

FORMULES DE CUBATURE AVEC UN NOMBRE REDUIT DE NOEUDS (I)

PAR

D. V. IONESCU

§ 1. Introduction

1. Dans cette Note nous donnons une méthode simple pour obtenir des formules de cubature de la forme

$$(1) \quad \iint_D f dx dy = \sum_{i=1}^n B_i [f(M_1^{(i)}) + f(M_2^{(i)}) + f(M_3^{(i)}) + f(M_4^{(i)})]$$

relativement au rectangle D ayant pour sommets $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_1, y_2)$ et le centre $P(x_0, y_0)$. Les noeuds $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, $M_3^{(i)}$, $M_4^{(i)}$ de cette formule ont pour coordonnées $(x_0 - \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 + \eta_i)$, $(x_0 - \xi_i, y_0 + \eta_i)$. Entre les coefficients B_i et les nombres ξ_i, η_i on peut établir certaines relations. Il restera alors un certain nombre d'indéterminés, coefficients B_k ou nombres ξ_k, η_k qu'on peut appeler *paramètres* et qui seront déterminés d'une telle manière que la formule (1) soit vérifiée par des fonctions successives de la suite

$$(2) \quad 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \dots$$

On peut écrire la formule (1) aussi sous la forme

$$(3) \quad \iint_D f dx dy = \sum_{i=1}^{n_1} B_i [f(M_1^{(i)}) + f(M_2^{(i)}) + f(M_3^{(i)}) + f(M_4^{(i)})] + \\ + 2 \sum_{i=1}^{n_2} B'_i [f(M_1'^{(i)}) + f(M_3'^{(i)})] + 2 \sum_{i=1}^{n_2} B''_i [f(M_2''^{(i)}) + f(M_4''^{(i)})] + 4B'''f(P).$$

Dans la première $\sum$ du second membre les ξ_i, η_i sont différents de zéro, dans la seconde $\sum$ les noeuds $M_1^{(i)}, M_3^{(i)}$ ont les coordonnées $(x_0 - \xi_i, y_0), (x_0 + \xi_i, y_0)$ avec $\xi_i \neq 0$ et dans la troisième $\sum$, les noeuds $M_2^{(i)}, M_4^{(i)}$ ont pour coordonnées $(x_0, y_0 - \eta_i), (x_0, y_0 + \eta_i)$ avec $\eta_i \neq 0$.

On connaît des formules de la forme (1) ou (3) qui ont été données par G. W. Tyler [6], J. Albrecht et L. Collatz [1], S. E. Mikeladze [2], R. v. Mises [3], D. D. Stancu [4], [5] et qui seront retrouvées dans ce travail.

§ 2. Formules préliminaires

2 En suivant la voie donnée par les mathématiciens cités ci-dessus écrivons que la formule (1) est vérifiée par les fonctions successives de la suite (2). Nous aurons alors les équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n B_i &= \frac{S}{4}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^2 = \frac{S(x_2 - x_1)^2}{4 \cdot 12}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \eta_i^2 = \frac{S(y_2 - y_1)^2}{4 \cdot 12}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^4 &= \frac{S(x_2 - x_1)^4}{4 \cdot 80}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^2 \eta_i^2 = \frac{S(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2}{4 \cdot 144}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \eta_i^4 &= \frac{S(y_2 - y_1)^4}{4 \cdot 80}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^6 = \frac{S(x_2 - x_1)^6}{4 \cdot 448}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^4 \eta_i^2 &= \frac{S(x_2 - x_1)^4 (y_2 - y_1)^2}{4 \cdot 960}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^2 \eta_i^4 &= \frac{S(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^4}{4 \cdot 960}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \eta_i^6 = \frac{S(y_2 - y_1)^6}{4 \cdot 448}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^8 &= \frac{S(x_2 - x_1)^8}{4 \cdot 2304}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^6 \eta_i^2 = \frac{S(x_2 - x_1)^6 (y_2 - y_1)^2}{4 \cdot 5376}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^4 \eta_i^4 &= \frac{S(x_2 - x_1)^4 (y_2 - y_1)^4}{4 \cdot 6400}, \\ \sum_{i=1}^n B_i \xi_i^2 \eta_i^6 &= \frac{S(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^6}{4 \cdot 5376}, \quad \sum_{i=1}^n B_i \eta_i^8 = \frac{S(y_2 - y_1)^8}{4 \cdot 2304}, \dots \end{aligned} \right.$$

où $S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

En posant

$$(5) \quad B_i = \frac{S}{4} A_i, \quad \xi_i = (x_2 - x_1) \lambda_i, \quad \eta_i = (y_2 - y_1) \mu_i,$$

on peut écrire les équations (4) sous la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^2 = \frac{1}{12}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \mu_i^2 = \frac{1}{12}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^4 = \frac{1}{80}, \\ \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^2 \mu_i^2 &= \frac{1}{144}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \mu_i^4 = \frac{1}{80}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^6 = \frac{1}{448}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^4 \mu_i^2 = \frac{1}{960}, \\ \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^2 \mu_i^4 &= \frac{1}{960}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \mu_i^6 = \frac{1}{448}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^8 = \frac{1}{2304}, \\ \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^6 \mu_i^2 &= \frac{1}{5376}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^4 \mu_i^4 = \frac{1}{6400}, \\ \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^2 \mu_i^6 &= \frac{1}{5376}, \quad \sum_{i=1}^n A_i \mu_i^8 = \frac{1}{2304}, \dots \end{aligned} \right.$$

§ 3. Formules à 1, 2 et 3 paramètres

3. Nous citons d'abord la formule bienconnue

$$(7) \quad \iint_D f dx dy = S f(P),$$

à un paramètre, qui est vérifiée par $f = 1, x, y, xy$.
Ensuite nous avons la formule

$$(8) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{2} [f(M_1') + f(M_3')],$$

où les noeuds M_1' et M_3' correspondent à $\lambda_1 = 1/2\sqrt{3}$ et qui est vérifiée par $f = 1, x, y, x^2, xy, x^3, x^2y, x^3y$.

Nous avons une formule analogue à la formule (8), avec les noeuds M_2'', M_4'' correspondant à $\mu_1 = 1/2\sqrt{3}$.

4. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{12}$$

est à deux paramètres et conduit à la formule

$$(9) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{12} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{2S}{3} f(P).$$

5. Le système d'équations

$$A_1 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 = \frac{1}{12}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$(10) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{4} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

avec les noeuds correspondant à $\lambda_1 = \mu_1 = 1/2\sqrt{3}$.
Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 = A_2$$

est lui aussi à trois paramètres et conduit à la formule

$$(11) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{4} [f(M'_1) + f(M''_2) + f(M'_3) + f(M''_4)],$$

avec les noeuds M'_1, M'_3 correspondant à $\lambda_1 = 1/\sqrt{6}$ et les noeuds M''_2, M''_4 correspondant à $\mu_2 = 1/\sqrt{6}$.

Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$(12) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{6} [f(P'_1) + f(P''_2) + f(P'_3) + f(P''_4)] + \frac{S}{3} f(P).$$

De même le système

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$(13) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{3} [f(P'_1) + f(P''_2) + f(P'_3) + f(P''_4)] - \frac{S}{12} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)].$$

Enfin le système à trois paramètres

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = 1$$

conduit à la formule de cubature

$$(14) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{24} [f(M'_1) + f(M''_2) + f(M'_3) + f(M''_4)] + \frac{5S}{6} f(P).$$

Les formules (9), (10), (11), (12), (14) sont citées dans le livre de S. E. Mikeladze [2, pp. 501, 492, 500, 486, 502].

§ 4. Formules à 4 paramètres

6. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \lambda_1^4 = \frac{1}{80}$$

conduit à la formule

$$(15) \quad \iint_D f dx dy = \frac{5S}{36} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{16S}{36} f(P)$$

avec les noeuds correspondant à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

7. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 + A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}$$

conduit à la formule

$$(16) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{24} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{5S}{24} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_3 \lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_3 \lambda_3^4 = \frac{1}{80}, \quad A_1 = A_2, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à deux formules de cubature. La première est

$$(17) \quad \iint_D f dx dy = \frac{11 - \sqrt{41}}{60} S[f(P'_1) + f(P'_2) + f(P'_3) + f(P'_4)] +$$

$$+ \frac{4 + \sqrt{41}}{60} S[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 - \sqrt{41}}{10}}$.

La seconde formule est

$$(18) \quad \iint_D f dx dy = \frac{11 + \sqrt{41}}{60} S[f(P'_1) + f(P'_2) + f(P'_3) + f(P'_4)] +$$

$$+ \frac{4 - \sqrt{41}}{60} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 + \sqrt{41}}{10}}$.

9. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_3 \lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_3 \lambda_3^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule

$$(19) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{18} [f(P'_1) + f(P'_3)] + \frac{3S}{18} [f(P'_2) + f(P'_4)] + \frac{5S}{18} [f(M'_1) + f(M'_3)],$$

les noeuds M'_1, M'_3 correspondant à $\lambda_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}}$.

10. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \lambda_1^4 = \frac{1}{80}$$

conduit à la formule

$$(20) \quad \iint_D f dx dy = \frac{5S}{18} [f(M'_1) + f(M'_3)] + \frac{4S}{18} [f(M'_2) + f(M'_4)],$$

les noeuds M'_1, M'_3 et M'_2, M'_4 correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$ et à $\mu_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

11. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \lambda_1^4 = \frac{1}{80}, \quad A_1 = A_2$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule

$$(21) \quad \iint_D f dx dy = \frac{5S}{18} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)] - \frac{S}{9} f(P),$$

les noeuds M'_1, M'_3 et M'_2, M'_4 correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\mu_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$.

12. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f dx dy = \frac{S}{36} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] +$$

$$+ \frac{S}{9} [f(P'_1) + f(P'_2) + f(P'_3) + f(P'_4)] + \frac{4S}{9} f(P),$$

appelée la formule de Cavalieri — Simpson. Elle est citée par D. D. Stancu dans le travail [4, p. 80].

13. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{4}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule de cubature

$$(23) \quad \iint f dx dy = \frac{4S}{9} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] - \\ - \frac{2S}{9} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)] + \frac{S}{9} f(P).$$

Cette formule est citée par D. D. Stancu dans la travail [4, p. 94].

14. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_3 \lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2 \mu_2^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12}, \\ A_3 \lambda_3^2 \mu_3^2 = \frac{1}{144}, \quad A_1 = A_2 = A_3, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}$$

est un système à quatre paramètres et conduit à la formule

$$(24) \quad \iint_D f dx dy = \frac{7 - \sqrt{13}}{36} S [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \\ + \frac{7 - \sqrt{13}}{72} S [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{\sqrt{13} - 1}{6} f(P),$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 1}{6}}$.

Reçue le 18 IV 1967

Université „Babeş-Bolyai“, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Albrecht J., Collatz L., *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionalen Integrale*. ZAMM 1958, **38**, S. 1-15.
2. Микеладзе С. Е., *Численные методы математического анализа*. Физматгиз, М., 1953.
3. v. Mises R., *Formules de cubature*. Rev. Math. de l'Union Interbalkanique, 1936, **1**, pp. 17-27.
4. Stancu D. D., *Contribuții la integrarea numerică a funcțiilor de mai multe variabile*. St. și cerc. de matem., Acad. R.P.R., filiala Cluj, 1957, **VIII**, pp. 75-101.
5. — *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcțiile de două variabile*. St. și cerc. de matem., Acad. R.P.R., filiala Cluj, 1958, **IX**, pp. 351-369.
6. Tyler G. W., *Numerical Integration of Functions of several Variables*. Canad. J. of Math., 1953, **5**, pp. 393-412.

FORMULE DE CUBATURĂ CU UN NUMĂR REDUS DE NODURI (I)

(Rezumat)

Se expune o metodă simplă care conduce la stabilirea formelor de cubatură de forma (1) relative la un dreptunghi D avind virfurile sale în $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_1), P_3(x_2, y_2), P_4(x_1, y_2)$ și centrul în $P(x_0, y_0)$. Nodurile din formula (1) au coordonatele $(x_0 - \xi_i, y_0 - \eta_i), (x_0 + \xi_i, y_0 - \eta_i), (x_0 + \xi_i, y_0 + \eta_i), (x_0 - \xi_i, y_0 + \eta_i)$.

UNE MÉTHODE DE RÉOLUTION DES GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES PAR SURITÉRATION POLYNÔMIALE (I)

PAR

Ph. NOËL

1. Introduction

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre un système linéaire $[A][X] = [B]$ de n équations à n inconnues sont classiquement divisées en méthodes directes et en méthodes indirectes.

Les premières [1] donnent directement, par transformation de la matrice et du second membre, la solution en un nombre fini d'opérations arithmétiques. Sur calculatrice électronique, les erreurs d'arrondi ont une influence telle que le résultat ainsi atteint est parfois fort éloigné de la solution exacte qui devrait être obtenue si les prévisions théoriques étaient respectées. À ce phénomène numérique dangereux, et d'importance imprévisible, s'ajoute la nécessité de stockage de toute la matrice en mémoire centrale. De ce fait, ces méthodes ne sont effectivement utilisables avec profit que pour résoudre des systèmes de très petites dimensions, quelques dizaines au plus.

Les méthodes itératives, appartenant à la classe des méthodes indirectes [1]... [3], sont beaucoup moins sensibles aux erreurs de troncature car elles sont autocorrectrices comme toute technique itérative.

Elles consistent en la répétition d'un algorithme plus ou moins simple qui donne comme solution approchée du système le vecteur limite d'une suite vectorielle de terme général

$$[X_k] = F_k([A], [B], [X_{k-1}], \dots, [X_{k-r}]).$$

Les itérations les plus courantes, en particulier celle que nous présentons, sont de degré $r = 1$, et linéaires en $[X_{k-1}]$. Le calcul d'un itéré $[X_k]$ à partir du précédent n'y fait intervenir la matrice $[A]$ que comme opérande dans des produits du type $[W] = [A][V]$. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux grands systèmes linéaires qui interviennent dans