

# ÜBER DIE DURCHFÜHRUNGSDAUER EINES ARBEITSGANGES IN DER ABLAUFPLANUNG.

von

L. NÉMETI (CLUJ)

1. In den Problemen der Ablaufplanung betrachtet man eine Werkstatt, die gewisse Arbeitsgänge auf den Werkzeugmaschinen ihres Maschinenparks durchzuführen hat. Zwecks Aufstellung der Bedingungen, welche durch ein Fertigungsprogramm erfüllt werden müssen, kann man wie folgt vorgehen.

Die Arbeitsgänge werden von 1 bis  $n$  numeriert, diese Zahlen bilden die Menge  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Die Bearbeitungsmaschinen werden ebenfalls numeriert (von 1 bis  $m$ ), wir erhalten dadurch die Menge  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Für jeden Arbeitsgang ist die dazugehörige Maschine gegeben, d.h. die Menge  $N$  besitzt die Verteilung

$$(1) \quad N = \bigcup_{k \in M} N_k,$$

wobei die Teilmenge  $N_k$  die Kennzahlen derjenigen Arbeitsgänge enthält, welche auf der Maschine mit der Kennzahl  $k \in M$  durchgeführt werden.

Die verwendete Technologie schreibt zwischen gewissen Arbeitsgängen eine Reihenfolgebeziehung vor. D.h. es ist die Menge  $H = \{(i, j)\} \subset N \times N$  gegeben und die Beziehung  $(i, j) \in H$  bedeutet, dass der Arbeitsgang  $j$  ein (unmittelbarer) technologischer Nachfolger von  $i$  ist.

Die Durchführungsdauer  $t_i$  des Arbeitsganges  $i \in N$  sei ebenfalls gegeben. Das Fertigungs- (oder Ablauf-) programm ist erstellt, wenn man für einen jeden Arbeitsgang  $i \in N$  seinen Anfangszeitpunkt  $x_i$  festgelegt hat.

Bei einem zulässigen (technologisch möglichen) Ablaufprogramm sind folgende zwei wesentlichen Bedingungen zu erfüllen. ([1], [2], [3]): Die Reihenfolgebedingungen

$$(2) \quad x_j - x_i \geq t_i, \quad (i, j) \in H,$$

und die Nicht-Interferenzbedingungen

$$(3) \quad (x_j - x_i \geq t_i) \vee (x_i - x_j \geq t_j), \quad (i, j) \in J.$$

Hierbei ist

$$(4) \quad J = \{(i, j) \mid i < j; \ i, j \in N_k; \ k \in M\} \subset N \times N$$

die Menge derjenigen Arbeitsgangspaare, die auf derselben Maschine durchgeführt werden.

Bei einer genauen Analyse der herrschenden Umstände in der Maschinenbauindustrie stellt man jedoch fest, dass die beiden in den Formeln (2) und (3) vorkommenden Grössen  $t$ , tatsächlich nicht identisch sind. Vorliegende Arbeit hat die Klärung dieses Sachverhalts zum Gegenstand.

Die Dauer eines Arbeitsganges teilt sich in:

— die *Vorbereitungszeit*  $\delta$ ; während dieser Zeit wird die zum Arbeitsgang gehörende Werkzeugmaschine vorbereitet: sie wird gesäubert, der Arbeiter untersucht die Werkstückzeichnung und die technologischen Bearbeitungsvorschriften, bereitet die Werkzeuge und Vorrichtungen vor, stellt die Maschine ein usw.; für diese Tätigkeiten braucht sich das zu bearbeitende Werkstück noch nicht bei der Maschine zu befinden;

— die *Bearbeitungszeit*  $t^0$ ; das Werkstück befindet sich auf der Maschine und es findet die eigentliche Bearbeitung statt;

— die *Beschliesszeit*  $\gamma$ ; diese enthält die Gütekontrolle der Bearbeitung und den Transport des Werkstücks zur nächsten Bearbeitungsstelle; in dieser Zeit sind Maschine und Werkstück wieder voneinander getrennt.

Ausserdem handelt es sich im Allgemeinen nicht um ein einziges Werkstück, sondern um ein *Los* von identischen Werkstücken, welche eins nach dem anderen auf einer Maschine bearbeitet werden (ohne dabei andere Werkstücke zwischen ihnen zur Bearbeitung einzufügen). Im Allgemeinen werden die Werkstücke eines Loses gemeinsam zur nächsten Maschine transportiert. Die Dauer  $t^0$  und  $\gamma$  beziehen sich auf ein Los.

Manchmal wird ein Los in eine Anzahl  $v$  gleicher Teillose unterteilt, welche ungeteilt zur nächsten Maschine wandern. Mit anderen Worten, das Los verhält sich als ein unteilbares Ganzes bei der Bearbeitung und ebenso das Teillos beim Transport (u. Gütekontrolle).

Der technologisch folgende Arbeitsgang kann demnach nach Beendigung der Bearbeitung, Kontrolle und Transport des ersten Teilloses angefangen werden.

Für einen Arbeitsgang  $i \in N$  besitzen wir also folgende Daten:

$v_i$ : Anzahl der Teillose

$\delta_i$ : Vorbereitungszeit

$t_i^0$ : Bearbeitungszeit

$\gamma_i = \frac{\gamma_i'}{v_i} + \gamma_i''$ : Beschliesszeit für ein Teillos

$\frac{\gamma_i'}{v_i}$ : veränderlicher (von  $v_i$  abhängige) Teil der Beschliesszeit (Gütekontrolle)

$\gamma_i''$ : unveränderlicher Teil der Beschliesszeit (Transport).  
Wir führen noch folgende Grössen ein

$t_i = \delta_i + t_i^0$ : Maschinenzeit

$t_i' = t_i^0 + \gamma_i$ : Erzeugniszeit (Loszeit)

$\tau_i = \frac{t_i^0}{v_i} + \gamma_i$ : Erzeugniszeit für ein Teillos.

Die sieben Grössen  $v$ ,  $\delta$ ,  $t^0$ ,  $\gamma$ ,  $t$ ,  $t'$  und  $\tau$  sind unter sich durch die drei Bedingungen

$$(5) \quad \begin{cases} t = \delta + t^0 \\ t' = t^0 + \gamma \\ \tau = \frac{t^0}{v} + \gamma \end{cases}$$

gebunden, also müssen 4 unter ihnen gegeben sein, und dann kann man die anderen drei berechnen.

Um nun die Reihenfolgebeziehungen (2) abzuleiten, betrachten wir die Abbildung, in welcher es bedeutet:

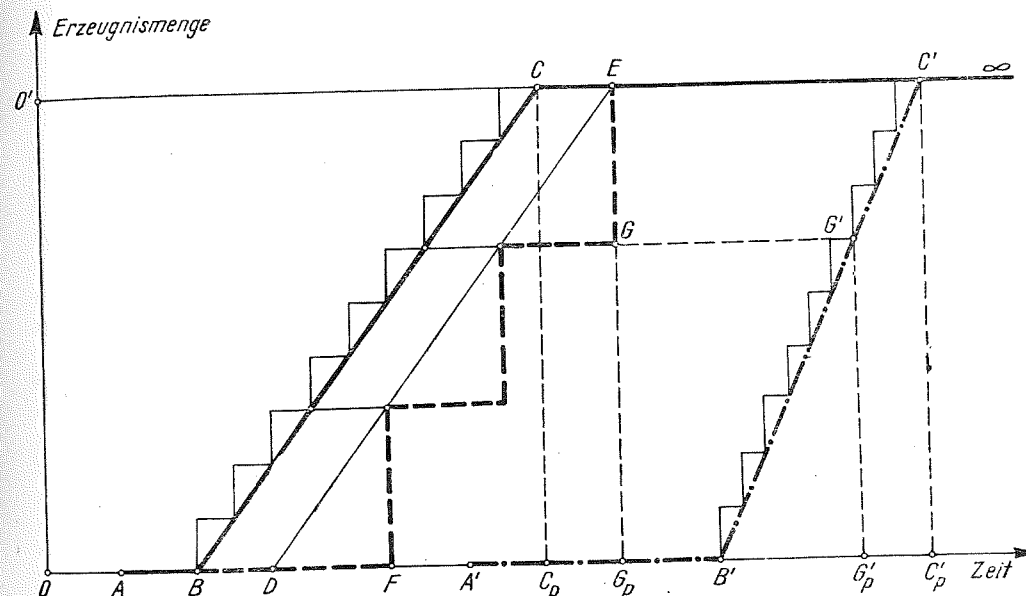
$$OA = x_i \quad BC_p = t_i^0 \quad BF = \tau_i$$

$$OA' = x_i \quad B'C'_p = t_i^0 \quad BD = \gamma_i$$

$$AB = \delta_i \quad AC_p = t_i \quad GE = \frac{1}{v_i} \text{ (in der Abbildung } v_i = 3 \text{)}$$

$$A'B' = \delta_i \quad A'C'_p = t_i \quad OO' = 1 \text{ die Losgrösse, dass heisst}$$

dieselbe wurde als Masseinheit für die Erzeugnismengen genommen.



Die Ordonaten des Linienzuges  $OABCE\infty$  aus der Abbildung geben die Mengen der Erzeugnisse (als Funktion der Zeit) an, welche von der Werkzeugmaschine „verschluckt“ werden um Arbeitsgang  $i$  durchzuführen. Hier wurde eine kleine Vereinfachung vorgenommen. Da es sich um Einzelstücke handelt, müsste man statt des Geradenstückes  $BC$  — das einem stetigen Materialverbrauch entspricht — eher

die, neben diesem Geradenstück dünn gezeichnete — Treppenfunktion verwenden. Diese Vereinfachung ändert aber keineswegs die zu erhaltenden Ergebnisse.

Die Ordonaten des Linienzuges  $OABFGE\infty$ , gestrichelt gezeichnet — — —, bedeuten die Mengen der bearbeiteten, geprüften und in Teillosen zur nächsten Werkzeugmaschine gebrachten Erzeugnisse, d.h. die Erzeugnismengen, welche zur Ausführung des Arbeitsganges  $j$  bereitgestellt sind.

Die Ordonaten des Linienzuges  $AO'B'C'\infty$  schliesslich, strichpunktiert gezeichnet — · — · —, geben die während der Durchführung des Arbeitsganges  $j$  „verschluckten“ Erzeugnismengen an; diese Mengen sind also notwendig um den ungestörten Verlauf des Arbeitsganges  $j$  zu sichern. Um das zu erreichen dürfen die Ordonaten des Linienzuges — · — · — nirgends grösser sein als die Ordonaten des Linienzuges — — — (die zur Durchführung des Arbeitsganges  $j$  benötigten Mengen sollen nie grösser als die zur Verfügung stehenden Mengen sein). Wir haben somit die Bedingungen

$$OF \leq OB' \text{ und } OG_p \leq OG'_p.$$

Man erhält hieraus durch elementare Rechnungen

$$x_j + \delta_j \geq x_i + \delta_i + \tau_i$$

und

$$x_j + \frac{\delta_j + (\nu_i - 1)t_j}{\nu_i} \geq x_i + \tau_i + \frac{\delta_i + (\nu_i - 1)t_i}{\nu_i},$$

oder, indem man beide Ungleichungen vereinigt

$$x_j - x_i \geq t_{ij}$$

wobei

$$(6) \quad t_{ij} = \tau_i + \max \left[ \delta_i - \delta_j, \frac{\delta_i - \delta_j + (\nu_i - 1)(t_i - t_j)}{\nu_i} \right] = \\ = \delta_i - \delta_j + \frac{t_i^0}{\nu_i} + \gamma_i + \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \max(t_i^0 - t_j^0, 0)$$

gesetzt wurde.

Die Reihenfolgebeziehungen (2) werden also durch

$$(7) \quad x_j - x_i \geq t_{ij}, \quad (i, j) \in H$$

ersetzt, wobei die durch die Formel (6) definierten Grössen  $t_{ij}$  als gegeben betrachtet werden können.

Die in Formel (3) vorkommenden Grössen  $t_i$  sind gerade die in diesem Abschnitt eingeführten Maschinenzeiten. Die Nicht-Interferenzbedingungen (3) bleiben also unverändert.

## 2. Einige Bemerkungen zur Formel (6).

a) Die Zahlen  $t_{ij}$  können auch negativ sein. Auf jeden Fall gilt jedoch

$$(8) \quad t_{ij} \geq t_i - t_j$$

In der Tat kann Arbeitsgang  $j$ , wenn er der technologische Nachfolger von  $i$  ist, nicht vor dem Abschluss von  $i$  enden, auch wenn für die Anfangspunkte dieser Arbeitsgänge dies nicht unbedingt der Fall ist. Das bedeutet, dass in der Abbildung der Punkt  $C'$  rechts vom Punkt  $C$  liegen muss, was evident ist. Es gilt also

$$x_j - x_i \geq t_i - t_j$$

Diese Beziehung gilt auch für den kleinsten Wert von  $x_i - x_j$ , der gerade  $t_{ij}$  ist. Hieraus ergibt sich die Beziehung (8).

b) Hier die Werte von  $t_{ij}$  für einige Spezialfälle:

$$(9) \quad \begin{cases} \nu_i = 1, & \gamma_i = \delta_j = 0: & t_{ij} = t_i \\ \nu_i = 1, & \delta_i = \delta_j = 0: & t_{ij} = t_i^0 \\ \nu_i = 1 & : & t_{ij} = \delta_i + t_i^0 - \delta_j = \delta_i + t_i^0 + \gamma_i - \delta_j \\ \nu_i = \infty \text{ (gross)} & : & t_{ij} = \gamma_i + \max(\delta_i - \delta_j, t_i - t_j) = \\ & & = \delta_i + \gamma_i - \delta_i + \max(t_i^0 - t_j^0, 0). \end{cases}$$

c) Es kann auch in anderen Fällen  $t_{ij} < 0$  vorkommen. Es werde z. B. verlangt, dass Arbeitsgang  $j$  spätestens um  $t_i^*$  Zeiteinheiten nach dem Anfang des Arbeitsganges  $i$  angefangen werden soll. D. h. wir setzen

$$x_j \leq x_i + t_i^*$$

oder

$$(10) \quad x_i - x_j \geq -t_i^* = t_{ij}^* (< 0).$$

Wenn, ausser dieser Bedingung, auch noch die „gewöhnliche“ Beschränkung

$$x_j - x_i \geq t_{ij}$$

vorliegt, so erscheint die ungewöhnliche Situation, dass Arbeitsgang  $i$  (wie auch  $j$ ) sein eigener technologischer Nachfolger ist, was in einigen Fällen die Behandlung von Reihenfolgeproblemen der Fertigung erschwert. Diese Schwierigkeit kann man manchmal umgehen, indem man die zwei Arbeitsgänge  $i$  und  $j$  als einen einzigen Arbeitsgang betrachtet. [Zum Beispiel besteht die Härtung eines stählernen Werkstücks aus zwei Arbeitsgängen: die Erhitzung im Ofen und die nachfolgende Abschreckung im Wasser- oder Ölbad. Wir haben hier genau die vorhin beschriebene Lage vor uns, denn die Abschreckung erfolgt nach der Herausnahme des Werkstücks

aus dem Ofen, sie muss andererseits unmittelbar nach dieser Herausnahme stattfinden. Indem man die Härtung als einen einzigen Arbeitsgang auffasst, hat man wieder den „normalen“ Fall vor sich.

Eingegangen am 31.III.1968

#### LITERATURVERZEICHNIS

1. L. NÉMETI, *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen*. Mathematica, Cluj, 6 (1964), S. 87–99.
2. L. NÉMETI — F. RADÓ, *Sur la programmation temporelle de la fabrication*. Mathematica, Cluj, 8 (1966), S. 109–115.
3. L. NÉMETI, *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung*. Mathematica, Cluj, 9, (1967), S. 129–140.