

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A POLINOAMELOR

DE

IOAN ȘERB

(Cluj)

Fiind date două funcții $f(x)$ și $g(x)$ nedescrescătoare pe $[a, b]$, spunem că $g(x)$ crește mai încet decât $f(x)$ dacă pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel ca

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$$

are loc relația

$$g(x_2) - g(x_1) \leq f(x_2) - f(x_1).$$

Relativ la această noțiune introdusă mai sus se demonstrează teorema 1.

Teorema a doua din lucrare precizează care este gradul minimal al polinomului, care să crească mai încet decât două polinoame date.

În încheierea lucrării se face următoarea generalizare :

Fiind date n polinoame $f_1, \dots, f_n$ care verifică ipotezele din enunțul primei teoreme, se găsește o condiție necesară și suficientă pentru ca să existe un polinom al cărui grad se precizează și care să crească mai încet decât cele n polinoame date.

Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții nedescrescătoare definite pe $[a, b]$.

DEFINIȚIE. Spunem că funcția $g(x)$ crește mai încet decât funcția $f(x)$, dacă pentru orice pereche de puncte x_1, x_2 astfel ca

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b,$$

are loc inegalitatea:

$$g(x_2) - g(x_1) \leq f(x_2) - f(x_1).$$

TEOREMA 1. Dacă $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt două polinoame crescătoare pe $[a, b]$, întotdeauna există un polinom crescător pe $[a, b]$ astfel ca aceasta să crească mai încet și decât polinomul $f_1(x)$ și decât polinomul $f_2(x)$.

Demonstrație. Fie :

$$f_1'(x) = (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_r)^{p_r} P_1(x),$$

$$f_2'(x) = (x-a)^{a_2}(b-x)^{b_2}(x-x_1)^{q_1} \dots (x-x_r)^{q_r} P_2(x),$$

unde $P_1(x)$ și $P_2(x)$ sînt polinoame ce nu se anulează pe $[a, b]$, iar $a_1, b_1, p_1, \dots, p_r, a_2, b_2, q_1, \dots, q_r$ sînt numere naturale sau unele nule, iar $x_1, \dots, x_r$ sînt puncte din intervalul (a, b) . În plus, pentru că $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt crescătoare pe $[a, b]$, $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ trebuie să fie numere pare. $P_1(x)$ și $P_2(x)$ fiind polinoame pozitive pe $[a, b]$, există un număr pozitiv, P , astfel ca pe $[a, b]$ să avem

$$0 < P < P_1(x),$$

$$0 < P < P_2(x).$$

Fie acum :

$$a_0 = \max(a_1, a_2),$$

$$b_0 = \max(b_1, b_2),$$

$$s_i = \max(p_i, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Fie M un număr pozitiv, astfel ca pe $[a, b]$

$$M > L_1(x) = (x-a)^{a_0-a_1}(b-x)^{b_0-b_1}(x-x_1)^{s_1-p_1} \dots (x-x_r)^{s_r-p_r},$$

$$M > L_2(x) = (x-a)^{a_0-a_2}(b-x)^{b_0-b_2}(x-x_1)^{s_1-q_1} \dots (x-x_r)^{s_r-q_r}.$$

În baza notațiilor de mai sus vom demonstra următoarele inegalități (ce au loc în intervalul $[a, b]$) :

$$\frac{P}{M} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} \leq f'_1(x)$$

și

$$\frac{P}{M} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} \leq f'_2(x).$$

Este suficient să demonstrăm prima inegalitate, întrucît, din motive de simetrie, cea de a doua se demonstrează analog.

Avem :

$$\frac{P}{M} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} \leq$$

$$\leq \frac{1}{M} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} P_1(x) \leq$$

$$\leq (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_r)^{p_r} P_1(x) = f'_1(x),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Cu aceste considerații putem afirma acum că există un polinom crescător pe $[a, b]$, care crește mai încet și decît polinomul $f_1(x)$ și decît polinomul $f_2(x)$. Acest polinom este :

$$\Psi(x) = \frac{P}{M} \int_a^x (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} dx.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \Psi(x_2) - \Psi(x_1) &= \frac{P}{M} \int_{x_1}^{x_2} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} dx \leq \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} f'_1(x) dx = f_1(x_2) - f_1(x_1). \end{aligned}$$

Analog se demonstrează că $\Psi(x_2) - \Psi(x_1) \leq f_2(x_2) - f_2(x_1)$.

Polinomul astfel găsit are gradul

$$a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1.$$

Întotdeauna există un polinom de grad mai mare decît $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$, care crește mai încet și decît $f_1(x)$ și decît $f_2(x)$.

Se verifică ușor că polinomul

$$\Psi_1(x) = \frac{P}{M} \int_a^x (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1} \dots (x-x_r)^{s_r} \left[\frac{x+|a|+|b|}{2(|a|+|b|)} \right]^n dx,$$

unde n este un număr natural, este polinomul care verifică proprietatea de mai sus.

TEOREMA 2. Nu există nici un polinom de grad mai mic decît $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$ care să crească mai încet și decît $f_1(x)$ și decît polinomul $f_2(x)$ (notațiile fiind cele de mai sus).

Vom presupune contrariul, că există un polinom $R_1(x)$ de grad mai mic decît $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$, care crește mai încet și decît $f_1(x)$ și decît $f_2(x)$.

Atunci

$$\frac{R_1(x) - R_1(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f_1(x) - f_1(x_1)}{x - x_1}$$

pentru orice x și x_1 din $[a, b]$.

Deci $R'_1(x_1) \leq f'_1(x_1)$ pentru orice $x_1 \in [a, b]$, sau $R'_1(x) \leq f'_1(x)$ și analog $R'_1(x) \leq f'_2(x)$.

Dar, întrucît $R'_1(x) \geq 0$ pe $[a, b]$, rezultă că se poate scrie

$$R'_1(x) = (x-a)^{a_3}(b-x)^{b_3}(x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_r)^{m_r} R(x),$$

unde $R(x)$ este un polinom ce nu se mai anulează pe $a, b, x_1, \dots, x_r$ și $m_1, \dots, m_r$ sînt pare. Fie m gradul lui $R(x)$. Conform ipotezei adoptate, avem :

$$a_3 + b_3 + m_1 + \dots + m_r + m + 1 < a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1.$$

Atunci cel puțin una din următoarele inegalități este valabilă :

$$a_3 < a_0,$$

$$b_3 < b_0,$$

$$m_1 < s_1,$$

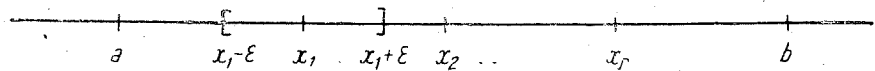
$$\dots$$

$$m_r < s_r.$$

În caz contrar, inegalitatea de mai sus nu ar mai avea loc. Presupunem că este verificată inegalitatea :

$$m_1 < s_1.$$

Construim un interval $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$, care să nu mai cuprindă alte rădăcini ale lui $R'_1(x)$ decât pe x_1 :



Pe $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$, $(x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_r)^{m_r} R(x) \geq R > 0$.

Deci $R'_1(x) \geq R(x-x_1)^{m_1} = \frac{R(x-x_1)^{s_1}}{(x-x_1)^{s_1-m_1}} = \frac{R(x-x_1)^{p_1}}{(x-x_1)^{p_1-m_1}}$ (am presupus că $s_1 = p_1$). Pe $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ există un $S > 0$ astfel ca

$$S \geq (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_2)^{p_2} \dots (x-x_r)^{p_r} P_1(x).$$

Deci

$$R'_1(x) \geq \frac{R}{S} \frac{f'_1(x)}{(x-x_1)^{p_1-m_1}}.$$

Pentru x suficient de apropiat de x_1 avem

$$R'_1(x) > f'_1(x),$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută.

În concluzie, condiția necesară și suficientă ca să existe un polinom de gradul k , astfel încât să crească mai încet decât polinoamele $f_1(x)$ și $f_2(x)$, este : $k \geq a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$ (notațiile fiind cele de la prima teoremă).

Generalizare : Dacă $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sînt n polinoame pentru care :

$$f'_1(x) = (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_r)^{p_r} P_1(x),$$

$$f'_2(x) = (x-a)^{a_2}(b-x)^{b_2}(x-x_1)^{q_1} \dots (x-x_r)^{q_r} P_2(x),$$

$$\dots$$

$$f'_n(x) = (x-a)^{a_n}(b-x)^{b_n}(x-x_1)^{l_1} \dots (x-x_r)^{l_r} P_n(x),$$

condiția necesară și suficientă ca să existe un polinom de gradul k astfel încât să crească mai încet decât cele n polinoame este

$$k \geq \max(a_1, \dots, a_n) + \max(b_1, \dots, b_n) + \sum_{i=1}^n \max(p_i, q_i, \dots, l_i) + 1.$$

Primită la redacție la 28 noiembrie 1967

Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj.
Facultatea de matematică mecanică,
Catedra de Analiză

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES POLYNÔMES

(RÉSUMÉ)

Étant donné deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ non décroissantes sur $[a, b]$, nous disons que $g(x)$ croît plus lentement que $f(x)$ si pour tous les $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, on a la relation $g(x_2) - g(x_1) < f(x_2) - f(x_1)$. On démontre le théorème :

Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux polynômes croissants sur $[a, b]$, il existe toujours un polynôme croissant sur $[a, b]$, tel que celui-ci croisse plus lentement que $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

On précise le degré du polynôme de degré minimal, qui croît plus lentement que les polynômes donnés. Ce résultat se généralise pour le cas où à la place des polynômes f_1 et f_2 on considère n polynômes $f_1, f_2, \dots, f_n$, croissants sur $[a, b]$, en présentant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un polynôme croissant sur $[a, b]$, qui croît plus lentement que $f_1, \dots, f_n$.