^2 + I\alpha\beta + K_1\alpha^2 = 0. \tag{7}$$

Ceilalţi parametri ai scărilor se exprimă raţional cu ajutorul parametrilor α şi β.

Soluţia banală $\alpha = \beta = 0$, nu corespunde problemei, deoarece în acest caz nomograma ecuaţiei (1') nu conţine scara variabilei u.

În discuţia soluţiilor sistemului, apar numeroase cazuri pe care le sistematizăm în cele ce urmează.

1. $\Delta > 0$

1.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. Ecuaţia (1) admite două mulţimi infinite de reprezentări nomografice cu nomograme cu trei scări rectilinii proiective situate pe trei drepte care formează un triunghi, sau pe două drepte paralele şi una secantă. Cele două mulţimi de nomograme nu sînt proiectiv distincte. Se arată că există numai două nomograme distincte din punct de vedere proiectiv.

1.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$. În acest caz trebuie examinaţi şi invarianţii I_1 şi K_1. Dacă cel mult doi din aceşti invarianţi sînt nuli, atunci ecuaţia admite două mulţimi infinite de reprezentări nomografice de tipul considerat. Fiecare din mulţimea de nomograme obţinute, este echivalentă proiectiv.

Dacă trei din invarianţi sînt nuli, atunci toţi cei patru invarianţi consideraţi sînt nuli şi nu putem afirma că ecuaţia (1') este reprezentabilă nomografic sub această formă. Este necesar să se studieze sistemul iniţial în aceste cazuri particulare.

2. $\Delta = 0$

2.1. Dacă $I_3 \cdot K_3 \neq 0$ şi cel puţin unul din invarianţii I_1, K_1 sînt diferiţi de zero, atunci ecuaţia (1') admite o infinitate de reprezentări nomografice proiectiv echivalente cu nomograme cu trei scări proiective situate pe trei drepte concurente sau paralele. Dacă $I_1 = K_1 = 0$, atunci nu putem afirma existenţa reprezentării nomografice; membrul întîi al ecuaţiei (1'), se descompune într-un produs de factori cu mai puţin de trei variabile.

2.2. Dacă $I_3 \cdot K_3 = 0$, $I_3 + K_3 \neq 0$ şi $I_1K_1 \neq 0$, atunci ecuaţia (1') admite o infinitate de reprezentări nomografice proiectiv echivalente de tipul considerat.

Dacă cel puţin doi din invarianţii I_1, K_1 şi I_3, K_3 sînt nuli, atunci membrul întîi al ecuaţiei (1') se descompune în produs de factori cu mai puţin de trei variabile şi deci nu există reprezentare nomografică.

Exemple 1°. Să se reprezinte ecuaţia

$$2uvw - 4vw - uw + 3uv - u + 3v + 2w + 1 = 0$$

cu nomograme cu trei scări proiective.

Avem $\Delta = 16$; $\frac{b_1}{a_1} = 1$; $\frac{b_2}{a_2} = -\frac{1}{3}$ şi ecuaţiile lui Soreau corespunzătoare la două nomograme distincte proiectiv

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{x+5}{x+4} & 1 \\ \frac{12y-6}{y} & 0 & 1 \\ \frac{1}{z+\frac{5}{6}} & \frac{\frac{7}{6}z+1}{z+\frac{5}{6}} & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} 0 & \frac{2x+10}{x+10} & 1 \\ \frac{-\frac{12}{5}y+\frac{6}{5}}{y-\frac{1}{4}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{z+\frac{17}{24}} & \frac{\frac{7}{6}z+1}{z+\frac{17}{24}} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Să se reprezinte ecuaţia

$$uvw + 3vw + uw + 4uv + u + 8v + w = 0$$

cu nomograme cu trei scări proiective.

Avem $\Delta = 0$; $\frac{b}{a} = 1$ şi ecuaţia lui Soreau corespunzătoare nomogramei

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{x+1}{x-3} & 1 \\ \frac{-y}{y+2} & 0 & 1 \\ \frac{\frac{1}{2}z+1}{z+4} & \frac{\frac{1}{2}z+1}{z+4} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În studiul făcut au intervenit numai invarianţii i_3, K_3 şi I_1, K_1 din cauza modului cum au fost dispuse scările variabilelor u, v, w în raport cu axele; u pe axa Ox, v pe axa Oy şi w pe o dreaptă oarecare. Schimbînd dispoziţia scărilor vom obţine discuţii cu totul analoage. Cazurile de degenerare nu ne vor conduce la reprezentări nomografice. Reţinem însă că orice ecuaţie de ordinul trei nomografic poate fi reprezentată cu nomograme cu scări proiective, dacă membrul întîi al ecuaţiei nu degenerează şi discriminantul său nu e negativ.

Primită la redacţie: 30. IX.1966.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Bal, L. şi Radó, Fr.*, Lecţii de nomografie. Editura Tehnică, Bucureşti 1956.
[2] *Джемс-Леви, Г. Е., Казмин, В. В.*, Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами. Номографический сборник, нр. 2, Москва, 1964.
[3] *Bal, L. şi Mihoc, M.*, Sur une classe de nomogrammes à echelles de type donné. Mathematica, vol 9 (33), (1966).

RÉSUMÉ

NOMOGRAMMES DU GENRE ZÉRO À ÉCHELLES PROJECTIVES

PAR

L. BAL

On étudie les nomogrammes du genre zéro avec des échelles projectives, en supposant la possibilité d'écrire le polynôme irréductibile

$$Axyz + B_1yz + B_2xz + B_3xy + C_1x + C_2y + C_3z + D$$

sous la forme du déterminant Massau, avec des éléments d'une forme donnée.

En considérant le signe du discriminant

$$\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4(AC_1 - B_2B_3)(B_1D - C_2C_3)$$

et les invariants

$$AC_1 - B_2B_3,\ AC_2 - B_1B_3,\ AC_3 - B_1B_2,\ B_1D - C_2C_3;$$
$$B_2D - C_1C_3,\ B_3D - C_1C_2$$

on établit le nombre des nomogrammes distincts projectifs, avec des échelles projectives, avec lesquelles on peut représenter l'équation du troisième ordre nomographique.