

blèmes, une technique, utilisant les propriétés des polynômes de Tchébycheff [2] a dû être mise au point pour celle de β , qui, auparavant, était très difficile.

Cet inconvénient est néanmoins atténué par le fait que la connaissance de α et β permet de contrôler la convergence, ce qui est essentiel sur le plan numérique.

Reçue le 24 I 1967

Institut Universitaire de Calcul Automatique,
Nancy, France

BIBLIOGRAPHIE*)

1. Varga R. S., *Matrix Iterative Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
2. Noël Ph., *Suritération des grands systèmes linéaires. Quelques applications aux dérivées partielles*. Thèse, Nancy, 1967.
3. — *Résolution par suritération polynômiale des grands systèmes linéaires*. Notice technique, Nancy, 1967.
4. Young D., *On Richardson's Method for Solving Linear Systems with Positive Definite Matrices*. J. Math. Phys., 1954, 32, pp. 243—255.
5. Noël Ph. *Une méthode de résolution des grands systèmes linéaires (I)*. Bul. Inst. polit. Iași, 1967, XIII (XVIII), 3—4, pp. 119—122.

O METODĂ DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE MARI PRIN SUPRAITERAȚIE POLINOMIALĂ (II)

(Rezumat)

Continuând lucrarea proprie [5], autorul expune problema alegerii polinomului de convergență și concluziile lucrării.

*) Remarques. [2] et [3] sont publiés à l'Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy, France, 42 avenue de la Libération, sous la direction de M. le Directeur prof. dr. Jean Legras.

FORMULES DE CUBATURE AVEC UN PETIT NOMBRE DE NOEUDS (II)

PAR

D. V. IONESCU

Dans ce que suit nous conserverons les notations et le numérotage de notre travail [7], inséré dans le même *Bulletin*.

§ 4. Formules à 5 paramètres

14. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, A_1 \mu_1^2 = \frac{1}{12}, A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, A_1 \mu_1^4 = \frac{1}{80},$$

à cinq paramètres, conduit à la formule de cubature

$$(25) \iint_D f dx dy = \frac{5S}{36} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{2S}{9} [f(M'_1) + f(M'_3)].$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}, \mu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$, et les noeuds M'_1, M'_3 correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

15. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, A_1 \lambda_1^4 = \frac{1}{80}, A_2 \mu_2^4 = \frac{1}{80},$$

conduit à la formule de cubature

$$(26) \iint_D f dx dy = \frac{5S}{18} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)] - \frac{S}{9} f(P),$$

les noeuds M'_1 , M'_3 et M''_2 , M''_4 correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et à $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

16. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, A_1 \lambda_1^2 = \frac{1}{12}, A_1 \mu_1^2 + A_2 \mu_2^2 = \frac{1}{12}, A_1 \lambda_1^4 = \frac{1}{80}, A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144},$$

à cinq paramètres, conduit à la formule

$$(27) \iint_D f dx dy = \frac{5S}{36} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{2S}{9} [f(M'_2) + f(M''_4)].$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

et les noeuds M'_2, M''_4 correspondent à $\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

17. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}$$

est à sept paramètres $A_1, \lambda_1, \mu_1, A_2, \lambda_2, A_3, \mu_3$. Il se réduit à un système à cinq paramètres si on ajoute les équations:

$$\lambda_1 = \mu_1, A_2 = A_3.$$

Ce système conduit à la formule de cubature

$$(28) \iint_D f dx dy = \frac{9S}{196} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{40S}{196} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)],$$

établie par R. v. Mises [2].

Dans cette formule les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}}$. Les noeuds M'_1, M'_3 et M'_2, M'_4 correspondent à $\lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{15}}$ et $\mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{15}}$.

5. Formules à six paramètres

18. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \mu_1^2 = \frac{1}{12}, A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, A_1 \mu_1^4 = \frac{1}{80},$$

à six paramètres, conduit à formule

$$(29) \iint_D f dx dy = \frac{5S}{36} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{5S}{63} [f(M'_1) + f(M'_3)] + \frac{2S}{7} f(P),$$

où les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$

et les noeuds M'_1, M'_3 correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{15}}$.

19. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, A_1 \mu_1^4 + A_3 \mu_3^4 = \frac{1}{80},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_3$$

est à six paramètres et conduit à la formule de cubature

$$(30) \iint_D f dx dy = \frac{25S}{324} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{20S}{162} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)] + \frac{16S}{81} f(P).$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Les

noeuds M'_1, M'_3 et M'_2, M'_4 correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

20. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12}, A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, \quad A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, \quad A_1 \mu_1^4 + A_3 \mu_3^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2},$$

conduit à la formule de cubature

$$(31) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{36} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \\ + \frac{5S}{18} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + f(M'_4)] - \frac{2S}{9} f(P).$$

Les noeuds M'_1, M'_3 et M'_2, M'_4 correspondent à $\lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\mu_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}}$.

La formule (31) est citée par S. E. Mikeladze dans son livre [1, p. 502].

21. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 \mu_1^2 + A_3 \mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 = \frac{1}{80}, \quad A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 = \frac{1}{144}, \quad A_1 \mu_1^4 + A_3 \mu_3^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2},$$

est à six paramètres et conduit à la formule de cubature

$$(32) \quad \iint_D f dx dy = \frac{121S}{900} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \\ + \frac{40S}{900} [f(P'_1) + f(P'_2) + f(P'_3) + f(P'_4)] + \frac{256S}{900} f(P);$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{11}}$.

22. Considérons la système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1, \\ A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 + A_3 \lambda_3^2 + A_4 \lambda_4^2 + A_5 \lambda_5^2 + A_6 \lambda_6^2 = \frac{1}{12}, \\ A_1 \mu_1^2 + A_2 \mu_2^2 + A_3 \mu_3^2 + A_4 \mu_4^2 + A_5 \mu_5^2 + A_6 \mu_6^2 = \frac{1}{12}, \\ A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 + A_3 \lambda_3^4 + A_4 \lambda_4^4 + A_5 \lambda_5^4 + A_6 \lambda_6^4 = \frac{1}{80},$$

$$A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 + A_2 \lambda_2^2 \mu_2^2 + A_3 \lambda_3^2 \mu_3^2 + A_4 \lambda_4^2 \mu_4^2 + A_5 \lambda_5^2 \mu_5^2 + A_6 \lambda_6^2 \mu_6^2 = \frac{1}{144},$$

$$A_1 \mu_1^4 + A_2 \mu_2^4 + A_3 \mu_3^4 + A_4 \mu_4^4 + A_5 \mu_5^4 + A_6 \mu_6^4 = \frac{1}{80}$$

et supposons que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_6 = 0,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}, \quad \mu_4 = 0, \quad \mu_5 = \frac{1}{4}, \quad \mu_6 = 0.$$

C'est un système à six paramètres qui conduit à la formule de cubature

$$(33) \quad \iint_D f dx dy = \frac{5S}{180} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{4S}{180} [f(P'_1) + \\ + f(P'_2) + f(P'_3) + f(P'_4)] + \frac{64S}{180} [f(M'_1) + f(M'_2) + f(M'_3) + \\ + f(M'_4)] - \frac{112S}{180} f(P),$$

qui a été donnée par G. W. Tyler [5].

23. Considérons aussi le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \\ A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 + A_3 \lambda_3^2 + A_4 \lambda_4^2 = \frac{1}{12}, \\ A_1 \mu_1^2 + A_2 \mu_2^2 + A_3 \mu_3^2 + A_4 \mu_4^2 = \frac{1}{12}, \\ A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 + A_3 \lambda_3^4 + A_4 \lambda_4^4 = \frac{1}{80}, \\ A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 + A_2 \lambda_2^2 \mu_2^2 + A_3 \lambda_3^2 \mu_3^2 + A_4 \lambda_4^2 \mu_4^2 = \frac{1}{144}, \\ A_1 \mu_1^4 + A_2 \mu_2^4 + A_3 \mu_3^4 + A_4 \mu_4^4 = \frac{1}{80}$$

et supposons que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \lambda, \quad \lambda_4 = \lambda, \quad \mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \mu, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}, \quad \mu_4 = \mu.$$

On obtient un système à six paramètres, qui conduit à la formule de cubature

$$(34) \quad \iint_D f dx dy = \frac{S}{144} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{5S}{144} [f(U_1) + f(U_2) + f(U_3) + f(U_4)] + \frac{5S}{144} [f(T_1) + f(T_2) + f(T_3) + f(T_4)] + \frac{25S}{144} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

où les noeuds U_1, U_2, U_3, U_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$, les noeuds T_1, T_2, T_3, T_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right)$ et les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$.

La formule (34) a été établie par D. D. Stancu [4].

24. Considérons le système d'équations

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 &= 1, \\ A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 + A_3 \lambda_3^2 + A_4 \lambda_4^2 + A_5 \lambda_5^2 + A_6 \lambda_6^2 + A_7 \lambda_7^2 + A_8 \lambda_8^2 + A_9 \lambda_9^2 &= \frac{1}{12}, \\ A_1 \mu_1^2 + A_2 \mu_2^2 + A_3 \mu_3^2 + A_4 \mu_4^2 + A_5 \mu_5^2 + A_6 \mu_6^2 + A_7 \mu_7^2 + A_8 \mu_8^2 + A_9 \mu_9^2 &= \frac{1}{12}, \\ A_1 \lambda_1^4 + A_2 \lambda_2^4 + A_3 \lambda_3^4 + A_4 \lambda_4^4 + A_5 \lambda_5^4 + A_6 \lambda_6^4 + A_7 \lambda_7^4 + A_8 \lambda_8^4 + A_9 \lambda_9^4 &= \frac{1}{80}, \\ A_1 \lambda_1^2 \mu_1^2 + A_2 \lambda_2^2 \mu_2^2 + A_3 \lambda_3^2 \mu_3^2 + A_4 \lambda_4^2 \mu_4^2 + A_5 \lambda_5^2 \mu_5^2 + A_6 \lambda_6^2 \mu_6^2 + A_7 \lambda_7^2 \mu_7^2 + A_8 \lambda_8^2 \mu_8^2 + \\ &+ A_9 \lambda_9^2 \mu_9^2 = \frac{1}{144}, \\ A_1 \mu_1^4 + A_2 \mu_2^4 + A_3 \mu_3^4 + A_4 \mu_4^4 + A_5 \mu_5^4 + A_6 \mu_6^4 + A_7 \mu_7^4 + A_8 \mu_8^4 + A_9 \mu_9^4 &= \frac{1}{80} \end{aligned}$$

et supposons que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = \frac{1}{4}, \lambda_6 = \frac{1}{2}, \lambda_7 = \frac{1}{4}, \lambda_8 = \frac{1}{2}, \lambda_9 = 0, \\ \mu_1 &= 0, \mu_2 = \frac{1}{4}, \mu_3 = 0, \mu_4 = \frac{1}{2}, \mu_5 = \frac{1}{4}, \mu_6 = \frac{1}{4}, \mu_7 = \frac{1}{2}, \mu_8 = \frac{1}{2}, \mu_9 = 0, \\ A_1 &= A_2, \quad A_3 = A_4, \quad A_6 = A_7. \end{aligned}$$

On obtient un système à six paramètres qui conduit à la formule de cubature

$$(35) \quad \iint_D f dx dy = \frac{96S}{2025} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{21S}{2025} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{256S}{2025} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{56S}{2025} [f(U_1) + f(U_2) + f(U_3) + f(U_4)],$$

obtenue par D. D. Stancu dans [3, p. 95].

25. Les exemples donnés ci-dessus montrent assez clairement l'importance de la classe de formules de cubature (1) ou (3) et le caractère unitaire de la méthode utilisée pour les obtenir.

Reçue le 18 IV 1967

Université „Babeş-Bolyai“, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Микеладзе С. Е., Численные методы математического анализа. Физматгиз, М., 1953.
2. v. Mises R., *Formules de cubature*. Rev. Math. de l'Union Interbalcanique, 1936, 1, pp. 17-27.
3. Stancu D. D., *Contribuții la integrarea numerică a funcțiilor de mai multe variabile*. St. și cerc. de matem., Acad. R. P. R., filiala Cluj, 1957, VIII, pp. 75-101.
4. — *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcțiile de două variabile*. St. și cerc. de matem., Acad. R. P. R., filiala Cluj, 1958, IX, pp. 351-369.
5. Tyler G. W., *Numerical Integration of Function of Several Variables*. Canad. J. of Math., 1953, 5, pp. 393-412.
6. Ionescu D. V., *Formules de cubature avec un petit nombre de noeuds (I)*. Bul. Inst. polit. Iași, 1967, XIII (XVII), 3-4, pp. 111-118.

FORMULE DE CUBATURĂ CU UN NUMĂR REDUS DE NODURI (II)

(Rezumat)

Autorul, continuându-și expunerea cercetării începută în acest *Buletin* [6], prezintă rezultatele obținute referitoare la formule cu 5 și 6 parametri.