

Studium der Elektrokapillaritätswirkungen auf die Stahl-Erschmelzungsprozesse und die Reinheit desselben.

Unter Entwicklung der Hypothese dass die elektrokapillaren Erscheinungen sich auf der Zwischenphasen-Oberfläche Schlacke-Metallbad auch in dem Fall bemerkbar machen, wenn von aussen eine Wechsel-oder Drehstromspannung auf das System, wie bei den zur Stahlerschmelzung benützten Lichtbogenofen (3), angelegt wird, wurde auf einem elektrolitischen Modell die Bildung und Fortpflanzung der durch Zwischenphasen-Spannungsschwankungen erzeugten Wellen mittels Kinematographie mit beschleunigter Geschwindigkeit und durch Oszillographie studiert.

Es wird die Bedeutung dieser Erscheinung für die Stahl-Erschmelzungsprozesse in elektrischen Öfen hervorgehoben und der vorteilhafte Einfluss unterstrichen, den sie auf die Ausscheidung der nichtmetallischen Einschlüsse ausübt. In diesem Sinne wird auf dem elektrolitischen Modell die Verstärkung der Ausscheidung der nichtmetallischen Einschlüsse studiert und neue Methoden für die Steigerung der Stahlreinheit geplant, deren Wirksamkeit durch Versuche bestätigt wurde.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

P. Postelnicu

D.K. 621.391

Sinn und Allgemeinheit der Rückkopplung in den elektrischen Netzen.

Durch Bestimmung der Rückkopplung als eine geschlossene Kausalkette, wird anfänglich der allgemeine Charakter von diesem Beiwert in den stationären, fortschreitenden und Selbstentwicklungsprozessen hervorgehoben.

Im Falle der elektrischen Linearerze, wird die Rückkopplung mittels Signalfussdiagramme veranschaulicht, in denen geschlossene Wege (Schleifen) auftreten, die entweder Reaktions Schleifen aus dem Netz, oder Reaktionen zwischen Strom und Spannung, hervorgerufen durch die Blindelemente L, C., entsprechen. Es wird die Eigenart der Schaltvorgänge unterstrichen, die mittels des Konzepts für Rückkopplung erklärt werden. Es wird die Nützlichkeit dieses Konzepts für eine synthetische Auslegung von wichtigen Formeln aus der Theorie der passiven und aktiven Netze bewiesen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București, Tom. XXXI, Nr. 6/1969

MATEMATICĂ

C.Z. : 517.9

UNE IDENTITÉ ET LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UN CERTAIN OPÉRATEUR LINÉAIRE

D. V. IONESCU
Université de Cluj

On sait que la différence divisée d'une fonction f sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ qu'on désigne par $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ jouit de la propriété exprimée par les égalités

$$(1) \quad [x_0, x_1, \dots, x^r] = 0$$

pour $r = 0, 1, \dots, n-1$ et

$$(1) \quad [x_0, \dots, x_n; x^n] = 1.$$

Lorsque $f \in C^n[x_0, x_n]$, on a une représentation intégrale de la différence divisée par la formule

$$(2) \quad [x_0, \dots, x_n; f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(n)}(s) ds.$$

où la fonction φ , peut s'obtenir par un problème aux limites [1], qui permet de démontrer facilement que la fonction φ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) et qu'on a

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) ds = \frac{1}{n!}$$

En supposant $q \leq n$, on peut considérer les différences divisées successives $[x_0, x_1, \dots, x_q; f]$, $[x_1, x_2, \dots, x_{q+1}; f]$, ..., $[x_{n-q}, x_{n-q+1}, \dots, x_n; f]$ ainsi que l'opérateur

$$(4) \quad M_q^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^{n-q} \lambda_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+q}; f]$$

qui apparaît comme une moyenne de ces différences divisées, avec les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-q}$, dont la somme n'est pas nulle.

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ Bucarest 1—3 novembre 1968.

$$(16) \quad \begin{aligned} \Delta^2 f_0 &= f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \Delta^2 f_1 &= f_1 - 2f_2 + f_3 \\ &\vdots \\ \Delta^2 f_{n-2} &= f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{aligned}$$

D'après le problème posé dans l'introduction de ce travail il s'agit de déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ de manière à avoir l'identité

$$(17) \quad \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \Delta^2 f_i = (f_0 + f_n) + A_1 (f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) = L_1^{(n)} [f]$$

On doit avoir les équations

$$(18) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_0 &= A_1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0 &= A_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-2} - 2\lambda_{n-3} + \lambda_{n-4} &= A_1 \\ -2\lambda_{n-2} + \lambda_{n-3} &= A_1 \\ \lambda_{n-2} &= 1 \end{aligned}$$

Dans ces équations on doit avoir $n \geq 2$.

2. Lorsque $n=2$, le système (18) se réduit à une seule équation $\lambda_0=1$ et la formule (17) devient

$$L_1^{(2)} [f] = (f_0 + f_2) - 2f_1$$

avec $A_1 = -2$

Lorsque $n=3$, on a: $\lambda_0 = \lambda_1 = 1, A_1 = -1$ et la formule (17) devient

$$L_1^{(3)} [f] = (f_0 + f_3) - (f_1 + f_2)$$

Lorsque $n=4$, on a: $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \frac{4}{3}, \lambda_2 = 1, A_1 = -\frac{2}{3}$ et la formule (17) devient :

$$L_1^{(4)} [f] = (f_0 + f_4) - \frac{2}{2} (f_1 + f_2 + f_3)$$

3. Supposons $n \geq 5$, ce qui correspond au cas général. Nous pouvons alors écrire les équations (18) sous la forme

$$(19) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_0 &= A_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_0 &= 0 \\ \lambda_3 - 3\lambda_2 + 3\lambda_1 - \lambda_0 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-3} - 3\lambda_{n-4} + 3\lambda_{n-5} - \lambda_{n-6} &= 0 \\ -2\lambda_{n-2} + \lambda_{n-3} &= A_1 \\ \lambda_{n-2} &= 1 \end{aligned}$$

Si l'on considère l'équation de récurrence :

$$(20) \quad \lambda_j - 3\lambda_{j-1} + 3\lambda_{j-2} - \lambda_{j-3} = 0$$

on voit facilement qu'elle a pour solutions : $1, j, j(j+1)$ pour $j=3, 4, \dots, n-2$ ou plus généralement

$$(21) \quad \lambda_j = C_1 + C_2 j + C_3 j(j+1)$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes quelconques.

On peut choisir C_1, C_2, C_3 et A_1 de manière que les trois premières équations (19) et les deux dernières équations (19) soient satisfaits par la formule (21) pour $j=0, 1, 2$ et $n-2, n-3$.

On trouve sans difficulté qu'il faut prendre

$$(22) \quad C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -\frac{1}{n-1}, A_1 = -\frac{2}{n-1}$$

On peut alors écrire les coefficients λ_j sous la forme

$$(23) \quad \lambda_j = \frac{C_{j+1}^1 C_{n-j-1}^1}{C_{n-1}^1}$$

pour $j=0, 1, \dots, n-2$ et la formule (17) montre qu'on a l'identité :

$$(24) \quad L_1^{(n)} [f] = (f_0 + f_n) - \frac{2}{n-1} (f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \Delta^2 f_i$$

§ 2. Le cas général

2. Écrivons les différences d'ordre $2p$ de la fonction f sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{2p}; x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}; \dots; x_{n-2p}, x_{n-2p+1}, \dots, x_n$, c'est-à-dire

$$(25) \quad \begin{aligned} \Delta^{2p} f_0 &= f_0 - C_{2p}^1 f_1 + \dots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f_{2p} \\ \Delta^{2p} f_1 &= f_1 - C_{2p}^1 f_2 + \dots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f_{2p+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^{2p} f_{n-2p} &= f_{n-2p} - C_{2p}^1 f_{n-2p+1} + \dots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f_n \end{aligned}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2p}$ de manière qu'en faisant la combinaison linéaire

$$(26) \quad \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i$$

les coefficients de $f_p, f_{p+1}, \dots, f_{n-p}$ soient égaux. De cette façon on aura l'identité

$$(27) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i &= (f_0 + f_n) + A_1 (f_1 + f_{n-1}) + \dots + A_{p-1} (f_{p-1} + f_{n-p+1}) + \\ &+ A_p (f_p + f_{n-p}) \end{aligned}$$

$$\mu_q = \lambda_q - C_{2p}^1 \lambda_{q-1} + \dots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} \lambda_{q-2p}$$

Lorsque $3p \leq n < 4p$ on a

$$\begin{aligned}\mu_p &= \lambda_p - C_{2p}^1 \lambda_{p-1} + \dots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0 \\ \mu_{p+1} &= \lambda_{p+1} - C_{2p}^1 \lambda_p + \dots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_1 + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} \lambda_0 \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{n-2p} &= \lambda_{n-2p} - C_{2p}^1 \lambda_{n-2p-1} + \dots + (-1)^{n-2p} C_{2p}^{n-2p} \lambda_0 \\ \mu_{n-2p+1} &= -C_{2p}^1 \lambda_{n-2p} + \dots + (-1)^{n-2p+1} C_{2p}^{n-2p+1} \lambda_0 \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\mu_q = (-1)^{q-n+2p} C_{2p}^{q-n+2p} \lambda_{n-2p} + \dots + (-1)^q C_{2p}^q \lambda_0.$$

Enfin lorsque $2p+1 < n < 3p$ on a

$$\begin{aligned}\mu_p &= (-1)^{3p-n} C_{2p}^{3p-n} \lambda_{n-2p} + (-1)^{3p-n+1} C_{2p}^{3p-n+1} \lambda_{p-2p-1} + \\ &\quad + \dots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{p+1} &= (-1)^{3p-n+1} C_{2p}^{3p-n+1} \lambda_{n-2p} + (-1)^{3p-n+2} C_{2p}^{3p-n+2} \lambda_{n-2p-1} + \\ &\quad + \dots + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} \lambda_0\end{aligned}$$

(40) $\dots$

$$\begin{aligned}\mu_q &= (-1)^{2p-n+q} C_{2p}^{2p-n+q} \lambda_{n-2p} + (-1)^{2p-n+1} C_{2p}^{2p-n+k+1} \lambda_{n-2p-1} + \\ &\quad + \dots + (-1)^q C_{2p}^q \lambda_0.\end{aligned}$$

On peut dire que les formules (38) sont encore valables lorsque $3p \leq n < 4p$ et $2p+1 < n < 3p$, parceque dans ces cas, à cause des formules (37), les formules (38) se réduisent aux formules (39) et (40).

Nous allons démontrer maintenant que grâce aux formules (29), dans la formule (32) nous avons

$$(41) \quad \mu_p = \mu_{p+1} = \dots = \mu_q = A_p.$$

où

$$(42) \quad A_p = \lambda_p - C_{2p}^1 \lambda_{p-1} + \dots + (-1)^p C_{2p}^p \lambda_0.$$

Tous les cas étant compris dans les formules (38), nous démontrons à l'aide de ces formules, que nous avons les égalités (41). Introduisons pour cela les différences

$$(43) \quad \delta^j \mu_p = \mu_{p+j} - C_j^1 \mu_{p+j-1} + \dots + (-1)^j C_j^j \mu_p$$

pour $j = 1, 2, \dots, q-p$.

On démontre à l'aide des formules (38) que

$$(44) \quad \delta^j \mu_p = \lambda_{p+j} - C_{2p+j}^1 \lambda_{p+j-1} + \dots + (-1)^{p+j} C_{2p+j}^{p+j} \lambda_0,$$

pour $j = 1, 2, \dots, q-p$.

En remplaçant dans la formule (44) les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+j}$ par les formules (29), nous avons :

$$\begin{aligned}C_{n-p}^p \delta^j \mu_p &= C_{2p+j}^p C_{n-2p-j}^p - C_{2p+j}^1 C_{2p+j-1}^p C_{n-2p-j+1}^p + \dots + \\ &\quad + (-1)^{p+j} C_{2p+j}^{p+j} C_p^p C_{n-p}^p\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$C_{2p+j}^h C_{2p+j-h}^p = C_{2p+j}^p C_{p+h}^h$$

pour $h = 1, 2, \dots, p+j$. Nous pouvons donc écrire :

$$C_{n-p}^p \delta^j \mu_p = C_{2p+j}^p (C_{n-2p-j}^p - C_{p+j}^1 C_{n-2p-j+1}^p + \dots + (-1)^{p+j} C_{p+j}^{p+j} C_{n-p}^p)$$

ou encore

$$\begin{aligned}C_{n-p}^p \delta^j \mu_p &= (-1)^{p+j} C_{2p+j}^p (C_{n-p}^p - C_{p+j}^1 C_{n-p-1}^p + \dots + \\ &\quad + (-1)^{p+j} C_{p+j}^{p+j} C_{n-2p-j}^p)\end{aligned}$$

Si nous introduisons le polynôme :

$$(45) \quad V(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{p!}$$

de degré p , nous remarquons qu'on peut écrire la formule précédente sous la forme :

$$(46) \quad C_{n-p}^p \delta^j \mu_p = (-1)^{p+j} C_{2p+j}^p \Delta^{p+j} V(n-2p-j)$$

et cette formule est valable pour $j = 1, 2, \dots, q-p$. La différence $\Delta^{p+j} V(x)$, d'ordre $p+j$, d'un polynôme $V(x)$ de degré p est nulle et par suite nous avons :

$$(47) \quad \delta^j \mu_p = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, q-p)$$

c'est-à-dire, nous avons les égalités (41).

En remplaçant dans la formule (42) les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$, par les formules (29), nous avons

$$C_{n-p}^p A_p = C_{2p}^p C_{n-2p}^p - C_{2p}^1 C_{2p-1}^p C_{n-2p+1}^p + \dots + (-1)^p C_{2p}^p C_p^p C_{n-p}^p$$

Mais nous avons déjà cité l'identité

$$C_{2p}^h C_{2p-h}^p = C_{2p}^p C_p^h$$

que nous utilisons ici pour $h = 0, 1, \dots, p$ et nous aurons

$$C_{n-p}^p A_p = C_{2p}^p (C_{n-2p}^p - C_{2p}^1 C_{n-2p+1}^p + \dots + (-1)^p C_p^p C_{n-p}^p)$$

On démontre sans difficulté que la grande parenthèse est égale à $(-1)^p$ et par suite nous avons

$$(47) \quad A^p = (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p}$$

Finalement nous avons l'identité

$$(48) \quad \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i = L_p^{(n)}[f].$$

avec les coefficients λ_i donnés par les formules (29) et où l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ est donné par la formule

$$(49) \quad L_p^{(n)}[f] = (f_0 + f_n) + A_1(f_1 + f_{n-1}) + \dots + A_{p-1}(f_{p+1} + f_{n-p+1}) +$$

$$+ (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p} (f_p + f_{p+1} \dots + f_{n-p})$$

où les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ sont donnés par les formules (35), variables pour $n \geq 2p$.

§ 3. Première application de l'identité (48)

6. Comme première application de l'identité (48), nous voulons calculer $L_p^{(n)}[f]$, pour $f(x) = (x - x_0)^r$ où $r \leq 2p$ et $r = 2p+1$. Pour cela nous calculerons d'abord $\Delta^n f_i$ pour $f(x) = (x - x_0)^r$ où $r \leq n$ et $r = n+1$.

La formule

$$\frac{\Delta^n f_i}{n! h^n} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f].$$

montre que

$$(50) \quad \frac{\Delta^n (x_i - x_0)^r}{n! h^n} = \frac{1}{V(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})} \begin{vmatrix} 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} & (x_i - x_0)^r \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{n-1} & (x_{i+1} - x_0)^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i+n} & \dots & x_{i+n}^{n-1} & (x_{i+n} - x_0)^r \end{vmatrix}$$

et par suite nous avons

$$(51) \quad \Delta^n (x_i - x_0)^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n! h^n & \text{si } r = n \end{cases}$$

Pour $r = n+1$, le déterminant du second membre de la formule (50) est égale-à :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} & x_i^{n+1} \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{n-1} & x_{i+1}^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i+n} & \dots & x_{i+n}^{n-1} & x_{i+n}^{n+1} \end{vmatrix} = (u+i)x_0 V(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$$

Mais le premier déterminant est égal au produit de $V(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ par $(x_i + \dots + x_{i+n})$. Nous avons donc

$$\frac{\Delta^n (x_i - x_0)^{n+1}}{n! h^n} = [i + (i+1) + \dots + (i+n)] = \frac{(2i+n)(n+1)}{2} h$$

est par suite

$$(52) \quad \Delta^n (x_i - x_0)^{n+1} = \frac{2i+n}{2} (n+1)! h^{n+1}$$

Les formules (51) et (52) peuvent s'écrire sous la forme

$$(53') \quad (n+i)^r - C_n^1 (n+i-1)^r + \dots + (-1)^n C_n^n i^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n! & \text{si } r = n \\ \frac{(2i+n)}{2} (n+1)! & \text{si } r = n+1 \end{cases}$$

Pour $i=0$, les formules (53) sont bien connues et ont la forme

$$n^r - C_n^1 (n-1)^r + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} i^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ n! & \text{si } r = n \\ \frac{n}{2} (n+1)! & \text{si } r = n+1. \end{cases}$$

D'ailleurs les formules (53) ne sont que des conséquences des formules (53').

7. L'identité :

$$L_p^{(n)}[f] = \sum_{i=0}^{n-2p} \lambda_i \Delta^{2p} f_i$$

avec

$$\lambda_i = \frac{C_{p+i}^p C_{n-p-i}^p}{C_{n-p}^p}$$

et les formules (51) montrent que si $r < 2p$, on a

$$(54) \quad L_p^{(n)}[(x - x_0)^r] = 0$$

Pour $r = 2p$, les formules (51) montrent que

$$L_p^{(n)}[(x - x_0)^{2p}] = (2p)! h^{2p} (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2p})$$

Mais on démontre que

$$(55) \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2p} = \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p}$$

et par suite on a

$$L_p^{(n)}[(x - x_0)^{2p}] = (2p)! \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} h^{2p}.$$

Pour $r=2p+1$, les formules (52) montrent que

$$L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}] = (2p+1)! h^{2p+1} \sum_{i=0}^{n-2p} (p+i) \lambda_i$$

Mais on démontre que

$$\sum_{i=0}^{n-2p} (p+i) \lambda_i = \frac{1}{C_{n-p}^p} \sum_{i=0}^{n-2p} (p+i) C_{p+i}^p C_{n-p-i}^p = \frac{n}{2} \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p}$$

On aura donc

$$L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}] = (2p+1)! \frac{n}{2} \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} h^{2p+1}$$

c'est-à-dire

$$(57) \quad L_p^{(n)}[(x-x_0)^{2p+1}] = \frac{n(n+1)!}{2} \frac{p!}{(n-p)!} h^{2p+1}$$

Si nous tenons compte de l'expression de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ donnée par la formule (49), nous avons donc démontré les identités

$$(58) \quad n^r + A_1[1^r + (n-1)^r] + \dots + A_{p-1}[(p-1)^r + (n-p+1)^r] + \\ + (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p} [p^r + (p+1)^r + \dots + (n-p)^r] = \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 2p \\ (2p)! \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} & \text{si } r = 2p \\ \frac{n(n+1)!}{2} \frac{p!}{(n-p)!} & \text{si } r = 2p+1 \end{cases}$$

où $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ sont des coefficients donnés par les formules (35). Les formules (58) généralisent les formules (53') et se réduisent à ces formules pour $n=2p$.

Exemples : 1°. $p=1$ on a les identités

$$(59) \quad n^r - \frac{2}{n-1} [1^r + 2^r + \dots + (n-1)^r] = \begin{cases} 0 & \text{si } r=1 \\ \frac{n(n+1)}{3} & \text{si } r=2 \\ \frac{n^2(n+1)}{2} & \text{si } r=3 \end{cases}$$

2°. Pour $p=2$, on a les identités

$$(60) \quad n^r - \frac{n+4}{n-2} [1^r + (n-1)^r] + \frac{12}{(n-2)(n-3)} [2^r + 3^r + \dots + (n-2)^r] = \begin{cases} 0 & \text{si } r=1,2,3 \\ 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{5} & \text{si } r=4 \\ (n+1)n^2(n-1) & \text{si } r=5 \end{cases}$$

Les formules (58) permettent aussi de calculer les sommes

$$1^r + 2^r + \dots + n^r$$

pour $r=1, 2, \dots$

Ainsi si nous nous rapportons aux formules (59), nous déduisons les formules bien connues :

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

De même si nous nous rapportons aux formules (60) nous pouvons ajouter aux formules (59') les formules bien connues

$$1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4 = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

(60')

$$1^5 + 2^5 + \dots + (n-1)^5 = \frac{n^2(n-1)^2}{12} (2n-2n-1)$$

et ainsi de suite.

§ 4. La représentation de l'opérateur $L_p^{(n)}(f)$, par une intégrale définie.

8. Supposons que $f \in C^{2p}[x_0, x_n]$ et cherchons une représentation intégrale de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$, défini par la formule (49). Pour cela rappelez qu'on peut écrire la différences $\Delta^{2p} f_j$ par une intégrale définie, analogue à la formule (8). On a

$$(61) \quad \Delta^{2p} f_j = \int_{x_j}^{x_j+2p} \psi_j(s) f^{(2p)}(s) ds.$$

où la fonction ψ_j est positive sur l'intervalle (x_j, x_{j+2p}) et l'on a

$$(62) \quad \int_{x_j}^{x_{j+2p}} \psi_j(s) ds = h^{2p}$$

On peut écrire la formule (61) aussi sous la forme

$$(63) \quad \Delta^{2p} f_j = \int_{x_0}^{x_n} \bar{\psi}_j(s) f^{(2p)}(s) dr$$

où la fonction $\bar{\psi}_j$ coïncide avec la fonction ψ_j sur l'intervalle (x_j, x_{j+2p}) et est nulle les intervalles $[x_0, x_j], [x_{j+2p}, x_n]$. On a aussi la formule

$$(64) \quad \int_{x_0}^{x_n} \bar{\psi}_j(s) ds = h^{2p}$$

Il résulte alors la représentation intégrale de l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ par la formule

$$(65) \quad L_p^{(n)}[f] = \int_{x_0}^{x_n} Q_p(s) f^{(2p)}(s) ds$$

où la fonction $Q_p(s)$ est définie sur l'intervalle $[x_0, x_n]$ par la formule

$$(66) \quad Q_p(s) = \lambda_0 \bar{\psi}_0(s) + \lambda_1 \bar{\psi}_1(s) + \dots + \lambda_{n-2p} \bar{\psi}_{n-2p}(s).$$

On peut aussi donner à la fonction Q_p la forme

$$(67) \quad Q_p(s) = - \left[\frac{(s-x_0)_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(s-x_n)_+^{2p-1}}{(2p-1)!} \right] - \\ - A_1 \left[\frac{(s-x_1)_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{(s-x_{n-1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!} \right] - \dots - A_{p-1} \left[\frac{(s-x_{p-1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!} + \right. \\ \left. + \frac{(s-x_{n-p+1})_+^{2p-1}}{(2p-1)!} \right] - (-1)^p \frac{C_{2p}^p}{C_{n-p}^p} \left[\frac{(s-x_p)_+^{2p-1}}{(p-1)!} + \dots + \frac{(s-x_{n-p})_+^{2p-1}}{(2p-1)!} \right]$$

où dans le second membre on emploie les notations des „fonctions spline”. Nous donnerons dans un autre travail la démonstration de la formule (67).

La fonction Q_p est positive sur l'intervalle (x_0, x_p) . La démonstration à l'aide de la formule (67) est plus compliquée. Mais avec la formule (66) la démonstration est immédiate.

En effet les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2p}$ qui définissent l'opérateur $L_p^{(n)}[f]$ par l'identité (48) sont positifs et les fonctions $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-2p}$ sont

non négatives sur l'intervalle (x_0, x_n) . Il résulte que la fonction Q_p est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) . On a

$$\int_{x_0}^{x_n} Q_p(s) ds = (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2p}) h^{2p}$$

et en appliquant la formule (55) on peut écrire

$$(68) \quad \int_{x_0}^{x_n} Q_p(s) ds = \frac{C_{n+1}^{2p+1}}{C_{n-p}^p} h^{2p}$$

9. On peut faire plusieurs applications de la formule (65). Ainsi pour $p=1$ cette formule peut s'écrire sous la forme

$$(69) \quad f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} = \frac{n-1}{2} (f_0 + f_n) - \frac{n-1}{2} \int_{x_0}^{x_n} Q_p(s) f^{(n)}(s) ds.$$

Elle comprend comme cas particuliers les deux premières formules (59') qu'on obtient pour $f(r) = s - x_0$ et $f(s) = (s - x_0)^2$

De même pour $f(s) = (s - x_0)(s - x_0 - h)$ la formule (69) donne

$$(70) \quad 1.2 + 2.3 + \dots + (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

Pour $p=q$, la formule (65) peut s'écrire sous la forme :

$$(71) \quad f_2 + f_3 + \dots + f_{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)}{12} \left[\frac{n+4}{n-2} (f_1 + f_{n-1}) - (f_0 + f_n) \right] + \\ + \frac{(n-2)(n-3)}{12} \int_{x_0}^{x_n} Q_2(s) f^{(4)}(s) ds$$

De cette formule on déduit la somme :

$$1^r + 2^r + \dots + (n-3)^r$$

en faisant $f(s) = (s - x_0 - h)^r$ pour $r = 1, 2, 3, 4$

De même on déduit

$$(72) \quad 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \dots + (n-3)^2 (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12} (3n-8)$$

en faisant dans la formule (71), $f(s) = (s - n_0 - h)^2 (s - x_0)$ ainsi que la formule

$$1^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + \dots + (n-3)^2 (n-2)^2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{15}.$$

(72)

$$\cdot (3n^2 - 12n + 10)$$

qu'on obtient en faisant dans la formule (71), $f(s) = (s - x_0 - h)^2 (s - x_0)^2$

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Ionescu — Cuadraturi numerice, Editura Tehnică, București 1957.
2. D. V. Ionescu — La représentation des différences divisées par des intégrales définies et „les Fonctions spline”. Comunicare, 14 sept. 1968 la „Colloque sur les équations fonctionnelles” Bucarest-Mamaia 11—17 sept. 1968.
3. P. Aubert, G. Papellier — Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie. T. II. Paris 1920, p. 18, ex. 47., 48.
4. T. Popoviciu — Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes. „Mathematica” T. 10. 194—208 (1935).

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 655

CU PRIVIRE LA UNELE ASPECTE ALE ECHILIBRULUI CERNEALĂ-APĂ ÎN PROCESUL DE IMPRIMARE OFFSET CU PLĂCI BIMETALICE CUPRU-CROM *

TH. BĂDESCU, L. PAPAHAĞI

I. Introducere

La tiparul offset, forma de imprimare prezintă elementele active (imprimabile) și neutre (neimprimabile) practic în același plan. Din acest motiv trebuie să existe posibilitatea de a depune cerneala numai pe elementele imprimabile, lucru care se realizează datorită proprietăților fizico-chimice diferite ale elementelor active și neutre. Prin procedeele tehnologice de pregătire a formei offset, suprafața acesteia capătă selectiv capacitatea de a accepta apa pe porțiunile neutre și cerneala pe suprafața elementelor active.

Existența concomitentă a celor două faze lichide pe forma de tipar în procesul de imprimare offset, condiționează obținerea unor imprimate de calitate, aceasta depinzând de realizarea unui echilibru adecvat între cerneala de tipar, aflată pe elementele imprimabile din cupru-metal cu pronunțate tendințe oleofile și apa de umezire a formei, aflată pe elementele netipăritoare din crom-metal cu proprietăți hidrofile [1].

Echilibrul optim între cerneală și apă este în funcție atât de condițiile de pregătire a formei de tipar, cât și de condițiile în care se desfășoară procesul de imprimare propriu-zis. Dezideratul principal în tehnologia offset este realizarea unor condiții specifice, care să conducă la o umezire suficientă și selectivă a elementelor active (oleofilizate) și neutre (hidrofilizate) ale formei, precum și la realizarea unei continuități și rezistențe suficiente a peliculelor de cerneală și apă pe suporturile respective.

Lucrarea de față își propune ca, prin determinări în condiții statice, referitoare la fenomenele de umezire care au loc la nivelul suprafețelor metalice de cupru și crom și la lucrul mecanic de adeziune la interfața liant-metal, să elucideze câteva aspecte ale proceselor din tehnologia offset, la utilizarea unor cerneluri indigene.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, 1-3 noiembrie 1968.