

ASUPRA NOMOGRAMELOR DE GEN ZERO CU DOUĂ SCĂRI REGULATE ȘI UNA PROIECTIVĂ¹⁾

DE

MARIA PETER-MIHOC

(Cluj)

În lucrare se cercetează clasele de ecuații (5) care se reprezintă cu nomograme cu puncte aliniate cu două scări regulate și una proiectivă. Pentru fiecare tip de nomogramă considerat se dau formulele pentru calculul parametrilor scărilor ei (7), (12), (15).

În construcția și utilizarea nomogramelor pentru rezolvarea ecuațiilor se urmărește atât rapiditatea calculului, cât și gradul de exactitate al scărilor. Din această cauză, se caută să se construiască scări de un anumit tip, de diferite module, cum sînt : scările regulate, logaritmice și proiective. Această cerință justifică cercetarea ecuațiilor care admit reprezentare nomografică de un anumit tip.

În această lucrare se cercetează clasele de ecuații care se reprezintă cu nomograme de gen zero cu două scări regulate și una proiectivă.

Se știe că trei drepte în plan, pot avea numai două poziții relativ distincte proiectiv, sau formează un triunghi, sau sînt concurente. Ecuația lui Soreau pentru cazul cînd cele trei scări formează un triunghi este :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1x + b_1 & a_2x + b_2 & 1 \\ c_1y + d_1 & c_2y + d_2 & 1 \\ \frac{e_1z + f_1}{g_1z + k_1} & \frac{e_2z + f_2}{g_2z + k_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

¹⁾ Această lucrare a fost comunicată la Sesiunea științifică a tineretului, București, 20-22 mai 1966.

Se arată ușor că transformarea afină $X = \alpha x + \beta y + \gamma$, $Y = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$, păstrează scările regulate. Cu ajutorul acestei transformări aducem ecuația (1) la forma:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 0 & x+a & 1 \\ y+b & 0 & 1 \\ \frac{cz+d}{ez+k} & \frac{fz+h}{ez+k} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

unde cele trei scări formează un triunghi cu două laturi situate pe axele de coordonate, sau

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 0 & x+a & 1 \\ y+b & 0 & 1 \\ \frac{cz+d}{ez+k} & m \frac{cz+d}{ez+k} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

când cele trei scări sînt concurente, două fiind situate pe axele de coordonate.

În aceste condiții, a, b, c, d, e, h, k, m sînt parametrii scărilor nomogramelor.

Dezvoltînd membrul întîi al ecuației (2) obținem:

$$(4) \quad exyz + (ae - f)yz + (be - c)xz + kxy + (bk - d)x + (ak - h)y + (abe - bf - ac)z + (abk - bh - ad) = 0.$$

Această ecuație este o ecuație de ordinul 3 nomografic ai cărei coeficienți sînt funcții de parametrii scărilor date.

Se pune deci întrebarea, dacă pentru orice ecuație de ordinul trei nomografic, se pot construi nomograme cu două scări regulate și una proiectivă? Prin urmare, se caută condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții unei ecuații de ordinul trei nomografic pentru a admite o astfel de reprezentare.

În acest caz, identificînd coeficienții ecuației (4) cu cei ai formei generale a ecuației de ordinul trei nomografic

$$(5) \quad Axyz + B_1yz + B_2xz + B_3xy + C_1x + C_2y + C_3z + D = 0$$

se obține sistemul:

$$(6) \quad \begin{aligned} e &= A & bk - d &= C_1 \\ ae - f &= B_1 & ak - h &= C_2 \\ be - c &= B_2 & abe - bf - ac &= C_3 \\ k &= B_3 & abk - bh - ad &= D. \end{aligned}$$

Rezolvarea sistemului (6) de opt ecuații cu opt necunoscute ne conduce la ecuația:

$$(B_1B_3 - AC_2)b^2 - (B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)b + (C_1C_3 - B_2D) = 0$$

și la următoarele valori ale parametrilor scărilor:

$$b_{1,2} = \frac{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD \pm \sqrt{(B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2)(C_1C_3 - B_2D)}}{2(B_1B_3 - AC_2)}$$

$$\pm \sqrt{(B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2)(C_1C_3 - B_2D)} \\ 2(B_1B_3 - AC_2)$$

$$(7) \quad a = \frac{B_1b - C_3}{Ab - B_2}, \quad c = Ab - B_2, \quad d = B_3b - C_1, \quad e = A$$

$$f = \frac{B_1B_2 - AC_3}{Ab - B_2}, \quad h = \frac{(B_1B_3 - AC_2)b + (B_2C_2 - B_3C_3)}{Ab - B_2}, \quad k = B_3.$$

Rezultă că dacă expresia:

$$(8) \quad \Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2)(C_1C_3 - B_2D)$$

este pozitivă, sistemul admite două soluții reale și finite, adică ecuația poate fi reprezentată prin două nomograme cu două scări regulate și una proiectivă, distincte proiectiv. Dacă discriminantul Δ este negativ, atunci nu există o reprezentare a ecuației de tipul indicat mai sus. Dacă expresia (8) este nulă, rezultă pentru parametrii scărilor proporționalitatea:

$$\frac{c}{d} = \frac{f}{h},$$

adică ecuația dată (5) se poate reprezenta printr-o nomogramă cu toate scările concurente de forma (3), parametrii scărilor calculîndu-se tot după formulele (7).

Sistemul (6) este compatibil dacă $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ și $Ab - B_2 \neq 0$. Dacă $Ab - B_2 = 0$ și $B_3b - C_1 \neq 0$, atunci parametrii b, c, d, e, k se calculează tot cu formulele (7), iar a, f, h cu formulele:

$$a = \frac{C_2b - D}{B_3b - C_1}, \quad f = \frac{(AC_2 - B_1B_3)b + (B_1C_1 - AD)}{B_3b - C_1},$$

$$h = \frac{C_1C_2 - B_3D}{B_3b - C_1}.$$

Dacă $B_1B_3 - AC_2 = 0$ sau $B_2B_3 - AC_1 = 0$, ecuația va fi reprezentată printr-o nomogramă cu două scări paralele, dar acest caz se va studia separat.

Dacă se schimbă scara variabilei x cu scara variabilei y , se obțin formule analoage cu (7), discriminantul având forma:

$$\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4(B_2B_3 - AC_1)(C_2C_3 - B_1D)$$

care este identic cu (8) (vezi [3]).

Nomograma cu două scări paralele nu e distinctă din punct de vedere proiectiv de nomograma cu scările situate pe laturile unui triunghi și nici nomograma cu toate scările paralele de nomograma cu scările concurente. Dar dacă considerăm două scări regulate, transformarea proiectivă trebuie exclusă, deoarece ea nu păstrează proprietatea de regularitate a scărilor. Deci aceste cazuri trebuie tratate separat.

În cazul nomogramei cu două scări paralele, două fiind regulate, după o transformare afină ecuația lui Soreau are forma:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 0 & x+a & 1 \\ y+b & 0 & 1 \\ \frac{cz+d}{ez+k} & h & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul din membrul întâi găsim:

$$(10) \quad exyz + (ae - he)yz + (be - c)xz + kxy + (bk - d)x + k(a - h)y + (abe - ac - beh)z + (abk - ad - bhk) = 0.$$

Prin identificarea membrului întâi al ecuației de ordinul trei nomografic (5) cu membrul întâi al ecuației (10), găsim următorul sistem de ecuații:

$$(11) \quad \begin{aligned} e &= A, & bk - d &= C_1 \\ e(a - h) &= B_1, & k(a - h) &= C_2 \\ be - c &= B_2, & abe - ac - bhe &= C_3 \\ k &= B_3, & abk - ad - bhk &= D \end{aligned}$$

cu soluția

$$(12) \quad \begin{aligned} a &= \frac{B_3C_3 - AD}{B_2B_3 - AC_1}, & b &= \frac{C_1C_3 - B_2D}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD} \\ c &= \frac{B_2(B_2C_2 - B_1C_1) - C_3(B_2B_3 - AC_1)}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD}, & e &= A, \quad k = B_3 \\ d &= \frac{C_1(B_2C_2 - B_1C_1) - D(B_2B_3 - AC_1)}{B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 - AD}, \\ h &= \frac{B_3C_3 - AD}{B_2B_3 - AC_1} - \frac{B_1}{A} \end{aligned}$$

pentru existența soluției de mai sus trebuie îndeplinite condițiile

$$B_1B_3 = AC_2, \quad B_2B_3 \neq AC_1.$$

Dacă $B_1B_3 \neq AC_2$ și $B_2B_3 = AC_1$, scara variabilei x se schimbă cu cea a variabilei y , valorile parametrilor calculându-se după formulele de mai sus în care B_1, C_1 se înlocuiesc cu coeficienții B_2 respectiv C_2 și invers.

În cazul în care nomograma are toate scările paralele, ecuația lui Soreau are forma:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ a & y & 1 \\ 1 & \frac{dz+e}{gz+k} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În urma dezvoltării determinantului avem:

$$(14) \quad gyz + (a-1)gxz + (a-1)kx + ky - adz - ae = 0.$$

Această ecuație este o ecuație de ordinul trei nomografic din care lipsesc termenii xyz și xy , adică $A = 0, B_3 = 0$.

Prin identificarea coeficienților din membrul întâi al ecuației (5) cu membrul întâi al ecuației (14) găsim sistemul:

$$(15) \quad \begin{aligned} g &= B_1, & k &= C_2 \\ (a-1)g &= B_2, & -ad &= C_3 \\ (a-1)k &= C_1, & -ae &= D \end{aligned}$$

pe care rezolvându-l obținem soluția:

$$a = \frac{C_1 + C_2}{C_2}, \quad d = -\frac{C_2C_3}{C_1 + C_2}, \quad e = -\frac{C_2D}{C_1 + C_2}, \quad g = B_1, \quad k = C_2.$$

Pentru existența soluției acestui sistem trebuie să fie îndeplinite condițiile:

$$B_1C_1 = B_2C_2, \quad C_2 \neq 0, \quad C_1 \neq -C_2.$$

Din ecuația (14) pe lângă coeficientul termenului xyz lipsește și coeficientul termenului xy , tocmai cel al produsului variabilelor corespunzătoare scărilor regulate. Dacă ar lipsi coeficientul B_1 , atunci ar trebui să fie îndeplinită relația $B_2C_2 = B_3C_3$ și scările regulate ar fi cele ale variabilelor y și z . Aceeași discuție, dacă $B_2 = 0$.

Putem rezuma rezultatele obținute în următoarea schemă:

Cazul I: $\Delta > 0$.

a) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0$ și $B_2B_3 - AC_1 \neq 0$

ecuația de ordinul trei nomografic se reprezintă cu ajutorul a două nomograme cu două scări regulate și una proiectivă, distincte proiectiv ce au scările situate pe laturile unui triunghi.

b) $B_1B_3 - AC_2 \neq 0, B_2B_3 - AC_1 = 0$ sau $B_1B_3 - AC_2 = 0,$

$$B_2B_3 - AC_1 \neq 0$$

ecuația de ordinul trei nomografic se reprezintă cu ajutorul unei nomograme de acest tip cu două scări paralele.

$$c) B_1B_3 - AC_2 = 0 \text{ și } B_2B_3 - AC_1 = 0$$

ecuația de ordinul trei nomografic nu admite reprezentare nomografică de tipul dat.

$$\text{Cazul II: } \Delta = 0.$$

$$a) B_1B_3 - AC_2 \neq 0 \text{ și } B_2B_3 - AC_1 \neq 0$$

ecuația de ordinul trei nomografic admite o reprezentare nomografică printr-o nomogramă cu scările concurente.

$$b) B_1B_3 - AC_2 \neq 0 \text{ și } B_2B_3 - AC_1 = 0 \text{ sau } B_2B_3 - AC_1 \neq 0 \text{ și } B_1B_3 - AC_2 = 0$$

$$c) B_1B_3 - AC_2 = 0 \text{ și } B_2B_3 - AC_1 = 0$$

în aceste cazuri ecuația de ordinul trei nomografic nu admite reprezentare nomografică de tipul considerat.

$$d) A = 0, B_3 = 0 \text{ și } B_1C_1 = B_2C_2 \text{ sau } B_2 = 0 \text{ și } B_1C_1 = B_3C_3 \text{ sau } B_1 = 0 \text{ și } B_2C_2 = B_3C_3$$

ecuația se reprezintă cu o nomogramă cu trei scări paralele.

$$\text{Cazul III: } \Delta < 0.$$

Ecuația de ordinul trei nomografic nu admite o reprezentare nomografică de tipul dat.

Toate aceste rezultate se transpun întocmai, în cazul în care în locul variabilelor x, y, z sînt funcții de un parametru $f(x), g(y), h(z)$.

Exemple. Să se cerceteze următoarele ecuații:

$$1^\circ. -xyz - yz + 2xz + xy - x + 2y + 2z + 1 = 0, \Delta = 16.$$

Parametrii calculați după formulele (7) sînt:

$$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -4, d_1 = 3, e_1 = -1, f_1 = 0, h_1 = -1, k_1 = 1, a_2 = 5, b_2 = -2, c_2 = 0, d_2 = -1, e_2 = -1, f_2 = -4, h_2 = 3, k_2 = 1.$$

Ecuațiile Soreau corespunzătoare sînt:

$$\begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1 \\ y+2 & 0 & 1 \\ \frac{-4z+3}{-z+1} & \frac{-1}{-z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x+5 & 1 \\ y-2 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{-z+1} & \frac{-4z+3}{-z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2^\circ. 2xyz + 3yz + xz + xy + x + y + 2z + 1 = 0 \quad \Delta = 0.$$

Parametrii scărilor nomogramei calculați cu ajutorul formulelor (7) sînt:

$$a = 1, b = 1, c = 1, d = 0, e = 2, f = -1, h = 0.$$

Ecuația lui Soreau corespunzătoare acestei ecuații este:

$$\begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1 \\ y+1 & 0 & 1 \\ \frac{z}{2z+1} & \frac{-z}{2z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$3^\circ. 2xyz + 3yz + xz + 4xy + x + 6y + 5z + 3 = 0$$

$$\Delta = 121, AC_2 = B_1B_3.$$

Parametrii scărilor nomogramei acestei ecuații sînt:

$$a = 7, b = \frac{2}{11}, c = -\frac{7}{11}, d = -\frac{3}{11}, e = 2, h = \frac{11}{2}, k = 4.$$

Ecuația lui Soreau are forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & x+7 & 1 \\ y+\frac{2}{11} & 0 & 1 \\ \frac{-\frac{7}{11}z-\frac{3}{11}}{2z+4} & \frac{11}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$4^\circ. 2yz + xz + x + 2y + 4z + 3 = 0, A = B_3 = 0, \Delta = 0$$

$$a = \frac{3}{2}, c = 1, d = -\frac{4}{3}, e = -1, g = 1, k = 1.$$

Ecuația lui Soreau corespunzătoare este:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ \frac{3}{2} & y & 1 \\ 1 & \frac{-\frac{4}{3}z-1}{z+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

1. L. BAL și F. RADÓ, *Lecții de nomografie*. Ed. tehnică, București, 1956.
2. Г. Е. ДЖЕМС-ЛЕВИ, В. В. КОЗМИН, *Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами*. Номографический сборник, нр. 2, Москва, 1964.
3. Н. А. ГЛАГОЛЕВ, *Курс номографии*. Изд. 2-е, М. Гос. Изд-во, „Высшая школа”, 1961.