

APLICAȚII ALE TEORIEI RELAȚIILOR ÎN LOGICA MATEMATICĂ

DE

ȘTEFAN N. BERȚI

(Cluj)

Operațiile logice binare pun în corespondență la două propoziții o a treia propoziție, corespondența fiind un invariant pentru valorile logice 0 și 1.

În lucrare vom interpreta operațiile logice ca relații binare și vom studia proprietățile acestor relații.

§ 1. OPERAȚII LOGICE

Fie P și A două mulțimi nevide și λ o aplicație $\lambda : P \rightarrow A$. Două sisteme finite de elemente din P :

$$a_1, \dots, a_n \text{ și } a'_1, \dots, a'_n$$

se numesc λ , n -echivalente dacă

$$\lambda(a_j) = \lambda(a'_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dacă $a_1, \dots, a_n$ și $a'_1, \dots, a'_n$ sînt λ , n -echivalente, vom nota

$$(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\lambda, n}{\sim} (a'_1, \dots, a'_n).$$

Vom spune că o corespondență

$$\mu : P^n \rightarrow P$$

este o operație prelogică în sistemul (P, A, λ, n) dacă pentru

$$(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\lambda, n}{\sim} (a'_1, \dots, a'_n)$$

avem

$$\lambda(\mu(a_1, \dots, a_n)) = \lambda(\mu(a'_1, \dots, a'_n)).$$

Sistemul (P, A, λ, n) se numește *sistem logic*, elementele lui P se numesc *propoziții*, iar elementele lui A *valori logice*.

Vom nota cu $R(P, A, \lambda, n)$ mulțimea corespondențelor prelogice în sistemul (P, A, λ, n) . Două corespondențe

$$\mu, \mu_1 \in R(P, A, \lambda, n)$$

sînt *echivalente* dacă pentru orice $a_1, \dots, a_n \in P^n$ avem

$$\lambda(\mu(a_1, \dots, a_n)) = \lambda(\mu'(a_1, \dots, a_n)).$$

în care caz notăm $\mu \sim \mu_1$.

Clasele de echivalență corespunzătoare sînt *operații logice* din (P, A, λ, n) .

TEOREMA 1. Dacă mulțimea A are a elemente, atunci există în total

$$a^{2^n}$$

operații logice în (P, A, λ, n) .

Demonstrație. Numărul claselor de echivalență determinate de echivalența $\sim$ este a^{2^n} . Pentru fiecare asemenea clasă putem pune în corespondență unul din elementele lui A , deci există a^{2^n} operații logice în (P, A, λ, n) .

În continuare ne vom ocupa de operațiile logice binare în care A are două elemente: 0 (valoarea logică *fals*) și 1 (valoarea logică *adevăr*), iar $n = 1$ sau $n = 2$. Pentru $n = 1$ avem logica unitară, iar pentru $n = 2$ avem logica binară.

Din teorema de mai sus rezultă că există $2^{2^1} = 4$ operații logice unitare și $2^{2^2} = 16$ operații logice binare.

Vom studia cele 16 operații logice binare, pe care le vom nota prin

$$L_k \quad (k = 0, 1, \dots, 15).$$

Dacă numărul k scris în baza 2 este

$$s(k, 3)2^3 + s(k, 2)2^2 + s(k, 1)2 + s(k, 0),$$

atunci operația L_k se va defini prin tabelul

$\lambda(p)$	$\lambda(q)$	$\lambda(p L_k q)$
0	0	$s(k, 3)$
0	1	$s(k, 2)$
1	0	$s(k, 1)$
1	1	$s(k, 0)$

Se verifică ușor că operațiile logice uzuale $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$, sînt L_1, L_7, L_9, L_{13} .

TEOREMA 2. Dacă k este un număr real nenegativ, atunci avem reprezentarea

$$k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}}{2} \cdot 2^n.$$

Demonstrație. Orice număr real k se poate reprezenta sub forma

$$k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(k, n) 2^n$$

unde $s(k, n) \in \{0, 1\}$; această reprezentare fiind unică, deoarece nu avem un șir de forma

$$s(k, -t), s(k, -t-1), s(k, -t-2), \dots$$

($t > 0$) format numai din termenii 1. Dacă am avea un astfel de șir, atunci

$$\sum_{n=-\infty}^t s(k, n) 2^n = \sum_{n=-\infty}^{-t} 2^n = 2^{t-1}.$$

k fiind un număr real, el este superior mărginit și avem o reprezentare de forma

$$k = \sum_{n=-\infty}^m s(k, n) 2^n$$

de unde obținem

$$s(k, n) = \frac{k}{2^n} - 2M - \frac{t}{2},$$

unde

$$M = \sum_{j=n+1}^m s(k, j) 2^{j-n-1}$$

este un număr întreg și

$$t = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \frac{s(k, j)}{2^{n-j-1}}$$

este un număr subunitar.

Deci $s(k, n)$ este de aceeași paritate ca și $\left[\frac{k}{2^n}\right]$. Astfel

$$s(k, n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \left[\frac{k}{2^n}\right] \text{ este un număr impar,} \\ 0 & \text{dacă } \left[\frac{k}{2^n}\right] \text{ este un număr par,} \end{cases}$$

deci

$$s(k, n) = \frac{1 - (-1)^{\frac{k}{2^n}}}{2}.$$

Din această teoremă obținem imediat

TEOREMA 3. Dacă k este un număr întreg nenegativ, atunci

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}}{2} \cdot 2^n.$$

§ 2. OPERAȚIILE LOGICE BINARE INTERPRETATE CA RELAȚII BINARE

Operația logică binară L_k se poate interpreta ca o relație binară definită în $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Astfel

$$L_k = \{(a, b) : \lambda(aL_kb) = 1\}.$$

TEOREMA 4. Pentru complementară avem formula

$$\mathbf{C}L_k = L_{15-k}.$$

Demonstrație. Avem

$$\mathbf{C}L_k = \{(a, b) : \lambda(aL_kb) = 0\} = \{(a, b) : \lambda(aL_{15-k}b) = 1\} = L_{15-k}.$$

TEOREMA 5. Pentru intersecție avem formula

$$L_k \cap L_l = L_u,$$

unde

$$u = \frac{15}{4} + \sum_{n=0}^3 t\left(\left[\frac{k}{2^n}\right], \left[\frac{l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}.$$

și

$$t(a, b) = \begin{cases} 3 & \text{dacă } a, b \text{ sînt impare} \\ -1 & \text{dacă nu sînt ambele impare.} \end{cases}$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^3 s(k, n) \cdot s(l, n) \cdot 2^n = \frac{1}{4!} \sum_{n=0}^3 (1 - (-1)^{\left[\frac{k}{2^n}\right]}) (1 - (-1)^{\left[\frac{l}{2^n}\right]}) 2^n = \\ &= \frac{15}{4} + \sum_{n=0}^3 t\left(\left[\frac{k}{2^n}\right], \left[\frac{l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}. \end{aligned}$$

TEOREMA 6. Pentru reuniune avem formula

$$L_k \cup L_l = L_v$$

unde

$$v = \frac{45}{4} - \sum_{n=0}^3 t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}.$$

Demonstrație. Folosind relația lui de Morgan avem

$$\begin{aligned} L_k \cup L_l &= \mathbf{C}(\mathbf{C}(L_k \cup L_l)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}L_k \cap \mathbf{C}L_l) = 15 - (L_{15-k} \cap L_{15-l}) = \\ &= 15 - \frac{15}{4} - \sum_{n=0}^3 t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2} = \\ &= \frac{45}{4} - \sum_{n=0}^3 t\left(\left[\frac{15-k}{2^n}\right], \left[\frac{15-l}{2^n}\right]\right) 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Exemplu. Avem

$$L_5 \cap L_{12} = L_4.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} u &= \frac{15}{4} + t(5, 12) \frac{1}{4} + t(2, 6) \frac{1}{2} + t(1, 3) + t(0, 1) 2 = \\ &= \frac{15}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 2 = 4. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$L_5 = \{(0, 1), (1, 1)\}, \quad L_{12} = \{(0, 0), (0, 1)\},$$

deci

$$L_5 = L_{12} = \{(0, 1)\} = L_4.$$

Tabelul 1

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15
2	2	3	2	3	6	7	6	7	10	11	10	11	14	15	14	15
3	3	3	3	3	7	7	7	7	11	11	11	11	15	15	15	15
4	4	5	6	7	4	5	6	7	12	13	14	15	12	13	14	15
5	5	5	7	7	5	5	7	7	13	13	15	15	13	13	15	15
6	6	7	6	7	6	7	6	7	14	15	14	15	14	15	14	15
7	7	7	7	7	7	7	7	7	15	15	15	15	15	15	15	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15
9	9	9	11	11	13	13	15	15	9	9	11	11	13	13	15	15
10	10	11	10	11	14	15	14	15	10	11	10	11	14	15	14	15
11	11	11	11	11	15	15	15	15	11	11	11	11	15	15	15	15
12	12	13	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15
13	13	13	15	15	13	13	15	15	13	13	15	15	13	13	15	15
14	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Tabelul 2

∩	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	0	1	0	1	0	1	0	1	8	9	8	9	8	9	8	9
10	0	0	2	2	0	0	2	2	8	8	10	10	8	8	10	10
11	0	1	2	3	0	1	2	3	8	9	10	11	8	9	10	11
12	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12
13	0	1	0	1	4	5	4	5	8	9	8	9	12	13	12	13
14	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Pentru reuniunea și intersecția relațiilor logice binare avem tabelele 1 și 2 în care, pentru simplificare, am notat cu k relația L_k .

Vom trece la studiul produsului de relații logice binare. Se știe că $B, B_1 \subset M^2$ fiind două relații binare în M , avem prin definiție

$$BB_1 = \{(a, b) \mid \exists c : aBc \wedge cB_1b\}.$$

TEOREMA 7. *Produsul relațiilor se definește prin formula*

$$L_k L_l = L_x$$

unde

$$s(x, j) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{dacă } s\left(k, 2\left[\frac{j}{2}\right] + 1\right) s\left(l, j + 2 - 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) + s\left(k, 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) s\left(l, j - 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) > 0 \\ 0 & \text{dacă } s\left(k, 2\left[\frac{j}{2}\right] + 1\right) s\left(l, j + 2 - 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) + s\left(k, 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) s\left(l, j - 2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Vom nota

$$L_k = \begin{pmatrix} s(k, 3) & s(k, 2) & s(k, 1) & s(k, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

unde $(i, j)^0 = \emptyset$, $(i, j)^1 = (i, j)$. În acest caz, folosind definiția produsului de relații, avem:

$$s(x, 3) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s(k, 3) s(l, 3) + s(k, 2) s(l, 1) > 0 \\ 0 & \text{dacă } s(k, 3) s(l, 3) + s(k, 2) s(l, 1) = 0 \end{cases}$$

$$s(x, 2) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s(k, 3) s(l, 2) + s(k, 2) s(l, 0) > 0 \\ 0 & \text{dacă } s(k, 3) s(l, 2) + s(k, 2) s(l, 0) = 0 \end{cases}$$

$$s(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s(k, 1) s(l, 3) + s(k, 0) s(l, 1) > 0 \\ 0 & \text{dacă } s(k, 1) s(l, 3) + s(k, 0) s(l, 1) = 0 \end{cases}$$

$$s(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s(k, 1) s(l, 2) + s(k, 0) s(l, 0) > 0 \\ 0 & \text{dacă } s(k, 1) s(l, 2) + s(k, 0) s(l, 0) = 0. \end{cases}$$

Aceste formule se pot scrie sub forma unită din enunț și astfel teorema 7 este demonstrată.

În tabelul 3 avem produsele relațiilor binare cu aceleași simplificări ca și în celelalte tabele (L_k notat cu k).

Tabelul 3

$\nearrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
3	0	1	2	3	1	1	3	3	2	3	2	3	3	3	3	3
4	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
5	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15
6	0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
7	0	5	10	15	1	5	11	15	2	7	10	15	3	7	11	15
8	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	0	0	0	0	5	5	5	5	10	10	10	10	15	15	15	15
11	0	1	2	3	5	5	7	7	10	11	10	11	15	15	15	15
12	0	4	8	12	4	4	12	12	8	12	8	12	12	12	12	12
13	0	5	10	15	4	5	14	15	8	13	10	15	12	13	14	15
14	0	4	8	12	5	5	13	13	10	14	14	10	15	15	15	15
15	0	5	10	15	5	5	15	15	10	15	10	15	15	15	15	15

TEOREMA 8. Are loc egalitatea

$$L_9 L_i = L_i L_9 = L_i,$$

deci relația logică binară L_9 , adică echivalența, are rolul unității.

Demonstrație. Avem :

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = \begin{cases} s(9,3)s(l,j) & \text{pentru } j=3,2 \\ s(9,1)s(l,j+2) & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = \begin{cases} s(9,2)s(l,j-2) & \text{pentru } j=3,2 \\ s(9,0)s(l,j) & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

$$s(9,3) = s(9,0) = 1, \quad s(9,2) = s(9,1) = 0,$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = \begin{cases} s(l,j) & \text{pentru } j=3,2 \\ 0 \cdot s(l,j+1) = 0 & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) = \begin{cases} 0 \cdot s(l,j-2) = 0 & \text{pentru } j=3,2 \\ s(l,j) & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

deci

$$s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)s\left(l,j+2-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) + s\left(9,2\left[\frac{j}{2}\right]\right)s\left(l,j-2\left[\frac{j}{2}\right]\right) =$$

$$= \begin{cases} s(l,j) + 0 = s(l,j) & \text{pentru } j=3,2 \\ 0 + s(l,j) = s(l,j) & \text{pentru } j=1,0 \end{cases}$$

adică

$$s(x,j) = s(l,j)$$

și astfel s-a stabilit egalitatea $L_9 L_i = L_i$. Asemănător se arată că $L_i L_9 = L_i$.
De asemenea se arată ușor că are loc

TEOREMA 9. Are loc egalitatea

$$L_6 L_k = L_{4k} \pmod{15}.$$

Observație. Calculul produsului se simplifică folosind tabelul de mai jos

$\nearrow$	1	2	4	8
1	1	2	0	0
2	0	0	1	2
4	4	8	0	0
8	0	0	4	8

și tabelul 1 al reuniunii precum și legea de distributivitate a reuniunii față de înmulțire [1].

Primită la redacție la 28 februarie 1967

Academia Republicii Socialiste România — Filiala Cluj
Institutul de calcul

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RELATIONS DANS LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE

RÉSUMÉ

Les opérations logiques binaires mettent en correspondance à deux propositions une troisième proposition, cette correspondance étant un invariant pour les valeurs logiques 0 et 1. On interprétera les opérations logiques comme relations binaires et on étudiera les propriétés de ces relations.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Г. КУРОВ, *Лекции по общей алгебре*. Москва, 1962.
2. GR. C. MOISIL, *Încercări vechi și noi de logică neclasică*. București, 1965.
3. A. И. ПЛЕЩЕР, *Спектральная теория линейных операторов*. Москва, 1965.