

ASUPRA REPREZENTĂRII FUNCȚIILOR NOMOGRAFICE

DE

L. BAL și M. MIHOC

În lucrare se stabilește corespondența dintre tipurile (I)–(VII) de funcții de trei variabile date de M. Warmus și nomogramele cu puncte aliniate cunoscute, analoagă cu corespondența dintre cele șapte forme canonice ale ecuațiilor stabilite de R. Soreau pentru ecuațiile cu trei variabile și nomogramele cu puncte aliniate.

1. R. Soreau a studiat nomogramele cu puncte aliniate după ordinul nomografic al ecuațiilor, care este numărul cel mai mic de funcții de câte o variabilă liniar independente, care intră în ecuația dată.

M. Warmus, în lucrarea *Nomographic functions*, reia problema fundamentală a nomografiei, dându-i o soluție practică, bazată pe studiul funcțiilor nomografice de trei variabile.

Fie $F: E \rightarrow R$, $E = E_1 \times E_2 \times E_3$, $E_i \subset R$ ($i = 1, 2, 3$)

Se știe că pentru a reprezenta ecuația :

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

printr-o nomogramă cu puncte aliniate este necesar și suficient să existe o ecuație echivalentă cu (1) de forma :

$$(2) \quad F(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

unde $X_i \equiv X_i(x)$, $Y_i \equiv Y_i(y)$, $Z_i \equiv Z_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$).

Analog ordinului nomografic introdus de R. Soreau, M. Warmus definește astfel rangul unei funcții :

a) Funcția reală de variabilă reală $G(u, v)$ definită pe produsul cartezian $D = D_1 \times D_2$, $D_1 \subset R$, $D_2 \subset R$ este de rangul n ($n > 1$), dacă și numai dacă există funcțiile $U_1, U_2, \dots, U_n; V_1, V_2, \dots, V_n$ astfel că: $G = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \dots + U_n V_n$, unde $U_i = U_i(u)$, $V_i = V_i(v)$ sînt definite pe mulțimile D_1 și D_2 și nu există funcțiile $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{n-1}, \bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_{n-1}$ definite pe aceleași mulțimi, astfel ca $G = \bar{U}_1 \bar{V}_1 + \bar{U}_2 \bar{V}_2 + \dots + \bar{U}_{n-1} \bar{V}_{n-1}$.

b) Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul n în raport cu variabila x , dacă și numai dacă, considerată ca o funcție de două variabile y și (y, z) , ea este de rangul n . În mod analog se definește rangul funcției în raport cu variabilele y și z .

c) Funcția $F(x, y, z)$ se numește nomografică, dacă există funcțiile X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$), astfel că $F(x, y, z)$ să se poată pune sub forma (1).

M. Warmus demonstrează o teoremă fundamentală din care rezultă că orice funcție nomografică cu trei variabile se încadrează într-unul din cele șapte tipuri de funcții prezentate.

2. În această lucrare vom studia formele Massau corespunzătoare acestor funcții nomografice în toate cele șapte cazuri menționate de teorema fundamentală căutîndu-le corespondența cu tipurile cunoscute de ecuații cu trei variabile reprezentabile prin nomograme cu puncte aliniate.

Se constată că ecuațiile obținute din tipurile de funcții (I) – (III) se reprezintă prin nomograme cu puncte aliniate de genul zero; cele din formele (IV) – (V) se reprezintă prin nomograme cu puncte aliniate de genul întâi; iar cele rezultate din formele (VI) și (VII) prin nomograme cu puncte aliniate de genul al doilea respectiv al treilea.

Să prezentăm mai îndeaproape aceste cazuri, unde pentru simplificare notăm: $X_i \equiv X_i(x)$, $Y_i \equiv Y_i(y)$, $Z_i \equiv Z_i(z)$, $G_i \equiv G_i(y, z)$, ($i = 1, 2, 3$).

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu fiecare dintre variabilele x, y, z :

$$(I) F(x, y, z) \equiv X_1 G_1 + X_2 G_2,$$

unde funcțiile $G_i(y, z)$ sînt ambele de rangul unu în raport cu y și z : $G_1 = Y_1 Z_1$, $G_2 = Y_2 Z_2$.

În acest caz există doi determinanți Massau diferiți

$$1. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 \\ Z_2 & 0 & Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{X_1}{\lambda X_1 + \mu X_2} & \frac{X_2}{\lambda X_1 + \mu X_2} & 1 \\ 0 & \frac{Y_1}{\mu Y_1 + \nu Y_2} & 1 \\ \frac{X_2}{\lambda Z_2 + \nu Z_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde $\lambda, \mu, \nu \neq 0$.

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu trei scări rectilinii situate pe laturile unui triunghi. Pentru valorile particulare $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = 1$, obținem ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 \\ Z_2 & 0 & Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{X_1}{X_2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} & 1 \\ \frac{Z_2}{Z_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

din care rezultă că ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă cu o nomogramă cu puncte aliniate cu două scări paralele și una secantă. Se observă că aceste două tipuri de nomograme nu sînt distincte din punct de vedere proiectiv.

Al doilea determinant conduce la:

$$2. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 & Y_1 \\ 0 & -Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{X_1}{\lambda X_1 + \mu X_2} & \frac{X_2}{\lambda X_1 + \mu X_2} & 1 \\ \frac{Y_2}{\lambda Y_2 + \nu Y_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{Z_1}{\mu Z_1 + \nu Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ și în acest caz se reprezintă printr-o nomogramă cu trei scări situate pe laturile unui triunghi sau cu două scări paralele și una secantă (dacă $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = 1$).

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu fiecare dintre variabilele x, y, z , adică

$$(II) F(x, y, z) \equiv X_1 G_1 + X_2 G_2,$$

unde funcția $G_1(y, z)$ este de rangul doi, iar $G_2(y, z)$ este de rangul întâi:

$$G_1 = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2, \quad G_2 = Y_3 Z_3,$$

Aici

$$Y_3 = m_{31} Y_1 + m_{32} Y_2, \quad Z_3 = n_{31} Z_1 + n_{32} Z_2.$$

a) Dacă $m_{31} n_{31} + m_{32} n_{32} \neq 0$, $n_{32} \neq 0$, $m_{32} \neq 0$ avem doi determinanți Massau diferiți

$$1. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & \frac{m_{31}}{m_{32}} Y_1 + Y_2 \\ m_{32} n_{31} Z_1 + m_{32} n_{32} Z_2 & -Z_2 & Z_1 - \frac{m_{31}}{m_{32}} Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} Y_1 + Y_2 & 0 & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} Z_2 - Z_1 & -\frac{m_{32}n_{31}Z_1 + m_{32}n_{32}Z_2}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scările situate pe laturile unui triunghi (dacă $n_{31} \neq 0$), sau cu două scări paralele și o a treia secantă (dacă $n_{31} = 0$)

$$2. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ m_{31}n_{32}Y_1 + m_{32}n_{32}Y_2 & -Y_2 & Y_1 - \frac{n_{31}}{n_{32}}Y_2 \\ 0 & -Z_1 & -\frac{n_{31}}{n_{32}}Z_1 - Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{X_1}{X_2} & 0 & 1 \\ -\frac{m_{31}n_{32}Y_1 + m_{32}n_{32}Y_2}{Y_2} & \frac{n_{31}}{n_{32}} \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2} & 1 \\ 0 & \frac{n_{31}}{n_{32}} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scările situate pe laturile unui triunghi (dacă $m_{31} \neq 0$), sau cu o nomogramă cu două scări paralele și a treia secantă (dacă $m_{31} = 0$).

b) Dacă $m_{31}n_{31} + m_{32}n_{32} \neq 0$, $n_{32} = 0$, $m_{32} \neq 0$, determinanții Massau sînt:

1. Avem același determinant Massau și aceeași reprezentare nomografică ca și în cazul a), din 1.

$$2. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ m_{31}n_{31}Y_1 + m_{32}n_{31}Y_2 & -Y_1 & -Y_2 \\ 0 & Z_2 & -Z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ \frac{Y_2}{Y_1} & -\frac{m_{31}n_{31}Y_1 + m_{32}n_{31}Y_2}{Y_1} & 1 \\ -\frac{Z_1}{Z_2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scările situate pe laturile unui triunghi

c) Dacă $m_{31}n_{31} + m_{32}n_{32} = 0$, $m_{32} \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & \frac{m_{31}}{m_{32}}Y_1 + Y_2 \\ m_{32}n_{31}Z_1 + m_{32}n_{32}Z_2 & -Z_2 & Z_1 - \frac{m_{31}}{m_{32}}Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1} & 0 & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2} & -\frac{m_{32}n_{31}Z_1 + m_{32}n_{32}Z_2}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În acest caz ecuația $F(x, y, z)$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scările rectilinii concurente.

Se constată că pentru funcția nomografică (II) există două nomograme cu puncte aliniate distincte proiectiv.

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu fiecare din variabilele x, y, z :

$$(III) F(x, y, z) = X_1G_1 + X_2G_2$$

funcțiile $G_i (i = 1, 2)$ sînt de rangul doi în raport cu variabilele y și z :

$$G_1 = Y_1Z_1 + Y_2Z_2,$$

$$G_2 = Y_3Z_3 + Y_4Z_4$$

unde

$$Y_3 = m_{31}Y_1 + m_{32}Y_2,$$

$$Z_3 = n_{31}Z_1 + n_{32}Z_2,$$

$$Y_4 = m_{41}Y_1 + m_{42}Y_2,$$

$$Z_4 = n_{41}Z_1 + n_{42}Z_2.$$

Notăm

$$r_{31} = m_{31}n_{31} + m_{41}n_{41} \quad r_{32} = m_{32}n_{31} + m_{42}n_{41}$$

$$r_{41} = m_{31}n_{32} + m_{41}n_{42} \quad r_{42} = m_{32}n_{32} + m_{42}n_{42}$$

a) Dacă $(r_{31} - r_{42})^2 + 4r_{32}r_{41} \neq 0$, $r_{32} \neq 0$ iar p ($i = 1, 2$) sînt soluțiile ecuației $p^2 - (r_{31} + r_{42})p + (r_{31}r_{42} - r_{32}r_{41}) = 0$.

Determinanții Massau sînt următorii:

$$1. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ r_{31}Y_1 + r_{32}Y_2 & -Y_1 & \frac{p_1 - r_{42}}{r_{32}}Y_1 + Y_2 \\ p_1Z_2 & -Z_2 & \frac{p_1 - r_{42}}{r_{32}}Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 + p_1X_2 & 0 & 1 \\ -\frac{(r_{31} - p_1)Y_1 + r_{32}Y_2}{Y_1} & -\frac{\frac{p_1 - r_{42}}{r_{32}}Y_1 + Y_2}{Y_1} & 1 \\ 0 & -\frac{\frac{p_1 - r_{42}}{r_{32}}Z_2 - Z_1}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ r_{31}Y_1 + r_{32}Y_2 & -Y_1 & \frac{p_2 - r_{42}}{r_{32}}Y_1 + Y_2 \\ p_2Z_2 & -Z_2 & \frac{p_2 - r_{42}}{r_{32}}Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{X_1 + p_2X_2}{X_2} & 0 & 1 \\ -\frac{(r_{31} - p_2)Y_1 + r_{32}Y_2}{Y_1} & -\frac{\frac{p_2 - r_{42}}{r_{32}}Y_1 + Y_2}{Y_1} & 1 \\ 0 & -\frac{\frac{p_2 - r_{42}}{r_{32}}Z_2 - Z_1}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu scările situate pe laturile unui triunghi.

b) Dacă

$$(r_{31} - r_{42})^2 + 4r_{32}r_{41} \neq 0, \quad r_{32} = 0 \quad \text{și} \quad r_{31}(r_{31} - r_{42}) \neq 0,$$

$$1. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ r_{41}Y_1 + r_{42}Y_2 & -Y_2 & r_{31}Y_1 \\ Z_1 & -\frac{1}{r_{31}}Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1 + r_{31}X_2}{X_2} & 1 \\ -\frac{r_{31}Y_1}{Y_2} & -\frac{r_{41}Y_1 + (r_{42} - r_{31})Y_2}{Y_2} & 1 \\ r_{31}\frac{Z_2}{Z_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu scările situate pe laturile unui triunghi (dacă $r_{41} \neq 0$) sau cu două scări paralele și una secantă (dacă $r_{41} = 0$)

$$2. \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ r_{31}Y_1 & -Y_1 & \frac{r_{41}}{r_{42} - r_{31}}Y_1 + Y_2 \\ r_{42}Z_2 & -Z_2 & \frac{r_{41}}{r_{42} - r_{31}}Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1 + r_{42}X_2}{X_2} & 1 \\ -\frac{\frac{r_{41}}{r_{42} - r_{31}}Y_1 + Y_2}{Y_1} & r_{42} - r_{31} & 1 \\ -\frac{\frac{r_{41}}{r_{42} - r_{31}}Z_2 - Z_1}{Z_2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuatia $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu două scări paralele sau printr-o nomogramă cu scările situate pe laturile unui triunghi, care se obține din prima nomogramă printr-o transformare proiectivă.

c) Dacă

$$(r_{31} - r_{42})^2 + 4 r_{32} r_{41} = 0 \text{ și } r_{32} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ r_{31}Y_1 + r_{32}Y_2 & -Y_1 & \frac{r_{31} - r_{42}}{2r_{32}} Y_1 + Y_2 \\ \frac{r_{31} + r_{42}}{2} Z_2 & -Z_2 & \frac{r_{31} - r_{42}}{2r_{32}} Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ -\frac{\frac{r_{31} - r_{42}}{2r_{32}} Y_1 + Y_2}{Y_1} & -\frac{r_{31}Y_1 + r_{32}Y_2}{Y_1} & 1 \\ -\frac{\frac{r_{31} - r_{42}}{2r_{32}} Z_2 - Z_1}{Z_2} & -\frac{r_{31} + r_{42}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d) Dacă $(r_{31} - r_{42})^2 + 4 r_{32} r_{41} = 0$, $r_{32} = 0$ și $r_{31} \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ m_{41}Y_1 + m_{42}Y_2 & -Y_2 & r_{31}Y_1 \\ Z_1 & -\frac{1}{r_{31}}Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ -r_{31}\frac{Y_1}{Y_2} & -\frac{r_{41}Y_1 + r_{42}Y_2}{Y_2} & 1 \\ r_{31}\frac{Z_2}{Z_1} & -r_{31} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În cazurile c) și d) avem câte un singur determinant Massau și ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu scările concurente.

În rezumat, funcția nomografică (III) se reprezintă de asemenea cu două nomograme cu puncte aliniate distincte proiectiv.

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu fiecare din variabilele x și y , dar de rangul trei în raport cu variabila z :

$$(IV) F = X_1 G_1 + X_2 G_2$$

funcția $G_1(y, z)$ este de rangul doi, iar $G_2(y, z)$ este de rangul unu:

$$G_1 = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2, \quad G_2 = Y_3 Z_3, \text{ unde } Y_3 = m_{31} Y_1 + m_{32} Y_2$$

Dacă $m_{32} \neq 0$ avem următorul determinant Massau:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & \frac{m_{31}}{m_{32}} Y_1 + Y_2 \\ m_{32} Z_3 - Z_2 & Z_1 - \frac{m_{31}}{m_{32}} Z_2 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1} & 0 & 1 \\ \frac{m_{31}}{m_{32}} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2} & -m_{32} \frac{Z_3}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În acest caz ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă de genul întâi cu două scări rectilinii situate pe axele de coordonate și a treia scară situată pe o curbă oarecare.

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu variabilele x și y , dar de rangul trei în raport cu variabila z

$$(V) F = X_1 G_1 + X_2 G_2$$

funcțiile $G_i(y, z)$, $i = 1, 2$, fiind de rangul doi:

$$G_1 = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2, \quad G_2 = Y_3 Z_3 + Y_4 Z_4,$$

unde:

$$Y_3 = m_{31} Y_1 + m_{32} Y_2, \quad Z_3 = n_{31} Z_1 + n_{32} Z_2 + n_{34} Z_4,$$

$$Y_4 = m_{41} Y_1 + m_{42} Y_2, \quad n_{31} = -\frac{m_{32} n_{34} + m_{42} n_{32}}{m_{31} n_{34} + m_{41}}$$

Dacă $m_{31} n_{34} + m_{41} \neq 0$ avem :

$$= \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ m_{31} n_{32} Y_1 + m_{32} n_{32} Y_2 & -Y_2 & Y_1 + \frac{m_{32} n_{34} + m_{42}}{m_{31} n_{34} + m_{41}} Y_2 \\ (m_{31} n_{34} + m_{41}) Z_4 & -Z_1 & \frac{m_{32} n_{34} + m_{42}}{m_{31} n_{34} + m_{41}} Z_1 - Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ Y_1 + \frac{m_{32} n_{34} + m_{42}}{m_{31} n_{34} + m_{41}} Y_2 & -\frac{m_{31} n_{32} Y_1 + m_{32} n_{32} Y_2}{Y_2} & 1 \\ -\frac{m_{32} n_{34} + m_{42}}{m_{31} n_{34} + m_{41}} Z_1 - Z_2 & -\frac{(m_{31} n_{34} + m_{41}) Z_4}{Z_1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuatia $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă de tipul celei menționate în cazul (IV), cu scările rectilinii formînd un unghi oarecare, sau paralele cu axele de coordonate (dacă $m_{31} = 0$ sau $n_{32} = 0$) sau scările rectilinii paralele ($m_{32} n_{34} + m_{42} = 0$).

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul doi în raport cu variabila x și de rangul trei în raport cu variabilele y și z

$$(VI) \quad F = X_1 G_1 + X_2 G_2$$

funcțiile $G_i(y, z)$, $i = 1, 2$, sînt de rangul doi

$$G_1 = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2, \quad G_2 = Y_3 Z_3 + Y_4 Z_4$$

unde $Y_4 = m_{41} Y_1 + m_{42} Y_2 + m_{43} Y_3$ $Z_3 = n_{31} Z_1 + n_{32} Z_2 + n_{34} Z_4$

$$n_{31} = -\frac{m_{42}}{m_{41}} n_{32} \quad (m_{41} \neq 0) \quad n_{34} = -m_{43}$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ n_{32} Y_3 & -Y_2 & Y_1 + \frac{m_{42}}{m_{41}} Y_2 \\ m_{41} Z_4 & -Z_1 & \frac{m_{42}}{m_{41}} Z_1 - Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{X_2} & 1 \\ Y_1 + \frac{m_{42}}{m_{41}} Y_2 & -\frac{Y_3}{Y_2} & 1 \\ -\frac{m_{42}}{m_{41}} Z_1 - Z_2 & -\frac{Z_4}{Z_1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuatia $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu o scară rectilinie și două scări situate pe două curbe oarecare. În anumite cazuri particulare cele două curbe pot să fie situate pe un cerc sau pe o conică.

Funcția $F(x, y, z)$ este de rangul trei în raport cu fiecare dintre variabile

$$(VII) \quad F = X_1 G_1 + X_2 G_2 + X_3 G_3,$$

unde funcțiile $G_i(y, z)$, ($i = 1, 2, 3$), sînt de rangul doi.

$$G_1 = Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2, \quad G_2 = Y_3 Z_3 + Y_4 Z_4, \quad G_3 = Y_5 Z_5 + Y_6 Z_6,$$

$$Y_i = m_{i1} Y_1 + m_{i2} Y_2 + m_{i3} Y_3, \quad i = 4, 5, 6,$$

$$Z_i = n_{i1} Z_1 + n_{i2} Z_2 + n_{i3} Z_3, \quad i = 3, 5, 6,$$

$$n_{31} = -\frac{m_{42}}{m_{41}} n_{32} \quad (m_{41} \neq 0); \quad n_{34} = -m_{43},$$

$$n_{51} = \frac{n_{32} n_{54}}{m_{41} m_{62}} m_{62} \quad (m_{62} \neq 0); \quad n_{52} = -\frac{n_{32} n_{54}}{m_{41} m_{63}} m_{61},$$

$$n_{61} = -\frac{n_{32} n_{54}}{m_{41} m_{63}} m_{52}; \quad n_{62} = \frac{n_{32} n_{54}}{m_{41} m_{63}} m_{51},$$

$$n_{64} = -\frac{m_{53}}{m_{63}} n_{54}.$$

Notăm

$$r = (m_{41} m_{52} - m_{42} m_{51}) m_{63} - (m_{41} m_{62} - m_{42} m_{61}) m_{53}.$$

Dacă $m_{41} m_{63} \neq 0$, avem următorul determinant Massau :

$$= \begin{vmatrix} X_1 + (m_{51} m_{62} - m_{52} m_{61}) \frac{n_{32} n_{54}}{m_{41} m_{63}} X_3 & X_2 + (m_{51} m_{63} - m_{53} m_{61}) \frac{n_{54}}{m_{41} m_{63}} X_3 & \frac{n_{54} r}{m_{41}^2 m_{63}} X_3 \\ n_{32} Y_3 & -Y_2 & Y_1 + \frac{m_{42}}{m_{41}} Y_2 \\ m_{41} Z_4 & -Z_1 & \frac{m_{42}}{m_{41}} Z_1 - Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{cc|c} \frac{m_{41} m_{63} X_1}{n_{54} r X_3} + \frac{(m_{51} m_{62} - m_{52} m_{61}) n_{32} n_{54} X_3}{n_{54} r X_3} & \frac{m_{41} m_{63} X_2}{n_{54} r X_3} + \frac{(m_{51} m_{63} - m_{53} m_{61}) n_{54} X_3}{n_{54} r X_3} & 1 \\ \frac{m_{41} n_{32} Y_3}{m_{41} Y_1 + m_{42} Y_2} & \frac{m_{41} Y_2}{m_{41} Y_1 + m_{42} Y_2} & 1 \\ \frac{m_{41}^2 Z_4}{m_{42} Z_1 - m_{41} Z_2} & \frac{m_{41} Z_1}{m_{42} Z_1 - m_{41} Z_2} & 1 \end{array} \right| = 0$$

Ecuația $F(x, y, z) = 0$ se reprezintă printr-o nomogramă cu scările situate pe trei curbe oarecare. În anumite cazuri particulare, cele trei curbe pot să coincidă cu o cubică.

Din cele prezentate în acest articol rezultă corespondența dintre cele șapte tipuri de funcții nomografice stabilite de M. Warmus pentru funcțiile de trei variabile și nomogramele cu puncte aliniat, analogă cu corespondența dintre cele șapte forme canonice ale ecuațiilor de ordinele 3—6 nomografice stabilite de Soreau pentru ecuațiile cu trei variabile și nomogramele cu puncte aliniat.

Primită la redacție la 9 decembrie 1969.

*Institutul de calcul
al Filialei din Cluj
a Academiei Republicii Socialiste România
Str. Republicii nr. 37, Cluj*

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS NOMOGRAPHIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on présente une étude de sept types de fonctions nomographiques établis par M. Warmus [2], pour les fonctions de trois variables en vue de leur représentation par des nomogrammes à points alignés.

On établit la correspondance entre les types (I)—(VII) de fonctions de trois variables et les nomogrammes à points alignés connues qui est analogue à la correspondance entre les sept formes canoniques des équations des ordres 3—6 nomographiques établies par R. Soreau pour les équations à trois variables et les nomogrammes à points alignés.

On constate que les équations obtenues des types de fonctions (I)—(III) sont représentées par des nomogrammes à points alignés du genre zéro et que celles obtenues des types (IV)—(V) sont représentées par des nomogrammes à points alignés du genre un; celles qui résultent des types (VI) et (VII) peuvent être représentées par des nomogrammes à points alignés du genre deux, respectivement trois.

BIBLIOGRAPHIE

1. BAL, L., RADO, F., *Lecții de nomografie*. Ed. tehnică, București, 1956.
2. WARMUS, M., *Nomographie functions*. Rozprawy Matematyczne, XVI (1959).