# ORIENTĂRI ACTUALE ÎN ANALIZA NUMERICĂ

Dr. OLEG ARAMĂ

După cum se știe, dezvoltarea cercetărilor de matematică a suferit în ultimii ani adînci modificări, atît în ceea ce privește orientarea lor, cît și în privința organizării întregii activități de cercetare. Un rol de seamă în aceste modificări l-au avut, pe de o parte, perfecționarea mașinilor moderne de calcul și lărgirea continuă a sferei lor de aplicație, iar pe de altă parte importanța crescîndă pe care matematica o are în rezolvarea numeroaselor probleme pe care le ridică în prezent dezvoltarea tehnicii și industriei, desfășurarea întregii vieți economice și chiar în studiul multor probleme din diferite alte ramuri ale științei. Utilizarea din ce în ce mai amplă și mai complexă a mașinilor moderne de calcul a contribuit nu numai la o îmbogățire a conținutului matematicii, ci și la o lărgire considerabilă a domeniilor ei de aplicabilitate. Astăzi, metode și numeroase rezultate ale matematicii se impun cu o vigoare crescîndă în fizică, medicină, biologie, economie, lingvistică și în alte ramuri ale activităților teoretice sau practice. În acest proces de pătrundere a matematicii în domeniile menționate, o deosebită importanță se atribuie astăzi analizei numerice, disciplină în plină dezvoltare a matematicii moderne, care include un întreg ansamblu de cercetări în domeniul teoriei, practicii și tehnicii calculului, cu noile aspecte pe care le imprimă utilizarea mașinilor rapide de calcul. Tot aici se includ și cercetările privind fundamentele teoretice ale metodelor de aproximare. În etapa actuală, datorită progresului mare înregistrat în tehnică și în industrie și datorită problemelor complexe pe care le ridică conducerea în economie, aplicarea cu succes a matematicii în practică este posibilă numai la nivelul celor mai avansate și mai abstracte cercetări de matematică. Numai pe baza unor astfel de cercetări este posibilă elaborarea metodelor de calcul adecvate rezolvării problemelor menționate. Însăși utilizarea mașinilor electronice de calcul în rezolvarea diverselor probleme pe care le ridică practica și cercetarea fundamentală este într-o mare măsură condiționată de modul în care este folosit întregul bagaj al teoriilor matematice.

Aceste fapte fac ca cercetările de analiză numerică să se afle într-un strîns contact cu aproape toate ramurile matematicii moderne.

De aceea se poate considera că o trăsătură caracteristică generală a actualei orientări a cercetărilor de analiză numerică o constituie utilizarea celor mai abstracte teorii matematice în scopul elaborării unor procedee de calcul care să răspundă multiplelor cerințe ale practicii. Vorbind de calcul, nu putem să nu relevăm schimbarea profundă de conținut pe care a suferit-o această noțiune. Dacă în trecut prin calcul se înțelegea o simplă efectuare de operații aritmetice cu evaluarea erorilor respective, astăzi noțiunea matematică de calcul trebuie înțeleasă într-o accepție modernă, ca un ansamblu de operații ale căror reguli de aplicare decurg dintr-o serie de rezultate moderne ale analizei funcționale, teoriei constructive a funcțiilor, teoriei aproximării etc.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm unele direcții actuale de cercetare în domeniul analizei numerice și unele metode noi în studiul problemelor care figurează în sfera de preocupări a acestei discipline.

În numeroasele probleme de analiză numerică se caută să se obțină un număr care depinde de o funcție $f$, adică se caută valoarea unei funcționale $A\ [f]$. Pentru a fixa ideile și pentru simplificarea expunerii, să presupunem că $f$ este o funcție reală de o variabilă reală. Funcționala $A$ poate avea diferite structuri. Unul dintre cazurile cele mai simple ale acestei probleme se întîlnește în calculul valorii unei funcții $f$ sau a derivatei sale de un ordin dat oarecare pe un punct dat, precum și în calculul integralei definite a funcției $f$ pe un interval dat etc. Acest ultim aspect intervine adesea, de exemplu, în diferite metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale sau a altor ecuații funcționale. În cazul cînd funcția $f$ are o structură complicată sau cînd nu se cunoaște suficient legea de corespondență pe care ea o definește, nu se poate obține în mod exact numărul $A\ [f]$. În astfel de cazuri trebuie să ne mulțumim cu o aproximare a acestui număr.

Un aspect important al cercetărilor actuale în domeniul analizei numerice constă în stabilirea unor metode (procedee) care să permită calculul unor astfel de valori aproximative pentru $A\ [f]$. În aceste cercetări se caută metode care să îndeplinească anumite condiții cu privire la posibilitățile de organizare a calculului numeric, la volumul și la simplicitatea acestui calcul, precum și la precizia metodei respective.

Un procedeu destul de general poate fi schematizat prin următoarea egalitate aproximativă : $A\ [f] \approx B\ [f]$, unde $B$ reprezintă o altă funcțională dată, considerată „mai simplă" decît $A$, cu sensul că determinarea numărului $B\ [f]$ se poate efectua pînă la capăt în anumite condiții impuse dinainte. În utilizarea practică a unei astfel de formule de aproximare este în particular important să se aprecieze eroarea ce se comite în cazul formulei respective. În această direcție, studiul delimitării restului formulei de aproximare considerate prezintă o deosebită importanță. Pentru a obține o astfel de delimitare se impune un studiu aprofundat al structurii restului $R\ [f]$. Dacă, de exemplu, $R$ este o funcțională liniară (aditivă și omogenă), ea se poate exprima în condiții destul de generale cu ajutorul unei integrale (integrala lui Stieltjes dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei lui Riesz). Pentru cerințe de ordin practic, o astfel de reprezentare a restului nu este satisfăcătoare, întrucît în delimitările care se obțin dintr-o astfel de reprezentare a restului nu vor interveni



proprietăți referitoare la gradul de exactitate al formulei de aproximare (sau al restului ei). Prin gradul de exactitate (în raport cu un polinom) al unei funcționale liniare $R$ se înțelege cel mai mare întreg $n$ (dacă există) astfel încît $R\ [f] = 0$ pentru orice polinom de gradul $n$. În acest caz, restul se poate exprima printr-o funcțională liniară, avînd ca argument derivata de ordinul $n + 1$ a funcției $f$, dacă, bineînțeles, sînt îndeplinite anumite condiții de existență a unor astfel de expresii. Diferite expresii de acest tip au fost studiate de către numeroși autori, mai ales pentru restul formulelor de derivare și de integrare numerică.

O metodă modernă de studiu al structurii restului formulelor de aproximare ale analizei în sensul problemelor actuale pe care le ridică analiza numerică este așa-numita metodă a funcțiilor convexe de ordin superior, inițiată de acad. T. Popoviciu și dezvoltată de școala de analiză numerică din Cluj, pe care o conduce d-sa. Această metodă permite obținerea unor reprezentări ale restului, deosebit de comode pentru delimitarea lor în practică, după modul de comportare a restului față de funcțiile convexe de un anumit ordin care se precizează. Astfel, de exemplu, dacă $R$ este o funcțională liniară definită pe $C\ [a, b]$, avînd un grad de exactitate egal cu $n$ și proprietatea de a lua valori diferite de zero pentru orice funcție convexă de ordinul $n$ pe $[a, b]$, atunci are loc reprezentarea $R\ [f] = A.\ [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}\ ; f]$, unde $A$ reprezintă o constantă care nu depinde de $f$, iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$ noduri distincte din $[a, b]$. În cazul în care $R$ nu are proprietatea de a lua valori diferite de zero pentru orice funcție convexă, se demonstrează cu ajutorul teoriei funcțiilor convexe de ordin superior că $R\ [f]$ se poate reprezenta ca o sumă de doi termeni de forma celui indicat anterior. Este de menționat faptul că aceste rezultate reprezintă sinteza unor cercetări aprofundate efectuate de acad. Tiberiu Popoviciu cu privire la calculul cu diferențe divizate, care a condus la stabilirea unor remarcabile proprietăți de medie ale lor.

Structura prezentă mai sus a restului $R\ [f]$, pe care-l presupunem că reprezintă o funcțională liniară, a putut fi studiată într-un cadru mai general cu ajutorul unei extinderi convenabile a noțiunii de grad de exactitate. Această generalizare revine a presupune că $R\ [f]$ se anulează pe înveliitoarea liniară a unui număr finit de funcții liniar-independente, care admit anumite proprietăți de interpolare. Bineînțeles că studiul structurii restului $R$ în acest caz a necesitat o generalizare corespunzătoare a noțiunii de diferență divizată și o generalizare convenabilă a noțiunii de funcție convexă. Cercetările în această direcție ale acad. T. Popoviciu au fost extinse pentru cazul neliniar de prof. Elena Popoviciu, obținîndu-se, printre altele, teoreme de medie foarte generale care au deschis noi perspective în studiul structurii restului în cazul formulelor neliniare de aproximare ale analizei. Aplicate în teoria ecuațiilor diferențiale, aceste cercetări au condus la fundamentarea teoretică a metodei de integrare numerică a lui S.A. Ceaplîghin. Totodată ele au condus la elaborarea unei teorii comparative a mulțimilor interpolatoare și au permis precizarea comportamentului elementului de cea mai bună aproximație a unei funcții convexe în raport cu „mulțimi comparabile".

Cercetările cu privire la structura restului formulelor de aproximare liniare sau neliniare ale analizei și cele relativ la teoria inegalităților

diferențiale ale lui Ceaplîghin au subliniat, printre altele, necesitatea studierii condițiilor în care soluțiile unei ecuații diferențiale liniare sau neliniare de ordinul $n$ formează o mulțime interpolatoare de un același ordin $n$.

Problema structurii restului în cazul cînd funcționala $R\ [f]$ nu mai este liniară nu a fost pînă în prezent elucidată în mod mulțumitor în sensul teoriei amintite mai sus. De exemplu, metoda de integrare numerică a lui Runge-Kutta a ecuațiilor diferențiale constituie un procedeu de aproximare de tipul general amintit la începutul prezentei expuneri, procedeu pentru care însă $R\ [f]$ nu reprezintă o funcțională liniară. În acest caz, $f$ este o funcție de două sau de mai multe variabile independente. Faptul că restul în metoda lui Runge-Kutta nu a fost pînă în prezent studiat decît din punctul de vedere al unor delimitări ale sale se datorește în primul rînd structurii sale complicate. Se pare că problema structurii restului $R$ în cazul în care el nu mai reprezintă o funcțională liniară de argument $f$ este în legătură cu generalizarea dată de prof. Elena Popoviciu noțiunii de convexitate în raport cu un sistem interpolator neliniar de funcții. În această ultimă direcție sînt de citat de asemenea lucrările matematicienilor M.I. Morozov și L. Tornheim.

În exemplul menționat mai sus al metodei lui Runge-Kutta, restul depinde de o funcție de mai multe variabile. Cu mult mai puțin a fost studiat restul formulelor de aproximare de forma considerată, $A\ [f] \approx B\ [f]$, în cazul cînd $f$ reprezintă o funcție de mai multe variabile reale. În această direcție se cunosc doar unele rezultate parțiale, cele mai multe dintre ele referindu-se la formule de derivare numerică și la formule de cubatură.

Pentru cazul în care restul $R$ este o funcțională liniară, unele cercetări sistematice cu privire la structura acestui rest se datoresc matematicienilor T. G. Ezrohi și I. A. Ezrohi. Ei au extins la cazul multidimensional rezultatele obținute anterior de E.Ia. Remez privitoare la reprezentările integrale ale restului formulelor liniare de aproximare a funcționalelor liniare definite pe anumite spații de funcții reale de o singură variabilă reală.

Este de menționat rolul important pe care-l joacă teoria interpolării în studiul diverselor procedee de aproximare ale analizei. Vorbind astăzi de această teorie, nu putem să nu relevăm dezvoltarea pe care a suferit-o această teorie în ultima vreme. Problema clasică a interpolării prin polinoame algebrice și prin polinoame trigonometrice a fost generalizată și extinsă în direcții multiple. Cînd afirmăm aceasta, ne gîndim în primul rînd la diversele procedee de interpolare ca acelea studiate de V.L. Goncearov, interpolarea prin sisteme ale lui Cebîșev, interpolarea lacunară, interpolarea prin mulțimi interpolatoare de funcții și diferite sisteme de interpolare în spații abstracte. În același cadru se situează și problema interpolării funcțiilor cu ajutorul soluțiilor ecuațiilor diferențiale, problemă al cărei studiu a primit astăzi un accentuat aspect calitativ și numeric. Ceea ce a făcut însă ca teoria generală a interpolării să primească o semnificație nouă și o importanță sporită a fost descoperirea legăturilor profunde pe care această teorie le are cu tratarea diferitelor clase de funcții din punctul de vedere al comportării lor față de anumite procedee de interpolare date, descoperire care-și are fundamentul în lucrările academicianului Tiberiu Popoviciu și ale școlii de analiză numerică pe care a



fundat-o. Astfel a reieșit în mod clar rolul important pe care-l joacă în matematica modernă noțiunea de convexitate și diversele ei extinderi. Considerarea diferitelor tipuri de convexitate a condus la anumite clase de inegalități diferențiale, al căror studiu, după cum rezultă din lucrările școlii clujene de analiză numerică, are o legătură strînsă cu teoreme de medie relative la ecuațiile diferențiale sau cu teoreme de medie cu caracter foarte general, valabile pentru funcții continue și exprimate cu ajutorul diferențelor divizate sau cu alte funcționale mai generale. Astfel de teoreme stau la baza studiului structurilor formulelor de aproximare liniare și neliniare ale analizei.

Revenind la formula de aproximare $A\ [f] \approx B\ [f]$ considerată anterior, se pune problema alegerii convenabile a funcționalei de aproximare $B$ cu ajutorul căreia să se efectueze calculul (aproximativ) al numărului $A\ [f]$.

Într-o astfel de alegere trebuie în general să se țină seama de anumite cerințe de ordin teoretic sau practic, care limitează domeniul de alegere al funcționalei $B$ la o anumită clasă. O astfel de cerință, respectată în marea majoritate a formulelor liniare de aproximare, constă în a alege funcționala $B$ dintr-o anumită clasă $\mathcal{B}$ dată de funcționale liniare, clasa respectivă fiind formată din combinații liniare cu coeficienți reali a $n$ funcționale liniare *elementare*, $B_1, \ldots, B_n$ (considerate liniar independente pe spațiul $\mathcal{F}$ al funcțiilor $f$).

În afară de cerința de simplicitate formulată mai sus se mai pot impune funcționalei $B$ (care urmează să fie utilizată pentru calculul numărului $A\ [f]$) și alte cerințe, în conformitate cu unele deziderate de ordin teoretic sau practic. Ne propunem să atragem atenția asupra cercetărilor actuale privind unele modalități de alegere „optimale" ale funcționalei $B$. Este vorba de formule de aproximare optimale. Punctul de vedere care stă la baza unor astfel de alegeri constă în următoarele : fie $\mathcal{F}$ un spațiu vectorial seminormat de funcții reale de o variabilă reală, care conține funcția $f$ în cauză și pe care este definită funcționala $A$, precum și funcționalele $B_i$ din clasa $\mathcal{B}$, considerată anterior. Se pune problema de a determina în mulțimea $\mathcal{B}$ acea funcțională $B$ care realizează un minim pentru norma restului $R = A - B$, norma respectivă fiind definită relativ la spațiul $\mathcal{F}$ al funcțiilor $f$. O astfel de funcțională $B$ va reprezenta „cea mai bună aproximație", în sensul normei adoptate, a funcționalei $A$ prin funcționale din clasa $\mathcal{B}$. Dacă $\mathcal{F}$ reprezintă spațiul funcțiilor $f$ cu derivată de ordinul $k$ de pătrat sumabilă pe un interval $I$ și dacă se ia ca normă a lui $f$ media sa de ordinul $p$ relativă la $I$, iar pentru funcționalele liniare considerate norma indusă, atunci funcționala $B$, determinată ca mai sus, se spune că reprezintă cea mai bună aproximație a lui $A$ în sensul lui Sard.

După cum a arătat J.J. Schoenberg, o astfel de funcțională care aproximează cel mai bine în sensul lui Sard funcționala $A$ se poate obține prin aplicarea operatorului $A$ în ambii membri ai unei anumite formule de interpolare, interpolarea respectivă făcîndu-se cu funcții-spline de ordinul $k$.

Astfel apare în evidență rolul pe care-l joacă funcțiile-spline, precum și teoria interpolării cu aceste funcții, în cazul studierii problemelor de aproximație optimală. Astfel de funcții au fost introduse sub o altă denumi-

re și studiate de acad. Tiberiu Popoviciu într-o lucrare publicată în revista „Mathematica" în 1934, lucrarea respectivă avînd ca obiect studiul aproximării funcțiilor convexe de ordin superior. Importanța funcțiilor-spline rezultă și din următoarea proprietate remarcabilă de minim pusă în evidență de matematicianul De Boor: printre funcțiile a căror derivată de ordinul $k$ este la pătrat sumabilă pe un interval $I$ și care iau valori date în $n$ puncte $x_1 < \ldots < x_n$ $(n \geqq k)$, funcția-splină, de gradul $2k-1$, admițînd punctele $x_1, \ldots, x_n$ ca noduri, minimizează integrala

$$\int_I [f^{(k)}(x)]^2 \, dx.$$

Această funcție $f$ este caracterizată prin următoarele proprietăți:

a) pe fiecare interval $(-\infty, x_1)$, $[x_1, x_2)$, $\ldots$, $[x_n, +\infty)$, $f$ este un polinom de grad $\leqq 2k-1$,

b) $f \in C^{2k-2}(-\infty, \infty)$.

Aceste funcții au făcut recent obiectul unor interesante generalizări la spații Hilbert, lărgindu-se sfera lor de aplicabilitate la categorii noi de probleme ale analizei numerice. Aceste generalizări se datoresc în cea mai mare măsură lui Marc Atteia și au fost prezentate în cadrul tezei sale de doctorat. Cadrul prezentei expuneri nu ne permite să ne oprim și asupra acestui interesant subiect.

Problema prezentată mai sus și modul ei de rezolvare a servit ca model într-o serie de cercetări recente din domeniul analizei numerice, cum ar fi interpolarea optimală, derivarea și integrarea numerică optimală, analiza și sinteza Fourier (considerată în sens optimal), rezolvarea optimală a problemei momentelor, teoria optimală a problemelor la limită relative la ecuații diferențiale ordinare și la ecuații cu derivate parțiale, teoria rezolvării optimale a ecuațiilor integrale liniare etc.

În numeroase probleme izvorîte din activitatea practică se cere să se aproximeze o funcție complicată sau insuficient cunoscută $f$ prin altă funcție $\varphi$, pe cît posibil mai simplă din punctul de vedere al calculului valorilor ei și care în același timp *să conserve* anumite proprietăți de alură a funcției $f$. În cazul în care aproximarea în cauză se efectuează prin utilizarea unor procedee de interpolare, problematica de mai sus conduce la studiul conservării proprietăților de alură a funcțiilor prin interpolare.

Ținem să menționăm meritul școlii clujene de analiză numerică de a fi atras atenția prin mai multe lucrări asupra acestui important aspect al teoriei interpolării, deschizînd totodată un nou cîmp de investigații în domeniul respectivei teorii. Rezultatele obținute în această direcție, precum și o serie de probleme nerezolvate privind tema conservării alurii funcțiilor prin interpolare, au fost puse în conferința prezentată de acad. Tiberiu Popoviciu cu ocazia „Colocviului de teoria aproximării funcțiilor", ținut la Cluj între 15 și 20 septembrie 1967. Pentru o informare în această direcție recomandăm consultarea materialelor colocviului amintit.

În sfîrșit, ținem să menționăm aici și interesantele cercetări efectuate în mai multe articole de matematicianul J.J. Schoenberg referitoare la așa-numiții „operatori de interpolare cu variație nediminuată". Acești operatori se caracterizează prin aceea că nu măresc numărul de oscilații ai unei funcții față de axa $Ox$.



★

Printre metodele de calcul care se înscriu astăzi cu o pregnanță sporită în cercul de preocupări al analizei numerice se numără și metoda Monte-Carlo. Ea permite rezolvarea unei largi categorii de probleme prin interpretarea aleatoare a acestora. Cu cîțiva ani în urmă, cînd nu apăruseră încă mașinile moderne de calcul, interesul matematicienilor pentru această metodă era relativ scăzut, datorită volumului mare de calcule necesare aplicării ei efective. Caracteristicile ridicate pe care le prezintă calculatoarele electronice în ceea ce privește posibilitatea realizării unui volum mare de calcul într-un interval de timp relativ scurt, precum și posibilitatea lor de a efectua calculele după un program prestabilit, au creat premisele aplicării cu succes a metodei Monte-Carlo cu ajutorul mașinilor electronice, și acest fapt a făcut ca astăzi interesul pentru această metodă să crească simțitor.

Aplicarea practică a metodei Monte-Carlo ridică unele probleme interesante, ca, de exemplu, problema modelării șirurilor de variabile aleatoare prin șiruri pseudoaleatoare.

Experiența aplicării diverselor metode numerice cu ajutorul mașinilor electronice de calcul a atras atenția specialiștilor de analiză numerică asupra repercusiunilor nefavorabile pe care le poate avea în mersul de ansamblu al rezolvării problemelor acumularea erorilor de rotunjire. Acumularea succesivă a acestor erori poate, în cazul anumitor metode numerice exacte, să influențeze atît de mult rezultatul, încît să ne conducă la o soluție care să se abată foarte mult de la soluția exactă. În aceste cazuri, soluția numerică aflată cu ajutorul metodei de calcul adoptate nu va corespunde cerințelor practice ale problemei. Acest proces de perturbare poate fi mai impresionant în cazul unor metode numerice aproximative, această acumulare de erori de rotunjire putînd să anuleze chiar caracterul convergent al metodei respective. Astfel de metode care nu rezistă la rotunjiri se spune că nu sînt *stabile* și sînt inutilizabile din punct de vedere practic. Noțiunea de stabilitate a unei metode de calcul se precizează mai mult în cazul diverselor categorii de metode. Din punctul de vedere al calculului numeric, cunoașterea caracterului de stabilitate sau de nestabilitate al unei metode numerice prezintă o deosebită importanță pentru aplicarea ei în practică. Pentru a cunoaște acest caracter, este necesar să se evalueze eroarea provenită din acumulările succesive ale erorilor de rotunjire.

Cercetări interesante în această direcție au fost făcute de diverși autori relativ la unele metode de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice liniare, inversarea matricelor, unele metode de rezolvare aproximativă a ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate prin metode „în mai mulți pași", respectiv la metoda rețelelor etc.

În numeroase cazuri însă, cercetările privind modul de acumulare al erorilor de rotunjire trebuie completate cu cercetări referitoare la *modul de propagare* al erorilor cu care sînt afectate *datele inițiale ale problemei* din punctul de vedere al existenței sau al neexistenței unor fenomene de rezonanță ale acestor erori în procesul de calcul pe care-l comportă metoda considerată. În cazul în care în decursul aplicării metodei de calcul nu apar astfel de fenomene de rezonanță (de amplificare) a erorii respective, se spune

că metoda este stabilă în raport cu datele inițiale pentru problema considerată.

Studiul stabilității sub acest aspect se pune mai cu seamă în cazul metodelor iterative de rezolvare a ecuațiilor funcționale și operatoriale sau în cazul unor metode „în mai mulți pași", utilizate în integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale sau a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Posibilitatea pe care o au mașinile moderne de calcul de a efectua în mod automat volume foarte mari de calcule a pus matematicienilor o importantă problemă, care pînă în prezent a fost studiată într-o măsură cu totul redusă. Este vorba de problema evaluării și a controlului erorilor în calcul *automat*. Acest control trebuie să se facă rapid, eficace și automat. Cercetările în această direcție au condus la diverse tehnici de control al erorilor, studiate și experimentate în ultimii cîțiva ani de diverși matematicieni. Aceste tehnici se bazează pe anumite criterii aritmetice (aritmetici ale semnificațiilor) sau pe anumite criterii analitice globale („numere de condiție" în sensul lui Türing). În primul caz, ideea generală constă în aceea de a atașa în mod automat fiecărui număr care intervine la un moment dat în calculele pe care le efectuează mașina un „grad de semnificație" mai mult sau mai puțin rafinat. Astfel, de exemplu, în aritmetica propusă de R.D. Richtmyer și Lavine, denumită și „aritmetica cu indice de semnificație", se atașează fiecărui număr din mașină numărul de cifre corecte sau pretinse a fi corecte din reprezentarea sa într-o anumită bază dată. Elaborarea acestei idei a condus la crearea așa-numitelor aritmetici de semnificații, dintre care mai cunoscută este astăzi aritmetica FPM (*Floating-Point Metropolis*), introdusă în 1958 de N. Metropolis și R.L. Ashenhurst pentru controlul automat al propagării erorilor cu care sînt efectuate datele inițiale ale problemei de calcul, erorile de rotunjire fiind considerate neglijabile. Aceste aritmetici de semnificație depind, în general, de detaliile aritmetice ale algoritmilor utilizați și conduc la rezultate eficiente în cazul cînd se utilizează așa-numita „analiză regresivă a erorilor de rotunjire". O astfel de analiză se bazează pe un ingenios principiu dezvoltat și popularizat în lucrările lui J.H. Wilkinson, în baza căruia rezultatele numerice furnizate de o mașină se interpretează ca rezultate obținute în cadrul aritmeticii clasice (fără erori de rotunjire), plecînd însă de la date inițiale convenabil perturbate.

Diverse lucrări recente ale matematicienilor R.E. Moore și E. Hansen au adus la ordinea zilei studiul așa-numitei „aritmetici a intervalelor", în care orice număr din mașină este reprezentat printr-o pereche de margini (superioară și inferioară).

În același cadru de idei ținem să amintim aici un alt aspect, oarecum invers al problemei acumulării erorilor de rotunjire, care a făcut obiectul unor cercetări actuale deosebit de interesante. Este vorba de stabilirea momentului optim de oprire a calculelor în cazul proceselor iterative, precum și de realizarea automată a acestei opriri. Se cunosc astăzi numeroase metode de rezolvare aproximativă a ecuațiilor operaționale care conduc la procese iterative. Cea mai simplă dintre aceste metode este așa-numita metodă a iterațiilor succesive, aplicabilă cu predilecție în cazul cînd ecuația are forma $x = f(x)$. Dacă calculul iteratelor succesive se face automat cu ajutorul unui calculator, atunci se ajunge întotdeauna, după un număr



finit de iterații, la așa-numita „stare de convergență numerică oscilatorie" (sau „stare ONC"), caracterizată prin aceea că în starea respectivă șirul iteratelor succesive $x_n^*$, obținute de mașina de calcul utilizată oscilează, luînd pe rînd, într-o anumită ordine, același număr finit de valori. Acest fenomen își are explicația în faptul că o mașină de calcul, oricît de perfecționată ar fi ea, nu utilizează în operațiile aritmetice pe care le face decît un număr finit de cifre semnificative ale numerelor asupra cărora se operează, cu alte cuvinte introduce erori de rotunjire. Este clar că, dacă calculul aproximativ al soluțiilor ecuației $x = f(x)$ se face cu ajutorul unei mașini în conformitate cu o metodă iterativă, atunci nu are nici un rost să se continue procesul iterativ în starea ONC, întrucît într-o astfel de stare iteratele succesive obținute de mașină încep să se repete într-o anumită ordine.

Dar în calculul cu mașini electronice un astfel de proces iterativ este oprit adesea în mod automat atunci cînd este îndeplinit un criteriu de forma $\| x_{n+1}^* - x_n^* \| < \alpha$, care exprimă faptul că abaterea dintre două aproximații succesive este mai mică decît un număr dat $\alpha$. Se pune astfel problema de a se stabili, în funcție de datele problemei, valoarea lui $\alpha$ astfel încît criteriul de mai sus să asigure pentru calculator starea ONC sau o stare anterioară stării ONC în cazul procesului iterativ considerat. Totodată se pune problema de a se da o delimitare a erorii de aproximație atunci cînd procesul iterativ este oprit în conformitate cu criteriul de mai sus, cu alte cuvinte de a se da o delimitare a erorii cu ajutorul numărului $\alpha$ (care reprezintă o margine superioară pentru abaterea dintre ultimele două iterate calculate).

Astfel de cercetări au fost inițiate de matematicianul Minoru Urabe și de colaboratorii săi, obținîndu-se o serie de rezultate în cazul procedeului de iterație obișnuit și al unor procedee speciale de iterație, construite în scopul accelerării convergenței șirului de iterații.

Preocupările referitoare la studiul acumulării erorilor de rotunjire în cazul diverselor metode de calcul au condus, printre altele, la interesante cercetări privind modul optim de organizare a operațiilor aritmetice elementare pe care le comportă metodele respective în ceea ce privește reducerea la minimum a numărului unor astfel de operații. În afară de unele consecințe cu privire la micșorarea timpului de rezolvare a problemelor, o astfel de organizare optimală poate conduce la unele îmbunătățiri ale preciziei de calcul a soluțiilor numerice ale problemelor considerate. Aceasta își are explicația în faptul că prin reducerea numărului de operații aritmetice se realizează implicit o reducere a erorilor de rotunjire.

Este meritul școlii clujene de analiză numerică de a fi atras atenția prin mai multe lucrări asupra acestui important aspect al problemei preciziei calculului numeric. Rezultatele obținute în această direcție se referă în special la organizarea optimală a calculului în cazul unor procedee de interpolare.

O concluzie generală, care de altfel a reieșit și din discuțiile purtate de numeroși specialiști din țară și de peste hotare care au participat la colocviile organizate de Institutul de calcul și la recentul „Seminar de teoria interpolării și noțiunea de convexitate", este constatarea că în condițiile actualei dezvoltări a matematicii analiza numerică și, o dată cu

ea, teoria interpolării şi aceea a convexităţii au devenit un important obiect de studiu, cu profunde implicaţii în analiza funcţională, în teoria constructivă a funcţiilor şi în analiza numerică. Însăşi utilizarea în bune condiţii a maşinilor de calcul este condiţionată de cunoaşterea aprofundată a acestor teorii. În momentul de faţă, maşinile de calcul sînt utilizate fără exploatarea în întregime a rezultatelor teoretice oferite de matematică, ceea ce face să se producă chiar un proces de stagnare în teoria programării la maşini. Evitarea acestei stagnări implică în primul rînd utilizarea întregii teorii matematice de către programatori şi specialişti în teoria programării.

Avîndu-se în vedere importanţa practică pe care o reprezintă cercetările de analiză numerică, se impune un sprijin sporit într-o astfel de direcţie. Considerăm că trebuie să se acorde un sprijin mai substanţial pentru cercetările cu caracter fundamental din domeniul teoriei generale a interpolării şi aproximării, cercetărilor din domeniul teoriei programării la maşini de calcul şi cercetărilor de analiză numerică legate de utilizarea unor astfel de maşini în diverse scopuri teoretice sau practice. În ceea ce priveşte utilizarea maşinilor de calcul, relevăm faptul că ne aflăm într-un moment în care programarea la aceste maşini trebuie să înceapă să se lanseze pe întregul bagaj de rezultate al teoriei matematice. Programatorul tehnician rutinar trebuie să fie secondat de programatorul teoretician, care trebuie să posede cunoştinţe profunde de analiză numerică. Iată de ce întreaga acţiune de construire şi de utilizare a calculatoarelor moderne *trebuie să aibă la bază experienţa matematicienilor competenţi.*