

# ASUPRA REPREZENTĂRII ECUAȚIILOR CU PATRU VARIABLE PRIN NOMOGRAMA COMPUSE CU PUNCTE ALINIAE (II)

DE  
MARIA MIHOC  
(Cluj)

În lucrare se studiază condițiile în care ecuația cu patru variabile (1) se poate reprezenta printr-o nomogramă compusă din două nomograme cu puncte aliniate cu o scară comună având trei scări regulate și una proiectivă rectilini.

Într-o lucrare anterioară [2] s-a studiat reprezentarea ecuațiilor cu patru variabile cu ajutorul nomogramelor compuse formate din două nomograme cu puncte aliniate cu scări rectilini regulate având o scară comună.

În această lucrare vom cerceta reprezentarea unor astfel de ecuații de formă completă cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu scări rectilini regulate și proiective, având o scară comună.

Fie ecuația cu patru variabile de forma :

$$(1) \quad \begin{aligned} &A_0 xyz u + A_1 xyz + A_2 xy u + A_3 xzu + A_4 yzu + \\ &+ B_0 xy + B_1 xz + B_2 xu + B_3 yz + B_4 yu + B_5 zu + \\ &+ C_0 x + C_1 y + C_2 z + C_3 u + D_0 = 0. \end{aligned}$$

Se caută condițiile în care ecuația (1) se poate reprezenta cu ajutorul unei nomograme cu puncte aliniate cu trei scări regulate și una proiectivă.

Dacă se aplică ecuațiilor Soreau corespunzătoare acestei nomograme o transformare afină, obținem :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & \mu x + a & 1 \\ cy + d & fy + g & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ hz + i & vz + k & 1 \\ \frac{lu + m}{nu + l} & \frac{pu + r}{nu + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde  $a, c, d, f, g, h, i, k, l, m, n, p, r, \mu, \nu$  sînt parametrii scărilor nomogramei.

Pentru simplificarea calculelor se poate considera  $\mu = \nu = 1$ .

Dacă se dezvoltă determinanții din membrul stîng al ecuațiilor (2) și se elimină necunoscuta  $w$ , se obține ecuația

$$(3) \quad \begin{aligned} & cnxyz + cxyz + c(kn - p)xyu + [dn - (l - hp)]xzu + \\ & + [acn + f(l - hp)]yzu + c(k - r)xy + [d - (m - hr)]xz + \\ & + [d(kn - p) - (kl - ip)]xu + [ac + f(m - hr)]yz + \\ & + [ac(kn - p) + f(kl - ip)]yu + [adn - (a - g)(l - hp)]zu + \\ & + [d(k - r) - (km - ir)]x + [ac(k - r) + f(km - ir)]y + \\ & + [ad - (a - g)(m - hr)]z + [ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip)]u + \\ & + [ad(k - r) - (a - g)(km - ir)] = 0. \end{aligned}$$

Pentru găsirea condițiilor în care o ecuație cu patru variabile se poate reprezenta prin nomograme de tipul menționat mai sus și a parametrilor nomogramei, se identifică coeficienții ecuațiilor (1) și (3), fapt care ne conduce la sistemul:

$$(4) \quad \begin{aligned} cn &= A_0; & ac + f(m - hr) &= B_3, \\ c &= A_1; & ac(kn - p) + (kl - ip) &= B_4, \\ c(kn - p) &= A_2; & adn - (a - g)(l - hp) &= B_5, \\ dn - (l - hp) &= A_3; & d(k - r) - (km - ir) &= C_0, \\ acn + f(l - hp) &= A_4; & ac(k - r) + f(km - ir) &= C_1, \\ c(k - r) &= B_0; & ad - (a - g)(m - hr) &= C_2, \\ d - (m - hr) &= B_1; & ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip) &= C_3, \\ d(kn - p) - (kl - ip) &= B_2; & ad(k - r) - (a - g)(km - ir) &= D_0. \end{aligned}$$

Rezolvarea sistemului de conduce la următoarele cazuri:

$$1. A_1 \neq 0, \quad A_0B_1 - A_1A_3 \neq 0.$$

Introducem notațiile

$$\Delta_1 = (A_0C_2 - A_1B_5 - A_3B_3 + A_4B_1)^2 - 4(A_0B_1 - A_1A_3)(A_4C_2 - B_3B_5)$$

$$\Delta_2 = [A_1(2A_0B_0B_3 - A_0A_1C_1 - A_1A_4B_0 - A_1A_2B_3 + A_1^2B_4)]^2 -$$

$$- 4A_1^2(A_0B_3 - A_1A_4)(A_1A_2 - A_0B_0)(A_1C_1 - B_0B_3).$$

1.1. Dacă  $A_0B_3 - A_1A_4 \neq 0$  și  $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0$ , sistemul (4) admite soluțiile

$$a = \frac{A_0C_2 - A_1B_5 - A_3B_3 + A_4B_1 \pm \sqrt{\Delta_1}}{2(A_0B_1 - A_1A_3)}; \quad e = A_1,$$

$$d = A_1 \cdot \frac{(A_4B_1 - A_3B_3) - (A_0B_1 - A_1A_3)a}{A_1A_4 - A_0B_3}; \quad f = \frac{A_1A_4 - A_0B_3}{A_0B_1 - A_1A_3},$$

$$g = a - \frac{A_0C_2 - A_1B_5}{A_0B_1 - A_1A_3},$$

$$i = hr + \frac{B_0}{A_1}h + \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3}(B_3 - A_1a) +$$

$$+ \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3} \cdot \frac{B_0B_3 - A_1C_1}{A_1r},$$

(5)

$$k = r + \frac{B_0}{A_1}; \quad l = \left( \frac{A_0}{A_1}r + \frac{A_0B_0}{A_1^2} - \frac{A_2}{A_1} \right)h +$$

$$+ \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3} \cdot (A_4 - A_0a),$$

$$m = \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3}(B_3 - A_1a) + hr; \quad n = \frac{A_0}{A_1},$$

$$p = \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2} + \frac{A_0}{A_1}r,$$

$$r_{1,2} = \frac{-A_1(2A_0B_0B_3 - A_0A_1C_1 - A_1A_4B_0 - A_1A_2B_3 + A_1^2B_4) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2A_1^2(A_0B_3 - A_1A_4)},$$

unde  $h$  este un parametru arbitrar.

Existența soluției (5) este asigurată de următoarele patru condiții:

$$A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,$$

$$A_0(B_1B_4 - B_2B_3) - A_1(A_3B_4 - A_4B_2) + A_2(A_3B_3 - A_4B_1) = 0,$$

$$(6) \quad A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,$$

$$A_0(B_1C_1 - B_3C_0) - A_1(A_3C_1 - A_4C_0) + B_0(A_3B_3 - A_4B_1) = 0.$$

Aceste condiții coincid cu condițiile de separare a variabilelor ecuației (1), date de Goursat.

1.2. Dacă  $A_0B_3 - A_1A_4 = 0$  și  $\Delta_3 \geq 0$ , unde

$$\Delta_3 = A_1^2[2B_0(A_0C_2 - A_4B_1) + A_1(B_1B_4 - A_2C_2 - B_0B_5 + A_3C_1 - A_0D_0 + A_4C_0 + A_1C_3 - B_2B_3)]^2 - 4A_1^2(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)[B_0^2(A_0C_2 - A_4B_1) - A_1(A_2B_0C_2 - B_0B_1B_4 - A_0B_0D_0 + A_4B_0C_0 - A_1A_2D_0 + A_2B_3C_0)],$$

sistemul (4) admite soluțiile următoare:

$$\begin{aligned} a &= \frac{B_3}{A_1}; \quad c = A_1; \quad d = A_1 \frac{B_1B_5 - A_3C_2}{A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5}, \\ f &= 0; \quad g = \frac{A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5}{A_0B_1 - A_1A_3}, \\ i &= \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1C_2 - B_1B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + \\ &+ \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(B_0C_2 - A_1D_0 - B_1C_1 + B_3C_0)}{(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)r} + \frac{B_0}{A_1}h + hr, \\ k &= r + \frac{B_0}{A_1}, \\ l &= \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1B_5 - A_3B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + \left( \frac{A_0}{A_1}r + \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2} \right)h, \\ (7) \quad m &= \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1C_2 - B_1B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + hr; \quad n = \frac{A_0}{A_1}, \\ p &= \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2} + \frac{A_0}{A_1}r, \\ r_{1,2} &= \frac{-2A_1B_0(A_0C_2 - A_4B_1)}{2A_1^2(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)} - \\ &- \frac{A_1^2(B_1B_4 - A_2C_2 - B_0B_5 + A_3C_1 - A_0D_0 + A_4C_0 + A_1C_3 - B_2B_3) \pm \sqrt{\Delta_3}}{2A_1^2(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)}, \end{aligned}$$

unde  $h$  rămâne parametru arbitrar.

Soluțiile (7) au loc dacă coeficienții ecuației (1) verifică condițiile

$$\begin{aligned} A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0, \\ A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) &= 0, \\ (8) \quad A_1B_4 - A_2B_3 &= 0, \\ A_1C_1 - B_0B_3 &= 0. \end{aligned}$$

2.  $A_1 \neq 0$ ,  $A_0B_1 - A_1A_3 = 0$ ,  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ .

2.1. Dacă  $A_2B_3 - A_1B_4 \neq 0$  și  $\Delta_4 \geq 0$ , unde

$$\Delta_4 = (A_1C_3 - A_2C_2 + B_2B_3 - B_1B_4)^2 - 4(A_1B_2 - A_2B_1)(B_3C_3 - B_4C_2),$$

soluțiile sistemului (4) sînt:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{A_1C_3 - A_2C_2 + B_2B_3 - B_1B_4 \pm \sqrt{\Delta_4}}{2(A_1B_2 - A_2B_1)}; \quad c = A_1, \\ d &= A_1 \frac{(B_2B_3 - A_1B_4) - (A_1B_2 - A_2B_1)a}{A_2B_3 - A_1B_4}; \quad f = \frac{A_2B_3 - A_1B_4}{A_1B_2 - A_2B_1}, \\ g &= a - \frac{A_1C_3 - A_2C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \\ i &= \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)[(A_0B_0 - A_1A_2)a + (A_1B_4 - A_0C_1)]}{B_0(A_0B_4 - A_2A_4) - A_2(A_1B_4 - A_2B_3)} + \\ &+ \frac{A_1(B_0B_4 - A_2C_1)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)}h, \\ (9) \quad k &= \frac{A_1(B_0B_4 - A_2C_1)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)}, \\ l &= \frac{A_0}{A_1} \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_2B_3 - A_1B_4} (B_3 - A_1a) + \\ &+ \frac{B_0(A_0B_4 - A_2A_4) - A_2(A_1B_4 - A_2B_3)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)}h, \end{aligned}$$

$$m = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_2 B_3 - A_1 B_4} (B_3 - A_1 a) +$$

$$+ \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 C_1 - B_0 B_3)}{A_1 [A_0 (B_0 B_3 - A_1 C_1) + A_1 (A_1 B_4 - A_2 B_3)]} h,$$

$$n = \frac{A_0}{A_1}; \quad p = \frac{B_0 (A_0 B_4 - A_2 A_4) - A_2 (A_1 B_4 - A_2 B_3)}{A_0 (B_0 B_3 - A_1 C_1) + A_1 (A_1 B_4 - A_2 B_3)},$$

$$r = \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 C_1 - B_0 B_3)}{A_1 [A_0 (B_0 B_3 - A_1 C_1) + A_1 (A_1 B_4 - A_2 B_3)]},$$

cu  $h$  parametru arbitrar.

Existența soluțiilor (9) este asigurată de condițiile

$$A_1 (B_2 D_0 - C_0 C_3) - A_2 (B_1 D_0 - C_0 C_2) + B_0 (B_1 C_3 - B_2 C_2) = 0,$$

$$A_1 (B_2 C_1 - B_4 C_0) - A_2 (B_1 C_1 - B_3 C_0) + B_0 (B_1 B_4 - B_2 B_3) = 0,$$

$$(10) \quad A_0 B_3 - A_1 A_4 = 0,$$

$$A_0 C_2 - A_1 B_5 = 0.$$

2.2. Dacă  $A_2 B_3 - A_1 B_4 = 0$ , soluțiile sistemului (4) sînt următoarele:

$$a = \frac{B_3}{A_1}; \quad c = A_1; \quad d = \frac{A_1 (B_2 C_2 - B_1 C_3)}{B_2 B_3 - B_1 B_4 - A_1 C_3 + A_2 C_2},$$

$$f = 0; \quad g = \frac{B_2 B_3 - B_1 B_4 - A_1 C_3 + A_2 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$i = \frac{A_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_1 C_3 - B_2 B_3)}{(A_0 B_0 - A_1 A_2)}.$$

$$(11) \quad \frac{(A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)}{(A_1 C_3 - A_2 C_2 + B_1 B_4 - B_2 B_3)^2} -$$

$$- \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_0 C_2 - A_4 B_1)}{(A_0 B_0 - A_1 A_2)}.$$

$$+ \frac{A_1 B_0 C_3 - A_1 A_2 D_0 - A_2 B_1 C_1 + A_2 B_3 C_0 + B_0 B_1 B_4 - B_0 B_2 B_3}{A_1 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)} h,$$

$$k = \frac{A_1 B_0 C_3 - A_1 A_2 D_0 - A_2 B_1 C_1 + A_2 B_3 C_0 + B_0 B_1 B_4 - B_0 B_2 B_3}{A_1 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)},$$

$$l = \frac{A_0 (A_1 C_2 - B_1 B_3)(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{A_1^2 (B_2 B_3 - B_1 B_4 - A_1 C_3 + A_2 C_2)} +$$

$$+ \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 C_3 - A_2 C_2 + B_1 B_4 - B_2 B_3)}{A_1^2 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)} h,$$

$$m = \frac{(A_1 C_2 - B_1 B_3)(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{A_1 (B_2 B_3 - B_1 B_4 - A_1 C_3 + A_2 C_2)} +$$

$$+ \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0)}{A_1^2 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)} h,$$

$$n = \frac{A_0}{A_1}; \quad p = \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 C_3 - A_2 C_2 - B_1 B_4 - B_2 B_3)}{A_1^2 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)},$$

$$r = \frac{(A_0 B_0 - A_1 A_2)(A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0)}{A_1^2 (A_1 C_3 - A_0 D_0 - A_2 C_2 - A_3 C_1 + A_4 C_0 + B_0 B_5 + B_1 B_4 - B_2 B_3)},$$

parametrul  $h$  rămînînd arbitrar.

Pentru existența soluțiilor (11) trebuie îndeplinite condițiile următoare:

$$A_1 (B_2 D_0 - C_0 C_3) - A_2 (B_1 D_0 - C_0 C_2) + B_0 (B_1 C_3 - B_2 C_2) = 0,$$

$$A_1 C_1 - B_0 B_3 = 0,$$

$$(12) \quad A_0 B_3 - A_1 A_4 = 0,$$

$$A_0 C_2 - A_1 B_5 = 0.$$

3.  $A_1 \neq 0$ ,  $A_0 B_1 - A_1 A_3 = 0$  și  $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ .

3.1. Dacă  $A_1 C_1 - B_0 B_3 \neq 0$ , avem soluțiile

$$\Delta_5 = (A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_3 C_0 - B_1 C_1)^2 - 4(A_1 C_0 - B_0 B_1)(B_3 D_0 - C_1 C_2),$$

Se notează cu :

$$a_{1,2} = \frac{A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_3 C_0 - B_1 C_1 \pm \sqrt{\Delta_5}}{2(A_1 C_0 - B_0 B_1)} ; c = A_1,$$

$$d = A_1 \frac{(B_3 C_0 - B_1 C_1) - (A_1 C_0 - B_0 B_1) a}{B_0 B_3 - A_1 C_1} ; f = \frac{B_0 B_3 - A_1 C_1}{A_1 C_0 - B_0 B_1},$$

$$g = a - \frac{A_1 D_0 - B_0 C_2}{A_1 C_0 - B_0 B_1},$$

$$(13) \quad i = \frac{A_1(A_1 C_0 - B_0 B_1) [A_1 B_4 - A_0 C_1 + (A_0 B_0 - A_1 A_2) a]}{(A_0 B_0 - A_1 A_2) (A_1 C_1 - B_0 B_3)} + \frac{A_2}{A_0} h ;$$

$$k = \frac{A_2}{A_0} ; l = \frac{B_3(A_0 C_0 - A_3 B_0) - A_0(A_1 C_0 - B_0 B_1) a}{B_0 B_3 - A_1 C_1},$$

$$m = \frac{A_1 C_0 - B_0 B_1}{B_0 B_3 - A_1 C_1} (B_3 - A_1 a) + \frac{A_1 A_2 - A_0 B_0}{A_0 A_1} h ; n = \frac{A_0}{A_1} ;$$

$$p = 0 ; r = \frac{A_1 A_2 - A_0 B_0}{A_0 A_1},$$

$h$  rămânind parametru arbitrar.

Soluțiile (13) au loc dacă sînt îndeplinite următoarele patru condiții :

$$(14) \quad \begin{aligned} A_1 C_3 - A_2 C_2 &= 0 ; & A_0 B_3 - A_1 A_4 &= 0, \\ A_1 B_4 - A_2 B_3 &= 0 ; & A_0 C_2 - A_1 B_5 &= 0. \end{aligned}$$

3.2. Dacă  $A_1 C_1 - B_0 B_3 = 0$ , sistemul (4) admite următoarele soluții :

$$a = \frac{B_3}{A_1} ; c = A_1 ; d = \frac{A_1(B_1 D_0 - C_0 C_2)}{A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0},$$

$$f = 0 ; g = \frac{A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0}{B_0 B_1 - A_1 C_0},$$

$$i = \frac{A_1(B_0 B_1 - A_1 C_0) [(A_0 C_0 - A_2 B_1) a - (A_0 D_0 - A_2 C_2)]}{(A_1 A_2 - A_0 B_0) (A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0)} + \frac{A_2}{A_0} h,$$

$$(15) \quad k = \frac{A_2}{A_0} ; l = \frac{A_0(B_0 B_1 C_2 - B_1^2 C_1 - A_1 C_0 C_2 + B_1 B_3 C_0)}{A_1(A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0)},$$

$$m = \frac{B_0 B_1 C_2 - B_1^2 C_1 - A_1 C_0 C_2 + B_1 B_3 C_0}{A_1 D_0 - B_0 C_2 + B_1 C_1 - B_3 C_0} + \frac{A_1 A_2 - A_0 B_0}{A_0 A_1} h,$$

$$n = \frac{A_0}{A_1} ; p = 0 ; r = \frac{A_1 A_2 - A_0 B_0}{A_0 A_1}.$$

Existența soluțiilor (15) este asigurată de condițiile (14).

4.  $A_1 = 0$ , rezultă  $A_0 = A_1 = A_2 = B_0 = 0$ .

4.1. Dacă  $A_3 B_3 - A_4 B_1 \neq 0$ , soluțiile sistemului (4) sînt :

$$a = \frac{B_3 B_5 - A_4 C_2}{A_3 B_3 - A_4 B_1} ; c = 0 ; d = \frac{B_1 f + B_3}{f},$$

$$g = \frac{A_3 C_2 - B_1 B_5 f}{A_3 B_3 - A_4 B_1} ; i = \frac{B_3}{f} + \frac{B_3 C_0 - B_1 C_1}{(B_1 f + B_3) r} + \left( r + \frac{C_0 f + C_1}{B_1 f + B_3} \right) h,$$

$$k = r + \frac{C_0 f + C_1}{B_1 f + B_3},$$

(16)

$$l = \frac{A_4}{f} + \left[ \frac{A_3 f + A_4}{B_1 f + B_3} \left( \frac{C_0 f + C_1}{B_1 f + B_3} + r \right) - \frac{B_2 f + B_4}{B_1 f + B_3} \right] h,$$

$$m = \frac{B_3}{f} + r h ; n = \frac{A_3 f + A_4}{B_1 f + B_3},$$

$$p = \frac{(A_3 f + A_4) (C_0 f + C_1)}{(B_1 f + B_3)^2} - \frac{B_2 f + B_4}{B_1 f + B_3} + \frac{A_3 f + A_4}{B_1 f + B_3} r,$$

$$r_{1,2} = \frac{-N \pm \sqrt{\Delta_6}}{2(A_3 B_3 - A_4 B_1) (B_1 f + B_3)},$$

unde

$$\begin{aligned} N &= (A_3 B_3 - A_4 B_1) (C_0 f + C_1) - (B_1 C_1 - B_3 C_0) (A_3 f + A_4) + \\ &\quad + (B_1 B_4 - B_2 B_3) (B_1 f + B_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= N^2 - 4(A_3 B_3 - A_4 B_1) (B_1 C_1 - B_3 C_0) [(C_0 f + C_1) (A_3 f + A_4) - \\ &\quad - (B_1 f + B_3) (B_2 f + B_4)], \end{aligned}$$

iar parametrii  $f$  și  $h$  rămîn arbitrari.

Condițiile care asigură compatibilitatea sistemului (4) sînt

$$(17) \quad \begin{aligned} A_2(B_3C_3 - B_4C_2) - A_4(B_1C_3 - B_2C_2) + B_5(B_1B_4 - B_2B_3) &= 0, \\ B_1(B_4D_0 - C_1C_3) - B_2(B_3D_0 - C_1C_2) + C_0(B_3C_3 - B_4C_2) &= 0. \end{aligned}$$

4.2. Dacă  $A_3B_3 - A_4B_1 = 0$ , avem următoarele subcazuri:

4.2.1.  $B_1B_4 - B_2B_3 \neq 0$ .

În acest caz avem soluțiile:

$$(18) \quad \begin{aligned} a &= \frac{B_3C_3 - B_4C_2}{B_2B_3 - B_1B_4}; \quad c = 0; \quad d = \frac{B_1f + B_3}{f}, \\ g &= \frac{B_2C_2 - B_1C_3}{B_2B_3 - B_1B_4} f, \\ i &= \frac{(A_4C_1 - B_3B_4)(B_1f + B_3)}{f[(A_4C_0 - B_2B_3)f + A_4C_1 - B_3B_4]} + \\ &\quad + \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} h, \\ k &= \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3}, \\ l &= \frac{A_4}{f} + \left( \frac{A_4}{B_3} \cdot \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} - \frac{B_2f + B_4}{B_1f + B_3} \right) h, \\ m &= \frac{B_3}{f} + \frac{(B_1C_1 - B_3C_0)[(A_4C_0 - B_2B_3)f + (A_4C_1 - B_3B_4)]}{B_3(A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3)(B_1f + B_3)} h, \\ n &= \frac{A_4}{B_3}; \quad p = \frac{A_4}{B_3} \cdot \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} - \frac{B_2f + B_4}{B_1f + B_3}, \\ r &= \frac{(B_1C_1 - B_3C_0)[(A_4C_0 - B_2B_3)f + (A_4C_1 - B_3B_4)]}{B_3(A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3)(B_1f + B_3)}, \end{aligned}$$

unde  $f$  și  $h$  sînt parametrii arbitrari.

Soluțiile (18) au loc dacă sînt îndeplinite condițiile următoare:

$$(19) \quad \begin{aligned} A_4C_2 - B_3B_5 &= 0, \\ B_1(B_4D_0 - C_1C_3) - B_2(B_3D_0 - C_1C_2) + C_0(B_3C_3 - B_4C_2) &= 0. \end{aligned}$$

4.2.2. Dacă  $B_1B_4 - B_2B_3 = 0$ , avem soluțiile

$$(20) \quad \begin{aligned} a &= \frac{B_3D_0 - C_1C_2}{B_3C_0 - B_1C_1}; \quad c = 0; \quad d = \frac{B_1f + B_3}{f}, \\ g &= \frac{B_1D_0 - C_0C_2}{B_1C_1 - B_3C_0} f, \\ i &= \frac{(B_3B_4 - A_4C_1)(B_1f + B_3)}{f[(B_1B_4 - A_4C_0)f + (B_3B_4 - A_4C_1)]} + \frac{B_4}{A_4} h, \\ k &= \frac{B_4}{A_4}; \quad l = \frac{A_4}{f}; \quad m = \frac{B_3}{f} + \frac{(B_1B_4 - A_4C_0)f + (B_3B_4 - A_4C_1)}{A_4(B_1f + B_3)} h, \\ n &= \frac{A_4}{B_3}; \quad p = 0; \quad r = \frac{(B_1B_4 - A_4C_0)f + B_3B_4 - A_4C_1}{A_4(B_1f + B_3)}, \end{aligned}$$

unde  $f$  și  $h$  rămîn parametri arbitrari.

Condițiile care asigură existența soluțiilor (20) sînt:

$$(21) \quad \begin{aligned} A_4C_2 - B_3B_5 &= 0, \\ B_1C_3 - B_2C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Cazurile în care avem două sau trei scări proiective se tratează în mod cu totul analog.

Primită la redacție la 20 octombrie 1969

Institutul de calcul al Filialei din Cluj  
a Academiei Republicii Socialiste România

## SUR LA REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES PAR DES NOMOGRAMMES COMPOSÉS À POINTS ALIGNÉS. II

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on recherche dans quelles conditions l'équation (1) peut être représentée à l'aide d'un nomogramme composé constitué par deux nomogrammes à points alignés à trois échelles rectilignes régulières et une échelle projective, qui possèdent une échelle commune.