CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA NOMOGRAMELOR CU PUNCTE ALINIATE DE GENUL UNU ȘI DOI CU SCĂRILE RECTILINII REGULATE

DE

L. BAL

QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LES NOMOGRAMMES AUX POINTS ALIGNÉS DE GENRE UN ET DEUX À ÉCHELLES RECTILIGNES RÉGULIERES

Dans cet article on étudie la posibilité de la repré- sentation des équations du quatrième ordre nomographique par des nomogrammes à points alignés de genre un à deux échelles rectilignes régulières. On donne les conditions pour le cas où les deux échelles sont regulières et pour celui où l'une des échelles est régulière et l'autre projective.

Se cunoaște rezultatul că orice ecuație cu trei variabile de ordinul patru nomografic, se poate reprezenta prin nomograme cu puncte aliniate [1]. Fie ecuația generală de ordinul patru nomografic

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = {} & [a_0 f_1(x) f_2(y) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(y) + a_3] f_3(z) + \\ & + [b_0 f_1(x) f_2(y) + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(y) + b_3] g_3(z) + \\ & + c_0 f_1(x) f_2(y) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(y) + c_3 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

și

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \; D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \; D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \; D_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = D_0 D_3 - D_1 D_2.$$

Dacă $\Delta = 0$, ecuația (1) se poate aduce la forma canonică Cauchy

$$\varphi_1 \varphi_3 + \varphi_2 \varphi_3 + \chi_3 = 0, \tag{2}$$

iar dacă $\Delta \neq 0$, ecuația (1) se poate aduce la forma canonică Clark

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 + (\varphi_1 + \varphi_2) \psi_3 + \chi_3 = 0. \tag{3}$$

Cele două forme canonice se pot reprezenta respectiv printr-o nomogramă cu puncte aliniate de genul unu, adică o nomogramă formată din două scări rectilinii și una curbilinie (2) și printr-o nomogramă cu puncte aliniate de genul trei, formată din două scări pe o conică și o scară pe o curbă oarecare (3).

Ecuațiile cu trei variabile de ordinul cinci nomografic nu se pot reprezenta, în general, cu nomograme cu puncte aliniate [2]. Se știe că ecuațiile cu trei variabile de forma

$$f_3(z_3) = \frac{f_1(z_1) + f_2(z_2)}{\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)}$$

se pot reprezenta printr-o nomogramă de genul doi, adică printr-o nomogramă cu puncte aliniate, formată dintr-o scară rectilinie și două scări curbilinii.

În această notă, se consideră reprezentarea ecuației de ordinul patru nomografic cu o nomogramă de genul unu, cu cele două scări rectilinii regulate și reprezentarea ecuației de ordinul cinci nomografic cu o nomogramă de genul doi, cu scara rectilinie regulată.

În cazul cînd nomograma are amîndouă scările rectilinii regulate, aceste scări pot fi sau paralele, sau să aibă un punct comun [2].

Pentru primul caz, luînd suporturile scărilor regulate, drepte paralele cu axa Oy, iar suportul scării curbilinii o transformare afină a sa, nomograma are ecuația lui Soreau corespunzătoare

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ \alpha & y & 1 \\ \beta\varphi + \gamma\psi + \delta & \mu\varphi + \nu\psi + \rho & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

sau:

$$\beta x\varphi + \gamma x\psi - \beta y\varphi - \gamma y\psi + (\delta - \alpha)x - \delta y + \alpha\mu\varphi + \alpha\nu\psi + \alpha\rho = 0.$$

Din (4) rezultă că ecuațiile de ordinul al patrulea nomografic, care se pot reprezenta cu acest tip de nomograme au forma

$$a_1x\varphi + b_1x\psi + a_2y\varphi + b_2y\psi + c_1x + c_2y + a_3\varphi + b_3\psi + c_3 = 0. \qquad (5)$$

Se verifică imediat că ecuația (5) se poate aduce la forma canonică Cauchy ($\Delta = 0$) și se poate reprezenta cu o nomogramă cu două scări regulate paralele și o scară curbilinie, dacă sînt îndeplinite condițiile

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 0. \qquad (5')$$

Parametrii scărilor se pot obține cu ușurință, în funcție de coeficienții ecuației.

În al doilea caz, luînd scările regulate pe axele de coordonate, nomograma corespunde ecuației lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 0 & x + \alpha & 1 \\ y + \beta & 0 & 1 \\ \gamma\varphi + \delta\psi + k & \mu\varphi + \nu\psi + \delta & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

sau

$$\gamma x\varphi + \delta x\psi + \mu\varphi y + \nu\varphi y - xy + (k - \beta)x + (\rho - \alpha)y + (\alpha\gamma + \beta\mu)\varphi + (\beta\nu + \alpha\delta)\psi + \beta\rho + \alpha k - \alpha\beta = 0.$$

Din (6) rezultă că ecuațiile de ordinul patru nomografic care se pot reprezenta cu acest tip de nomogramă au forma

$$a_1x\varphi + b_1x\psi + a_2y\varphi + b_2y\psi + c_0xy + c_1y + a_3\varphi + b_3\psi + c_3 = 0. \qquad (7)$$

Reciproc se arată că pentru ca ecuațiile (6) și (7) să fie echivalente, este necesar și suficient ca să fie îndeplinite condițiile

$$c_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1) - c_0^2(a_1b_3 - b_1a_3)(a_3b_2 - a_2b_3) = 0 \qquad (7')$$

$$c_0 \neq 0,\ (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1b_3 - a_3b_1)(a_2b_3 - b_2a_3) \neq 0.$$

Parametrii nomogramei unice de genul unu, se obțin prin indentificarea membrilor din stînga ecuațiilor (6) și (7).

Rezultatele obținute în aceste două subcazuri se pot rezuma în următorul rezultat referitor la ecuația de ordinul patru nomografic (1) cu $f_1(x) = x$, $f_2(y) = y$.

Ecuația (1) *se poate reprezenta printr-o nomogramă de genul unu cu scările rectilinii regulate, dacă sînt îndeplinite condițiile*

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0,\ rang\ D = 3,\ a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 0,\ c_1 + c_2 \neq 0 \qquad (8)$$

pentru nomograma cu scările rectilinii paralele, și condițiile

$$a_0 = b_0 = 0;\ \Delta = 0;\ c_0 \neq 0;\ (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1b_3 - a_3b_1)(a_2b_3 - b_2a_3) \neq 0;$$
$$rang\ D = 3; \qquad (9)$$

pentru nomograma cu scările rectilinii concurente.

Dacă una din condiții nu este îndeplinită, ecuația de ordinul patru nomografic sau nu admite reprezentarea nomografică considerată, sau degenerează într-o ecuație de ordin nomografic inferior lui 4.

Să considerăm cazul cînd nomograma are o scară rectilinie regulată și cealaltă scară rectilinie proiectivă [4].

Acest caz comportă de asemenea două subcazuri: scările rectilinii paralele și scările rectilinii concurente. Ecuațiile lui Soreau cele mai simple, corespunzătoare acestor nomograme le scriem sub formele

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & \frac{\alpha x + \beta}{y + \gamma} & 1 \\ \delta\varphi + \varepsilon\psi + \eta & \lambda\varphi + \mu\psi + \nu & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x + \alpha & 1 \\ \frac{\beta y + \gamma}{y + \delta} & 0 & 1 \\ \varepsilon\varphi + \eta\psi + k & \lambda\varphi + \mu\psi + \nu & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Condițiile de echivalență ale ecuațiilor de ordinul patru nomografic (1) (în ipoteza $f_1(x) = x$, $f_2(y) = y$) și (10) sînt următoarele

$$a_0 \neq 0,\ b_1c_0 = c_1b_0,\ a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0 = 0$$
$$a_1b_0 = a_0b_1,\ a_0(a_0c_3 - a_1c_2 + a_2c_1 - a_3c_0) = a_0a_3 - a_1a_2. \qquad (12)$$

Aceste condiții asigură anularea discriminantului Δ, și proprietatea scărilor de a fi regulate.

Echivalența ecuațiilor (1) și (11) în aceeași ipoteză $f_1(x) = x$, $f_2(y) = y$ comportă o discuție mai detaliată. În cazul cînd sînt îndeplinite condițiile

$$(a_1a_2 - a_0a_3)(b_1b_2 - b_0b_3)(c_1c_2 - c_0c_3) \neq 0$$
$$b_2(a_1a_2 - a_0a_3) - a_2(a_2b_1 - a_3b_0) \neq 0, \quad a_0b_1 - a_1b_0 = 0 \qquad (13)$$
$$(a_0c_1 - a_1c_0)(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_2c_3 - a_3c_2)(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0)^2 -$$
$$- (a_0c_3 - a_1c_0 + a_2c_1 - a_3c_0)(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0)(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

nomograma corespunzătoare e de tipul (11).

Ultima egalitate asigură anularea discriminantului, iar toate la un loc existența nomogramei de tipul considerat. Parametrii scărilor nomogramelor se obțin în mod analog cazului anterior.

Condițiile enumerate rezultă din rezolvarea sistemului obținut din identificarea coeficienților ecuației (1), cu coeficienții ecuațiilor Soreau corespunzătoare nomogramelor considerate. În aceste condiții există o singură nomogramă pentru ecuația (1) pentru fiecare tip considerat.

Pentru ecuațiile de ordinul cinci nomografic, nu există în general reprezentare nomografică cu nomograme cu puncte aliniate. Căutînd o reprezentare nomografică de forma

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ \alpha f_2 + \beta g_2 + \gamma & \lambda f_2 + \mu g_2 + \nu & 1 \\ \alpha_1 f_3 + \beta_1 g_3 + \gamma_1 & f_3 + \mu_1 g_3 + \nu_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se găsesc condiții analoage.

Aceste rezultate arată că reprezentarea nomografică a ecuațiilor de ordinul patru și cinci nomografic este unică. Acesta este un caz particular al problemei unicității nomogramei cu puncte aliniate pentru ecuațiile de ordin nomografic mai mare ca trei.

Primită la redacție la data de 15.VI.1968.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Bal, L., Rado, F.*, Lecții de nomografie, București, Ed. tehnică, 1956.

[2] *Bal, L., Mihoc, M.*, Sur une classe de nomogrammes a échelles de type donné. Mathematica 1966 vol. 8(31), 2, 199—216.

[3] *Bal, L.*, Nomograme de gen zero cu scări proiective. Buletinul științific al Inst. polit. din Cluj, 1968, vol. 9, 21—25.

[4] *Mihoc, M.*, Asupra nomogramelor de gen zero cu două scări regulate și una proiectivă. Studii și cercetări matematice, 1967, Tom. 19 nr. 5, 715—721.