

REZOLVAREA ECUAȚIILOR CU MULȚIMI

de

AUREL IOANOVICIU ȘI ȘTEFAN N. BERTI

INTRODUCERE

În teoria mulțimilor și în aplicațiile acesteia (topologie, teoria evenimentelor, calculul probabilităților, etc.) adesea se ivește problema rezolvării unor ecuații și sisteme de ecuații cu mulțimi. Astfel sînt de exemplu ecuațiile [1]:

$$AX = AB,$$

$$A + X = A + B,$$

$$AB + X = (A + C)(B + C).$$

Observație. Pentru simplificarea scrierii am adoptat notația $A \cup B = A + B$; $A \cap B = AB$; $\bar{A} = \bar{A}$.

Anumite identități din teoria mulțimilor pot fi generalizate folosind asemenea ecuații. Astfel în cazul identității

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

se cere aflarea unor mulțimi X, Y încît

$$A + BC = (A + X)(A + Y).$$

O soluție particulară a acestei ecuații este:

$$X = B, \quad Y = C.$$

În rezolvarea acestor ecuații metoda folosită nu este unitară, aceasta bazîndu-se pe diferite artificii care permit rezolvarea completă numai în cazuri particulare.

Vom cita din lucrarea [1] rezolvarea ecuației

$$AB + X = (A + C)(B + C).$$

Se folosește identitatea

$$(A + C)(B + C) = AB + C$$

și se obține soluția

$$X = \overline{ABC} + ABD,$$

unde D este o mulțime arbitrară. Din această soluție rezultă că se presupune cunoscută rezolvarea ecuației de forma

$$A + X = A + B$$

a cărei soluție este

$$X = \overline{A}B + AD$$

unde D este o mulțime arbitrară.

Evident că soluția prezentată folosește anumite artificii care într-un caz mai complicat ar fi greu de găsit.

În cele ce urmează ne propunem să dăm o metodă unitară pentru rezolvarea oricărei ecuații sau sistem de ecuații cu mulțimi.

1. TABLOURI BOOLEENE

Definiție. Un tablou dreptunghiular format din 2^m linii și 2^n coloane cu elementele 0 și 1

$$(a_{i,j}) = (a_{i,j})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,2^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^m,1} & \dots & a_{2^m,2^n} \end{pmatrix}$$

se numește **tablou boolean** dacă se introduc operațiile:

$$(a_{i,j}) \circ (b_{i,j}) = (a_{i,j} \circ b_{i,j})$$

$$(i = 1, \dots, 2^m; j = 1, \dots, 2^n)$$

$$\neg (a_{i,j}) = (\neg a_{i,j})$$

o fiind oricare din operațiile binare ale algebrei propoziționale, iar $\neg$ fiind negația.

Operațiile cu tablourile booleene satisfac proprietățile calculului propozițional. De exemplu

$$(a_{i,j}) \Rightarrow (b_{i,j}) = (\neg (a_{i,j})) \vee (b_{i,j}).$$

Propoziției identice adevărate îi corespunde tabloul format din elementele 1 iar propoziției identice false cel format din elementele 0.

2. CORESPONDENȚA DINTRE TABLOURILE BOOLEENE ȘI FUNCȚIILE DE MULȚIMI

Să considerăm funcția de mulțimi:

$$F = F(A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n)$$

unde F reprezintă expresia obținută prin aplicarea operațiilor din teoria mulțimilor (reuniune, intersecție, complementară, etc.) asupra mulțimilor $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$.

M fiind o mulțime și T mulțimea totală, vom nota:

$$\overset{1}{M} = M, \overset{0}{M} = \overline{M} = T - M.$$

Sistemul format din funcțiile de mulțimi

$$\overset{\eta_1}{A_1} \dots \overset{\eta_m}{A_m} \overset{\varepsilon_1}{X_1} \dots \overset{\varepsilon_n}{X_n} = \prod_{i=1}^m \overset{\eta_i}{A_i} \prod_{j=1}^n \overset{\varepsilon_j}{X_j} \quad (\eta_i, \varepsilon_j \in \{0, 1\})$$

se numește *partiția* determinată de mulțimile $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$, acest sistem fiind format din 2^{m+n} funcții.

Se știe că orice funcție de mulțimi $F(A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n)$ se poate reprezenta sub forma

$$(1) \quad (\eta_1, \dots, \eta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \overline{0, 1}^{m+n} \sum \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \overset{\alpha \eta_i \varepsilon_j}{T A_i X_j}$$

unde

$$(2) \quad \alpha = \alpha(\eta_1, \dots, \eta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}$$

$$((\eta_1, \dots, \eta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \overline{0, 1}^{m+n})$$

este o funcție determinată de F . S-a notat cu $\overline{0, 1}^{m+n}$ mulțimea sistemelor ordonate de $m+n$ numere egale cu 0 sau 1.

Reprezentarea (1) a funcției F se numește *reprezentare normală disjunctivă* sau *reprezentare canonică*. Fiind dată funcția α din (2) funcția F este determinată, abstracție făcând de transformările booleene echivalente.

Dacă

$$r = 1 + \sum_{k=1}^m \eta_k 2^{m-k}, \quad s = 1 + \sum_{l=1}^n \varepsilon_l 2^{n-l}$$

vom nota

$$\alpha(\eta_1, \dots, \eta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \beta(r, s)$$

deoarece corespondența

$$(\eta_1, \dots, \eta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \leftrightarrow (r, s)$$

$$(r = 1, 2, \dots, 2^m; s = 1, 2, \dots, 2^n)$$

este biunivocă. Se poate arăta [2] că în această corespondență biunivocă

$$\eta_k = \frac{1 - (-1)^{\left\lfloor \frac{r-1}{2^{m-k}} \right\rfloor}}{2}, \quad \varepsilon_l = \frac{1 - (-1)^{\left\lfloor \frac{s-1}{2^{n-l}} \right\rfloor}}{2}.$$

Funcției F respectiv funcției α pe care o determină îi corespunde tabloul boolean

$$F^* = (a_{i,j})$$

unde

$$a_{i,j} = \beta(i, j).$$

Astfel s-a realizat o corespondență biunivocă între familia funcțiilor de mulțimi $\{F\}$ și mulțimea tablourilor booleene $\{F^*\}$.

Vom da un exemplu. Funcției

$$F = F(A, X, Y) = (A + X)(A + Y)$$

îi corespunde tabloul boolean

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} F &= A + AX + AY + XY = A\bar{X}\bar{Y} + A\bar{X}Y + AXY + \bar{A}XY = \\ &= \bar{A}X\bar{Y} + \bar{A}XY + A\bar{X}\bar{Y} + A\bar{X}Y + AXY + \bar{A}XY + \bar{A}XY + \\ &\quad + AXY = \\ &= \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} + \\ &\quad + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}. \end{aligned}$$

Efectuând calculele obținem

$$\begin{aligned} \alpha(0,0,0) &= \beta(1,1) = 0 = a_{1,1} \\ \alpha(0,0,1) &= \beta(1,2) = 0 = a_{1,2} \\ \alpha(0,1,0) &= \beta(1,3) = 0 = a_{1,3} \\ \alpha(0,1,1) &= \beta(1,4) = 1 = a_{1,4} \\ \alpha(1,0,0) &= \beta(2,1) = 1 = a_{2,1} \\ \alpha(1,0,1) &= \beta(2,2) = 1 = a_{2,2} \\ \alpha(1,1,0) &= \beta(2,3) = 1 = a_{2,3} \\ \alpha(1,1,1) &= \beta(2,4) = 1 = a_{2,4} \end{aligned}$$

care sînt tocmai elementele tabloului F^* .

Observație. Adesea se pune problema de a introduce anumite mulțimi noi într-o funcție de mulțimi. Astfel în loc de funcția $F(A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n)$ se cere obținerea unei funcții de forma $G(A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_{m+p})$

$X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+q})$ care să fie identică cu F . Această trecere de la F la G se poate obține folosind de exemplu identitatea

$$F + H\emptyset = G \equiv F,$$

unde

$$H = H(A_1, \dots, A_{m+p}, X_1, \dots, X_{n+q})$$

este o funcție arbitrară.

Prin trecerea de la F la G se schimbă și tabloul boolean F^* (cu 2^m linii și 2^n coloane) într-un tablou boolean G^* (cu 2^{m+p} linii și 2^{n+q} coloane).

Astfel, în exemplul precedent considerînd

$$F(A, X, Y) = (A + X)(A + Y) = G(A, B, C, X, Y)$$

obținem

$$G^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă se dă sistemul de funcții de mulțimi

$$(3) \quad F_j = F_j(A_{1,j}, \dots, A_{m,j}, X_{1,j}, \dots, X_{n,j}), \quad (j = 1, \dots, k)$$

și între mulțimile

$$A_{1,1}, \dots, A_{m,k},$$

respectiv

$$X_{1,1}, \dots, X_{n,k},$$

sînt distincte mulțimile

$$A_1, \dots, A_m$$

respectiv

$$X_1, \dots, X_n$$

atunci pe baza celor de mai sus putem trece de la sistemul (3) la sistemul de funcții

$$(4) \quad G_j = G_j(A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n) \quad (j = 1, \dots, k)$$

identice cu funcțiile sistemului (3). În acest caz vom spune că G_j este reprezentarea funcției F_j în sistemul $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$.

Să considerăm funcțiile F_1 și F_2 . Fie G_1 și G_2 reprezentările lor în sistemul $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$ și G_1^* și G_2^* tablourile booleene corespunzătoare. Atunci avem evident

$$G_1^* \vee G_2^* = (G_1 + G_2)^*$$

$$G_1^* \wedge G_2^* = (G_1 G_2)^*$$

$$\neg G_1^* = \bar{G}_1^*.$$

Aceste relații permit traducerea operațiilor cu mulțimi în operații logice cu tablouri booleene corespunzătoare.

Observație. $G_1 = G_2$ înseamnă $G_1^* \Leftrightarrow G_2^*$.

În particular în sistemul $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$ mulțimile A_i, X_j sînt funcții de mulțimi ale căror tablouri booleene sînt A_i^*, X_j^* . Tabloul boolean corespunzător funcției G se obține traducînd conform celor de mai sus în limbaj logic operațiile care ne-au condus la G .

Exemplu. În sistemul A, B, C, X, Y avem:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci

$$((A + X)(A + Y))^* = (A^* \vee X^*) \wedge (A^* \vee Y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rezultat care coincide cu cel obținut într-un exemplu precedent.

3. NOȚIUNEA DE SOLUȚIE BOOLEANĂ

Fiind date funcțiile de mulțimi

$$F_j = F_j(A_{1,j}, \dots, A_{m,j}, X_{1,j}, \dots, X_{n,j}) \quad (j = 1, \dots, k)$$

$$F'_j = F'_j(A'_{1,j}, \dots, A'_{m,j}, X'_{1,j}, \dots, X'_{n,j})$$

putem forma cu ele sistemul de ecuații

$$(5) \quad F_j = F'_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

în care mulțimile A sînt date (parametri) iar mulțimile X sînt mulțimi care trebuie determinate (necunoscute). Reprezentînd funcțiile F în $A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_n$ (trecerea dela (3) la (4)) sistemul (5) devine

$$(6) \quad G_j = G'_j \quad (j = 1, \dots, k).$$

Acestui sistem îi corespunde tabloul boolean

$$(7) \quad S^* = \bigwedge_{j=1}^k (G_j^* \Leftrightarrow G'_j) = (s_{i,j})$$

numit soluția booleană a sistemului (6). Vom vedea că soluția booleană dă o informație totală asupra soluției sistemului și ale condițiilor de existență ale acestei soluții.

Exemplu. Pentru ecuația

$$A + BC = (A + X)(A + Y)$$

avem soluția booleană

$$S^* = ((A^* \vee (B^* \wedge C^*)) \Leftrightarrow ((A^* \vee X^*) \wedge (A^* \vee Y^*))) =$$

$$= \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \chi$$

$$\wedge \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

deci

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. REZOLVAREA UNUI SISTEM SPECIAL DE ECUAȚII CU MULȚIMI

Vom studia rezolvarea unui sistem de ecuații cu mulțimi de forma

$$(8_0) \quad \prod_{i=1}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset \quad (j = 1, \dots, s)$$

unde

$$\varepsilon_{j,i} \in \{0, 1\} \text{ și } \bar{M}^0 = \bar{M}, \bar{M}^1 = M.$$

Ecuația

$$XA = \emptyset$$

are soluția

$$X = \bar{A}D$$

unde D este o mulțime arbitrară. Astfel putem rezolva oricare dintre ecuațiile sistemului (8_0) , de exemplu prima ecuație

$$\prod_{i=1}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} = \emptyset$$

în raport cu oricare dintre necunoscute, de exemplu X_1 . Obținem

$$(9) \quad \bar{X}_1^{\varepsilon_{1,1}} = X_{n+1} \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} = X_{n+1} \sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}}$$

unde X_{n+1} este o mulțime arbitrară. Din (9) rezultă:

$$(10_1) \quad X_1 = X_{n+1} \sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}}$$

Înlocuind (10_1) într-una din ecuațiile sistemului (8_0) avem

$$(11) \quad X_{n+1} \sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset$$

unde

$$\varepsilon_{j,n+k} = \delta_{\varepsilon_{j,k}}^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \varepsilon_{k,k} \neq \varepsilon_{j,k} \\ 1 & \text{dacă } \varepsilon_{k,k} = \varepsilon_{j,k} \end{cases}$$

este simbolul lui Kronecker.

Vom deosebi două cazuri.

a) $\varepsilon_{j,n+1} = 1$. În acest caz (11) devine

$$\left(X_{n+1} \sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} \right) \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset$$

adică

$$X_{n+1} \left(\sum_{i=2}^n \bar{X}_i \prod_{k=2}^n \bar{X}_k \right) \emptyset =$$

sau

$$X_{n+1} \left(\sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} \right) = \emptyset$$

Vom efectua următoarele transformări

$$\sum_{i=2}^n \bar{X}_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \sum_{i=2}^n \left(\bar{X}_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} \right) = \sum_{i=2}^n \prod_{k=2}^n \bar{T}^{1-\alpha_{1,j,i}} \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \sum_{i=2}^n \prod_{k=2}^n \bar{T}^{1-\alpha_{1,j,i}} \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}},$$

unde

$$\alpha_{1,j,i} = \delta_{\varepsilon_{j,i}}^{\varepsilon_{1,i}}$$

Avem

$$\sum_{i=2}^n \bar{T}^{1-\alpha_{1,j,i}} = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \dots, n) \\ T & \text{în alt caz.} \end{cases}$$

Deci în reuniunea

$$\sum_{i=2}^n \bar{T}^{1-\alpha_{1,j,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}}$$

termenii sînt fie mulțimea vidă, fie mulțimea constantă (față de indicele i):

$$\prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}}$$

și astfel

$$\sum_{i=2}^n \bar{T}^{1-\alpha_{1,j,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \dots, n) \\ \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} & \text{în alt caz.} \end{cases}$$

Deci în cazul nostru (cazul a)) ecuația aleasă din sistemul (11) devine fie identitatea

$$(11'_a) \quad \emptyset = \emptyset$$

fie o ecuație de forma

$$(11''_a) \quad \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} X_{n+1} = \emptyset.$$

Observație. În cazul (11'_a) numărul de ecuații ale sistemului (8_0) se reduce. Într-adevăr acest caz este realizat dacă $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ ($i = 2, \dots, n$) și $\varepsilon_{j,n+1} = 1$, deci $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{j,1}$. Atunci ecuația din care l-am exprimat pe X_1 este identică cu ecuația în care l-am substituit. Presupunînd că eliminăm de la bun început ecuațiile care se repetă, nu mai apare cazul (11'_a) și astfel în cazul a) ajungem la ecuații de forma

$$(11_a) \quad \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} X_{n+1} = \emptyset.$$

b) $\varepsilon_{j,n+1} = 0$. În acest caz (11) devine

$$\left(\bar{X}_{n+1} + \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} \right) \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset.$$

Făcînd calculele:

$$\bar{X}_{n+1} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} + \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset$$

$$\prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} & \text{dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \dots, n) \\ \emptyset & \text{în alt caz} \end{cases}$$

obținem ecuația

$$(11'_b) \quad \bar{X}_{n+1} \prod_{k=2}^n \bar{X}_k^{\varepsilon_{j,k}} + \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset$$

dacă $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ ($i = 2, \dots, n$) sau

$$(11''_b) \quad \bar{X}_{n+1} \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset$$

în alt caz. Ecuația (11'_b) este echivalentă cu

$$(11'''_b) \quad \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset.$$

Observație. Ecuația (11'''_b) s-a obținut în cazul $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ ($i = 2, \dots, n$) și $\varepsilon_{1,1} \neq \varepsilon_{j,1}$; deci în cazul în care factorii diferiți de X_1 ai ecuației din sistemul (8_0) din care l-am exprimat pe X_1 coincid cu factorii respectiv din ecuația în care l-am substituit pe X_1 . Deci cele două ecuații au forma

$$(12) \quad UV = \emptyset, \bar{U}V = \emptyset$$

care formează un sistem echivalent cu ecuația

$$(13) \quad V = \emptyset.$$

Presupunând în acest caz că de la bun început în sistemul (8_0) înlocuim perechile de ecuații de forma (12) cu o singură ecuație de forma (13) nu mai apare cazul (11''). Astfel în cazul nostru (cazul b)), ajungem la ecuații de forma

$$(11_b) \quad \prod_{i=2}^n \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} \bar{X}_{n+1} = \emptyset.$$

În concluzie ecuațiile (11_a) și (11_b) se pot scrie unitar sub forma

$$(8_1) \quad \prod_{i=2}^{n+1} \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset \quad (j = 2, \dots, s).$$

Observație. Subliniem din nou că (8_1) s-a obținut presupunând că de la bun început s-au efectuat simplificările din observațiile de la a) și b).

Astfel sistemul (8_0) s-a redus la ecuația (10_1) și sistemul (8_1) .

Sistemul de ecuații (8_1) are aceeași formă ca și sistemul (8_0) , ajungându-se de la (8_0) la (8_1) prin mărirea indicilor necunoscutelor cu o unitate; ele se mai deosebesc prin faptul că X_{n+1} este o mulțime arbitrară și sistemul (8_1) are cu o ecuație mai puțin decât (8_0) .

Aplicînd acest procedeu de s ori obținem sistemele:

$$(8_r) \quad \prod_{i=r+1}^{n+r} \bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset \quad (r = 0, 1, \dots, s-1; j = r+1, \dots, s)$$

și egalitățile

$$(10_{r+1}) \quad X_{r+1} = \sum_{i=r+2}^{n+r} \overbrace{\bar{X}_i^{\varepsilon_{j,i}}}^{\varepsilon_{j,r+1}} X_{n+r+1} \quad (r = 0, 1, \dots, s-1).$$

Relația (10_s) exprimă pe X_s în funcție de $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$. Substituind (10_s) în (10_{s-1}) avem exprimarea lui X_{s-1} în funcție de $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$. Continuînd aceste substituții obținem pe $X_1, \dots, X_s$ în funcție de $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$.

Deosebim două cazuri:

1) $s \geq n$. În acest caz vom avea pe $X_1, \dots, X_n$ în funcție de $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$. Să notăm $X_j = f_j(X_{s+1}, \dots, X_{s+n})$, $(j = 1, \dots, n)$.

2) $s < n$. În acest caz vom avea pe $X_1, \dots, X_s$ în funcție de $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$. Vom nota $X_j = f_j(X_{s+1}, \dots, X_{s+n})$, $(j = 1, \dots, n)$ unde $f_{s+k}(X_{s+1}, \dots, X_{s+n}) = X_{s+k}$, $(k = 1, \dots, n-s)$. În felul acesta putem uni cele două cazuri, obținînd soluția generală a sistemului (8_0) sub forma

$$(14) \quad X_j = f_j(X_{s+1}, \dots, X_{s+n}) \quad (j = 1, \dots, n)$$

unde $X_{s+1}, \dots, X_{s+n}$ sînt mulțimi arbitrare. Pentru a evita situația în care mulțimile necunoscute și mulțimile arbitrare sînt reprezentate cu același simbol vom nota

$$X_{s+j} = D_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

și astfel vom avea formulele

$$(15) \quad X_j = f_j(D_1, \dots, D_n) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Observație. Notînd cu S sistemul (8_0) soluția (15) a acestui sistem se mai poate scrie sub forma

$$(16) \quad X_j = \sum_{(\varepsilon'_{1,j}, \dots, \varepsilon'_{n,j}) \in \Phi_j(S)} \bar{D}_1^{\varepsilon'_{1,j}} \bar{D}_2^{\varepsilon'_{2,j}} \dots \bar{D}_n^{\varepsilon'_{n,j}} \quad (j = 1, \dots, n)$$

unde $\Phi_j(S)$ este o mulțime de sisteme n -dimensionale cu componentele 0 și 1.

Exemplu 1. Sistemul

$$XYZ = \emptyset, \quad X\bar{Y}\bar{Z} = \emptyset$$

se scrie sub forma

$$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} = \emptyset, \quad \bar{X}\bar{Y}Z = \emptyset$$

și are soluția

$$X = ZVW + \bar{Z}V = \bar{Z}\bar{V}\bar{W} + \bar{Z}\bar{V}, \quad Y = \bar{Z}\bar{V} + \bar{W} = \bar{Z}\bar{V} + \bar{W}, \quad Z = Z = \bar{Z}$$

Exemplu 2. Sistemul

$$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} = \emptyset, \quad \bar{X}\bar{Y}Z = \emptyset, \quad X\bar{Y}Z = \emptyset, \quad XY\bar{Z} = \emptyset$$

are soluția

$$X = \bar{D}F + \bar{D}\bar{E} + EF, \quad Y = D\bar{E} + DF, \quad Z = E\bar{F} + DE$$

unde D, E și F sînt mulțimi arbitrare.

5. REZOLVAREA SISTEMELOR ÎN CAZUL GENERAL

Să considerăm sistemul

$$(6) \quad G_j = G'_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

și soluția lui booleană

$$(7) \quad S^* = \bigwedge_{j=1}^k (G_j^* \Leftrightarrow G'_j) = (s_{i,j})_{2^m, 2^n} = (s_{i,j}).$$

Linia i din tabloul boolean (7) corespunde componentei

$$C_i = \prod_{j=1}^m A_j^{\eta_{i,j}}$$

a partiției determinate de cei m parametri $A_1, \dots, A_m$, unde

$$\eta_{i,j} = \frac{1 - (-1)^{\left\lfloor \frac{i-1}{2^{j-1}} \right\rfloor}}{2}.$$

Elementele egale cu 0 din linia i reprezintă componentele vide determinate de necunoscutele X în C_i . Astfel în componenta C_i obținem un sistem de ecuații de forma (8_0) , mulțimea totală fiind C_i . În componenta C_i soluția (16) corespunzătoare sistemului obținut din linia i este

$$X_{j,i} = C_i \sum_{\Phi_{j,i}} \prod_{k=1}^n \frac{\epsilon_{k,j}}{D_k}$$

unde

$$X_{j,r} = C_i X_j.$$

Soluția sistemului de ecuații cu mulțimi (6) este

$$(17) \quad X_j = \sum_{i=1}^{2^m} X_{j,i} \quad (j = 1, \dots, n)$$

iar condiția necesară și suficientă de existență a acestei soluții este

$$(18) \quad \left(\sum_{j=1}^{2^n} s_{i,j} = 0 \right) \Rightarrow \left(\prod_{j=1}^m A_j = \emptyset \right).$$

Într-adevăr sistemul de ecuații

$$\prod_{j=1}^n X_{i,j} = \emptyset \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n)$$

care se obține dintr-o linie cu toate elementele nule, nu conține ecuații identice și are soluția $C_i = \emptyset$.

6. EXEMPLE

1). Să considerăm ecuația

$$A + BC = (A + X)(A + Y).$$

S-a arătat că

$$((A + X)(A + Y))^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Asemănător se obține

$$(A + BC)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluția booleană a acestei ecuații este

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru liniile 1—3 sistemele (8_0) au forma

$$X_j Y_j = \emptyset \quad (j = 1, 2, 3)$$

cu soluția

$$X_j = D\bar{E}C_j, \quad Y_j = EC_j$$

Pentru linia a 4-a sistemul (8_0) este

$$\bar{X}_4 \bar{Y}_4 = \emptyset, \quad \bar{X}_4 Y_4 = \emptyset, \quad X_4 \bar{Y}_4 = \emptyset$$

cu soluția

$$X_4 = Y_4 = C_4.$$

Pentru liniile 5—8 nu se impun condiții, deci

$$X_j = DC_j, \quad Y_j = EC_j, \quad (j = 5, 6, 7, 8)$$

Soluția generală a ecuației este

$$X = \sum_{j=1}^{2^3} X_j = D\bar{E}(C_1 + C_2 + C_3) + C_4 + D(C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{2^3} Y_j = E(C_1 + C_2 + C_3) + C_4 + E(C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

care se mai poate scrie

$X = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + \bar{A}BC + AD$, $Y = \bar{A}E + \bar{A}BC + AE$
unde D și E sînt mulțimi arbitrare.

Interpretarea soluției. Pentru ca să aibă loc identitatea

$$A + BC = (A + X)(A + Y)$$

(identitatea care pune problema generalizării legii distributivității) atît X cît și Y trebuie să acopere componente $C_4 = \bar{A}BC$, deci $C_4 \subset XY$, și

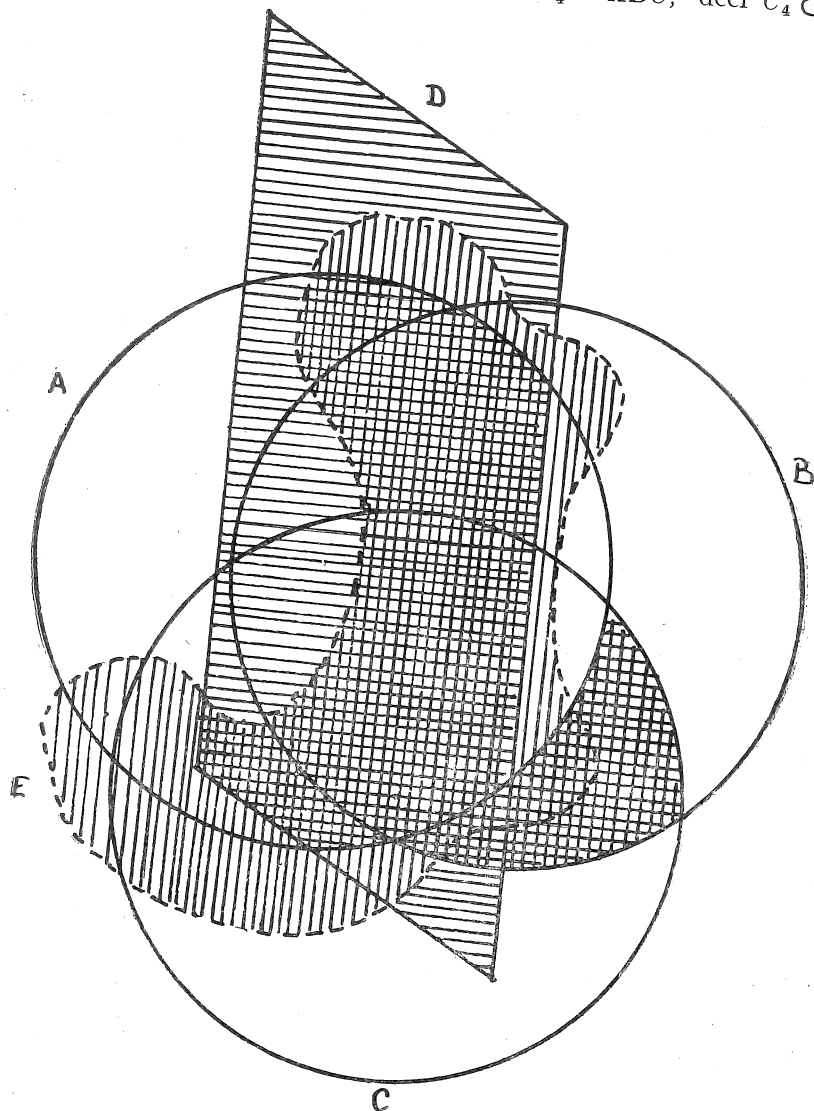


figura 1

în componentele $C_1 = \bar{A}B\bar{C}$, $C_2 = \bar{A}BC$, $C_3 = \bar{A}B\bar{C}$ trebuie ca X și Y să fie disjuncte, deci $XY(C_1 + C_2 + C_3) = \emptyset$. În cazul particular al legii distributivității aceste condiții sînt îndeplinite.

Reprezentarea grafică a soluției. În figura 1 am reprezentat sferele logice ale mulțimilor date A , B , C și ale mulțimilor arbitrare D și E ; mulțimile X și Y sînt reprezentate prin hașurare orizontală respectiv verticală.

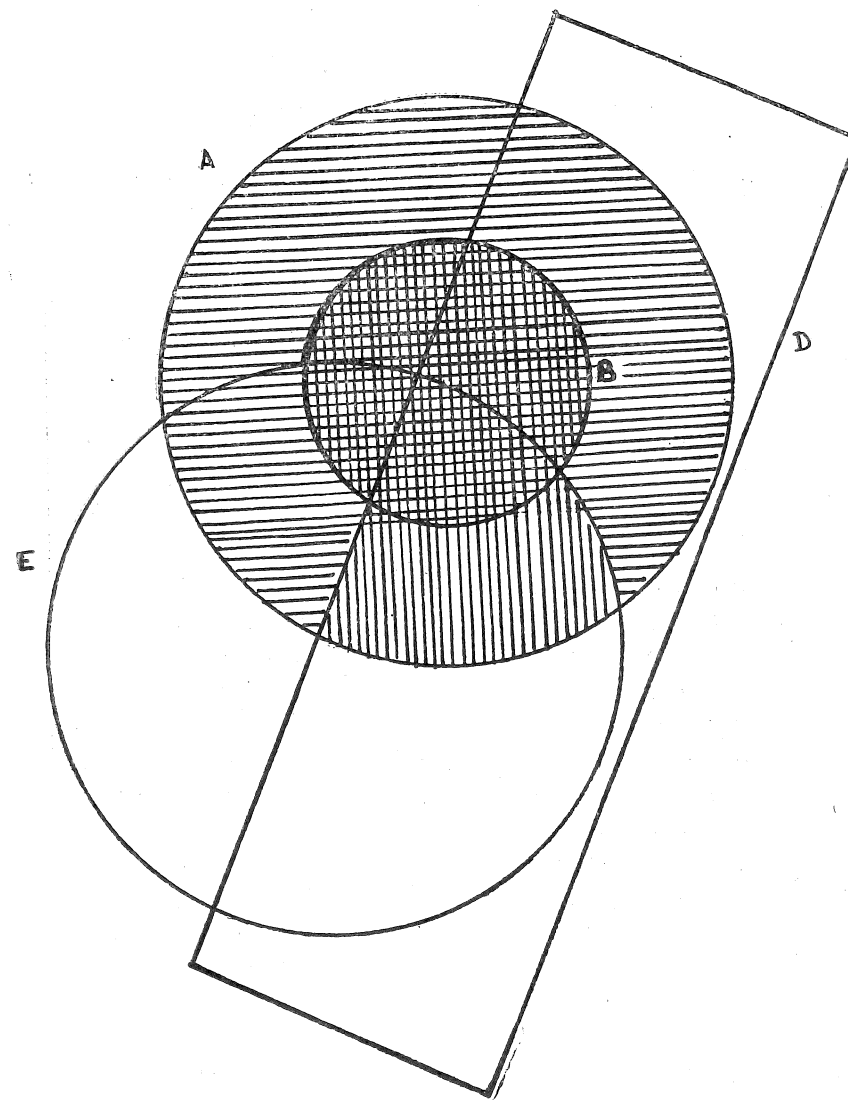


figura 2

2. Fie sistemul

$$X + Y = A, XY = B.$$

Soluția booleană a acestui sistem este

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci

$$X = A\bar{B}\bar{D} + A\bar{B}\bar{E} + AB, Y = A\bar{B}DE + AB:$$

Elementele liniei a doua din S^* fiind zero, trebuie să avem $C_2 = \bar{A}B = \emptyset$, deci $B \subset A$. În figura 2 se dă reprezentarea acestei soluții.

TABEL

n	Tip de linie	X	Y	Observații
1	0 0	$X = C = \emptyset$		
	0 1	$X = C$		
	1 0	$X = \emptyset$		
	1 1	$X = D$		
2	0 0 0 0	$X = C = \emptyset$	$Y = C = \emptyset$	$X = Y = C = \emptyset$
	0 0 0 1	C	C	$X = Y = C$
	0 0 1 0	C	$\emptyset$	$X = \bar{Y} = C$
	0 0 1 1	C	D	$X = C$
	0 1 0 0	$\emptyset$	C	$\bar{X} = Y = C$
	0 1 0 1	D	C	$Y = C$
	0 1 1 0	$\bar{D} + \bar{E}$	DE	$X + Y = C, XY = \emptyset$
	0 1 1 1	$\bar{D} + \bar{E}$	E	$X + Y = C$
	1 0 0 0	$\emptyset$	$\emptyset$	$X = Y = \emptyset$
	1 0 0 1	D	D	$X = Y$
	1 0 1 0	D	$\emptyset$	$Y = \emptyset$
	1 0 1 1	E	ED	$Y \subset X$
	1 1 0 0	$\emptyset$	D	$X = \emptyset$
	1 1 0 1	DE	E	$X \subset Y$
	1 1 1 0	$\bar{E}D$	E	$XY = \emptyset$
	1 1 1 1	D	E	

3). În tabelul de mai sus sînt date soluțiile sistemelor de ecuații de forma (8₀) care se obțin pe o anumită componentă în cazurile $n = 1$ și $n = 2$, pentru toate tipurile de linii care pot apărea într-o soluție booleană. În acest tabel C este componenta respectivă, D și E sînt mulțimi arbitrare.

Acest tabel permite rezolvarea rapidă a sistemelor de ecuații cu mulțimi în cazurile $n = 1$ și $n = 2$.

Metoda prezentată în această lucrare permite programarea la mașinile de calcul a rezolvării ecuațiilor cu mulțimi.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS À ENSEMBLES

Résumé

Dans la théorie des ensembles et dans les applications de celle-ci (topologie, théorie des événements, calcul des probabilités, etc, ...) il se présente souvent l'occasion de résoudre des équations et systèmes des équations à ensembles. Les méthodes de résolution sont difficiles et nécessitent en général des différents artifices. Les auteurs proposent une méthode simple et unitaire pour résoudre les équations et les systèmes des équations à ensembles.

Dans ce but on introduit la notion de tableau boolean (chap. 1), on établit la correspondance entre les tableaux booléens et les fonctions des ensembles (chap. 2) et on donne la notion de solution booléenne (chap. 3). Dans le chapitre 4 on passe à la résolution d'un système spécial des équations à ensembles, pour arriver dans le chapitre 5 à la résolution des systèmes dans le cas général.

La méthode exposée dans cette note a l'avantage en plus de pouvoir programmer la résolution des équations à ensembles aux calculateurs digitaux.

BIBLIOGRAPHIE

1. Volodin, B. Ganin, M. ș. a. *Rukovodstvo dlia inginerov po rešeniu zadaci teorii veroiatnostei*, Leningrad, 1962.