

Finally if  $f(x) * g(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$  for any  $g(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$ , then if we suppose that  $f(x) \notin \mathcal{Q}'_c$ , it results that  $f(x)$  has a slowly decrease and then  $\frac{1}{f(x)}$  is a tempered distribution and it is easy to see that the product  $f(x) * \frac{1}{f(x)}$  can not be defined as a distribution of  $\mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$ .

Lastly we can prove the following:

**Theorem 6.** *The Fourier transform and its inverse change the multiplicative product in convolution and conversely, i.e. if*

1)  $f(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$  and  $\alpha(x) \in \mathcal{Q}'_M$  then  $\mathcal{F}f(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{F}\alpha(x) \in \mathcal{Q}'_c$  and  $\mathcal{F}(\alpha(x)f(x)) = \mathcal{F}\alpha(x) * \mathcal{F}f(x)$ ;

2)  $f(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$  and  $g(x) \in \mathcal{Q}'_c$  then  $\mathcal{F}f(x) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{F}g(x) \in \mathcal{Q}'_M$  and  $\mathcal{F}(g(x) * f(x)) = \mathcal{F}g(x) * \mathcal{F}f(x)$ .

**Proof.** Indeed for 1) we have  $\mathcal{F}(\alpha(x)f(x)) = [\mathcal{F}(\alpha(x)f_n(x))] = [\mathcal{F}\alpha(x) * \mathcal{F}f_n(x)]$  and  $\mathcal{F}\alpha(x) \in \mathcal{Q}'_c$  (see [2]).

To prove 2) we have  $\mathcal{F}(f(x) * g(x)) = [\mathcal{F}(f_n(x) * g_n(x))] = [\mathcal{F}f_n(x) * \mathcal{F}g_n(x)]$  and  $[\mathcal{F}g_n(x)] = \left[ \mathcal{F}\left(\sum_{k \leq n} G_{n,k}^{(n)}(x)\right) \right] = \sum_{k \leq n} [P_k(y) \mathcal{F}G_{n,k}(x)] = \sum_{k \leq n} P_k(y) \mathcal{F}G_n(x)$  i.e.  $[\mathcal{F}g_n(x)]$  is a slowly increasing function alike as all its derivatives.

Received April 11, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,  
Department of Mathematics II

#### REFERENCES

1. Mikusinski J., Sikorski R., *Théorie élémentaire des distributions*. Gauthier Villars, Paris, 1964.
2. Schwartz L., *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
3. Lighthill M. I., *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. Cambridge Univ. Press, 1958.
4. Temple, *Generalized Functions*. Proc. Roy. Soc., 228, 175 – 190 (1955).
5. Crăciunaș P., *Su alcuni risultati concernenti le definizioni attuali delle distribuzioni*. Rend. Acad. Naz. dei Lincei, XL, 2 (1966).
6. Crăciunaș P., *On the Fourier Transform of Distributions*. Bul. Inst. polit. Iași, XI(XX), 3–4, s I (1970).
7. Crăciunaș P., *On the Mikusinski's Definition of Distributions*. Dissertation, University „Al. I. Cuza” of Jassy (in preparation).

#### ASUPRA TRANSFORMATEI FOURIER A DISTRIBUȚIILOR (II)

(Rezumat)

În această continuare a lucrării [6], se studiază proprietățile distribuțiilor temperate și ale transformatei Fourier referitoare la produsul multiplicativ și produsul de convoluție. În acest scop se definesc, în sensul lui Mikusinski [1], distribuțiile rapid descrescătoare  $\mathcal{Q}'_c$  și spațiile  $\mathcal{M}'_{L^p}$  corespunzătoare spațiilor  $\mathcal{D}'_{L^p}$  din [2], dintre care  $\mathcal{M}'_{L^1}$  intervine în demonstrația teoremei 6 (vezi [2]).

#### REMARQUES SUR LA DISTANCE ENTRE LES ENSEMBLES <sup>1)</sup>

PAR

GH. TOADER

1. Considérons un espace métrique  $(X, d)$  muni d'une topologie compatible avec la métrique  $d$  et soient deux ensembles  $A, B \subset X$ . Définissons la distance entre les ensembles  $A$  et  $B$ , comme d'habitude, par le nombre:  $d(A, B) = \inf \{d(a, b); a \in A, b \in B\}$ .

**Remarque 1.** *La distance entre deux ensembles fermés, disjointes d'un espace métrique quelconque peut être zéro.*

En effet, considérons l'exemple suivant: soit l'espace métrique  $(X, d)$ , où  $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ , et  $d(a, b) = |a - b|$ . En considérant comme sous-espace de l'espace  $R$ , il en résulte que les ensembles  $A = [-1, 0)$  et  $B = (0, 1]$  sont fermés, disjointes et toutefois la distance  $d(A, B) = 0$ .

Des [1] on peut déduire que si l'un des deux ensembles  $A$  et  $B$  est compact, la distance  $d(A, B) > 0$ . Évidemment, cette condition est suffisante, mais, compte tenu de la remarque 1, on pose naturellement le problème de trouver des conditions nécessaires ainsi que la distance considérée ci dessus soit strictement positive.

2. Nous allons chercher à répondre à cette question, dont l'énoncé général est le suivant:

Quelles conditions doivent être imposées à l'espace métrique  $(X, d)$  pour qu'il ait la propriété:

(Z) *quels que soient les ensembles  $A, B \subset X$ , disjointes et fermés dans l'espace  $(X, d)$ , la distance  $d(A, B) > 0$ ?*

Considérons un espace métrique  $(X, d)$  qui n'est pas complet. Alors il a une suite fondamentale  $(x_n)$  qui ne converge pas. Alors l'ensemble  $\{x; n = 1, 2, \dots\}$  est infini et donc si nous éliminons de  $(x_n)$  les termes qui ont déjà parus nous obtenons encore une suite  $(y_n)$ . On voit que les en-

<sup>1)</sup> Présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 2–4 juillet 1970.

sembles  $A = \{y_{2n-1}; n = 1, 2, \dots\}$  et  $B = \{y_{2n}; n = 1, 2, \dots\}$  sont disjoints, fermés (ils n'ont pas des points d'accumulation dans l'espace  $(X, d)$ ) et toutefois  $d(A, B) = 0$ . Donc l'espace n'a pas la propriété (Z), ce qui démontre le

**Théorème 1.** Si l'espace métrique  $(X, d)$  a la propriété (Z) il est complet.

**Remarque 2.** La complétude de l'espace  $(X, d)$  n'est pas suffisante pour qu'il ait la propriété (Z), comme le démontre l'exemple suivant: dans l'espace  $R$  les ensembles  $A = \{n; n = 1, 2, \dots\}$  et  $B = \{n - 1/n; n = 1, 2, \dots\}$  sont fermés, disjoints, mais  $d(A, B) = 0$ .

Soit maintenant un espace  $(X, d)$  qui a la propriété:

(S) quel qu'il soit  $x_0 \in X$ ,  $M > 0$  et  $\delta > 0$ , ils existent  $x', x'' \in X$ ,  $x' \neq x''$ , ainsi que  $d(x_0, x') > M$  et  $d(x_0, x'') > M$ , mais  $d(x', x'') \leq \delta$ .

Notons avec  $\bar{S}(x_0, M, \delta, x', x'')$  la proposition „à  $x_0 \in X$ ,  $M > 0$  et  $\delta > 0$  ils correspondent par (S)  $x' x'' \in X$ ,  $x' \neq x''$  ainsi que  $d(x_0, x') > M$  et  $d(x_0, x'') > M$  mais  $d(x', x'') \leq \delta$ “.

Soit l'élément  $a \in X$ . Alors nous avons successivement  $\bar{S}(a, 1, 1/2, a_1, b_1)$ ,  $\bar{S}(a_1, 2, 1/3, a_2, b_2)$ ,  $\bar{S}(a_2, d(a_1, a_2) + 1, 1/4, a_3, b_3)$ . Supposons trouvés les éléments  $a_n, b_n$  et notons  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $d_n = d(A_n) = \sup \{d(a, b); a, b \in A_n\}$ ,  $M_{n+1} = d_n + 1$  et  $\delta_{n+1} = 1/n + 2$ . Nous avons alors  $\bar{S}(a_n, M_{n+1}, \delta_{n+1}, a_{n+1}, b_{n+1})$ .

Ont lieu les propriétés:

- (a)  $d(a_{n+1}, a_i) > 1$ ,
- (b)  $d(a_{n+1}, b_i) > \frac{1}{2}$ ,
- (c)  $d(b_{n+1}, b_i) > \frac{1}{2}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En effet, si nous supposons  $d(a_{n+1}, a_i) \leq 1$  il résulte  $d(a_{n+1}, a_n) \leq d(a_{n+1}, a_i) + d(a_i, a_n) \leq 1 + d_n = M_{n+1}$  qui contredit le mode de construction de  $a_{n+1}$ . Du même, si nous supposons qu'il n'a pas lieu (b), on déduit:  $d(a_{n+1}, a_i) \leq d(a_{n+1}, b_i) + d(b_i, a_i) \leq 1/2 + 1/2 = 1$  qui contredit (a). Et, enfin, si (c) est faux, il résulte que:  $d(b_{n+1}, a_n) \leq d(b_{n+1}, b_i) + d(b_i, a_i) + d(a_i, a_n) \leq 1/2 + 1/2 + d_n = M_{n+1}$  qui contredit la manière de construction de  $b_{n+1}$ .

Notons:  $A = \{a_i; i = 1, 2, \dots\}$  et  $B = \{b_i; i = 1, 2, \dots\}$ . De (a) et (c) nous déduisons que les ensembles  $A$  et  $B$  sont fermés, et de (b) il résulte qu'ils sont disjoints. D'autre part,  $d(A, B) = 0$ . Il en résulte que  $(X, d)$  n'a pas la propriété (Z), ce qui établit le

**Théorème 2.** Si l'espace métrique  $(X, d)$  a la propriété (Z), il satisfait la condition: (S) il existent  $x_0 \in X$ ,  $M > 0$  et  $\delta > 0$ , ainsi que pour tous  $x', x'' \in X$ ,  $x' \neq x''$  pour lesquels  $d(x_0, x') > M$  et  $d(x_0, x'') > M$ , en ait  $d(x', x'') > \delta$ “.

**Corollaire.** Pour que l'espace  $(X, d)$  ait la propriété (Z), il est nécessaire que l'ensemble de ses points d'accumulation ait diamètre fini.

**Remarque 3.** Pour que l'espace  $(X, d)$  ait la propriété (Z), il n'est pas nécessaire que la sphère fermée

$$S_M^{\leq}(x_0) = \{x; d(x, x_0) \leq M\}$$

(qui résulte du théorème 2) soit séparable.

En effet, soit l'espace  $(X, d)$  où  $X$  est un ensemble quelconque indénombrable et  $d(a, b) = 1$  pour  $a \neq b$  et  $d(a, b) = 0$  pour  $a = b$ . Cet espace a la propriété (Z) mais la sphère  $S_1^{\leq}(x_0) = X$  n'est pas séparable car le seul ensemble dense en lui est  $X$  et il n'est pas dénombrable.

Reçue le 16 septembre 1970

Institut Polytechnique, Jassy,  
Chaire de Mathématiques I

## BIBLIOGRAPHIE

1. Haimovici A., *Ecuatii diferențiale și ecuații integrale*. EDP, Buc., 1965, pp. 65–66.

## OBSERVAȚII CU PRIVIRE LA DISTANȚA DINTRE MULȚIMI

(Rezumat)

Se observă că distanța dintre două mulțimi închise și disjuncte ale unui spațiu metric oarecare poate să fie zero și se dau câteva condiții necesare pentru ca distanța dintre orice două mulțimi închise și disjuncte ale unui spațiu metric să fie strict pozitivă.