

DIFERENȚA DIVIZATĂ A UNEI FUNCȚII DE TREI VARIABILE PE O REȚEA DE NODURI $M_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$, $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ ȘI REPREZENTAREA EI PRINTR-O INTEGRALĂ TRIPLĂ

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Formula de integrare prin părți pentru o integrală dublă introdusă de acad. M. Nicolescu [1], în 1952, poate fi extinsă la integrale multiple. În prezenta lucrare, facem extensiunea la integrale triple și apoi printr-o problemă la limite, legată de formula de integrare prin părți generalizată, pentru integrale triple, vom defini diferența divizată a unei funcții de trei variabile pe o rețea de noduri $M_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$, $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ și vom face reprezentarea ei printr-o integrală triplă [2],

1. Dacă f și φ sînt funcții de trei variabile x, y, z , continue pe paralelipipedul Δ definit de inegalitățile

$$\Delta: \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

împreună cu derivatele parțiale

$$(1) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} \end{aligned}$$

atunci avem formula de integrare prin părți pentru integralele triple de forma

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \varphi \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz.$$

Dacă funcțiile f și φ de trei variabile x, y, z sînt continue pe paralelipipedul Δ , împreună cu derivatele parțiale (1), și cele în care f și φ se înlocuiesc cu

$$(3) \quad \frac{\partial^{3(p-1)} f}{\partial x^{p-1} \partial y^{p-1} \partial z^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{3(p-1)} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^{p-1} \partial z^{p-1}}$$

pentru $p = 2, 3, \dots, n$, atunci avem formula de integrare prin părți generalizată pentru integralele

$$(4) \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \varphi \frac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz.$$

pe care o scriem sub forma

$$(5) \quad \begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \varphi \frac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \frac{\partial^{3(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}}(x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r}(x, y, z) \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} - \\ &- \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \sum \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{3(n-r)-2} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}}(x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r}(x, y, z) \Big|_{y_1, z_1}^{y_2, z_2} dx + \\ &+ \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \sum \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{3(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}}(x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r}(x, y, z) \Big|_{z_1}^{z_2} dx dy + \\ &+ (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^{3n} \varphi}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} f dx dy dz. \end{aligned}$$

Această formulă este fundamentală pentru lucrarea noastră.

2. Să considerăm paralelipipedul D , definit de inegalitățile.

$$D: \quad x_0 \leq x \leq x_n, \quad y_0 \leq y \leq y_n, \quad z_0 \leq z \leq z_n.$$

și rețeaua de noduri $M_{i,j,k}$, $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ de coordonate x_i, y_j, z_k , unde

$$(6) \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad y_0 < y_1 < \dots < y_n, \quad z_0 < z_1 < \dots < z_n.$$

Să considerăm paralelipipedul $D_{i,j,k}$, definit de inegalitățile.

$$D_{i,j,k}: \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1}.$$

unde

$$i, j, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

La paralelipipedul D , să asociem o funcție f continuă pe D , împreună cu derivatele ei parțiale (1) și cele care se obțin din (1), când funcția f este înlocuită cu derivatele parțiale (3) pentru $p = 2, 3, \dots, n$. De asemenea la fiecare paralelipiped $D_{i,j,k}$ să asociem o funcție $\varphi_{i,j,k}$ continuă pe $D_{i,j,k}$ împreună cu derivatele parțiale (1) și cele care se obțin din (1), când funcția $\varphi_{i,j,k}$ este înlocuită cu derivatele parțiale (3) pentru $p =$

$= 2, 3, \dots, n$. Atunci se poate aplica la fiecare paralelipiped $D_{i,j,k}$ și la funcțiile $f, \varphi_{i,j,k}$ formula generalizată de integrare prin părți pentru integralele triple (5). Adunând toate aceste formule membru cu membru vom avea formula.

$$(7) \quad \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \iiint_{D_{i,j,k}} \varphi_{i,j,k} \frac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz =$$

$$= \mathcal{Q}(f) + (-1)^n \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \iiint_{D_{i,j,k}} \frac{\partial^{3n} \psi_{i,j,k}}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} f dx dy dz$$

unde $\mathcal{Q}[f]$ este o funcțională de f , care rezultă din calcul și pe care o scriem sub forma.

$$(8) \quad \mathcal{Q}[f] = \sum_{i,j,k=0}^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \frac{\partial^{3(n-r-1)}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [(\varphi_{j,i,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} -$$

$$- \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}) - (\varphi_{i,j,k-1} + \varphi_{i-1,j-1,k-1} - \varphi_{i,j-1,k-1} -$$

$$- \varphi_{i-1,j,k-1})]_{x_i, y_j, z_k} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y_j, z_k) +$$

$$+ \sum_{i,j,k=0}^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} +$$

$$+ \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i,j,k-1} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x_i, y_j, z_k} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y_j, z_k) dx +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \sum_{i,j,k=0}^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} [\varphi_{i,j,k} -$$

$$- \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i, y, z} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x, \partial y, \partial z^r} (x_i, y, z) dy dz$$

$$+ \dots +$$

$$+ \dots +$$

Se demonstrează că în membrul al doilea al formulei (8) se iau în considerare toate nodurile $M_{i,j,k}$, $i, j, k, = 0, 1, \dots, n$ fie că sînt interioare paralelipipedului D , fie că sînt situate pe fețele lui, sau pe muchiile lui, sau în vîrfurile lui, ținînd seama de următoarea

Convenție (A) Funcția $\varphi_{j,i,k}$ va fi considerată nulă, cînd cel puțin unul din indicii i, j, k este egal cu -1 sau cu n .

3. Relativ la formula (7) vom trata următoarea
Problemă la limite. Să se determine funcțiile $\varphi_{i,j,k}$, soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale

$$(9) \quad \frac{\partial^{3n} \varphi_{i,j,k}}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} = 0$$

în paralelipipedul $D_{i,j,k}$ pentru $i, j, k = 0, 1, \dots, n-1$, astfel ca $\mathfrak{L}[f]$ să nu depindă decât de valorile lui f pe nodurile $M_{i,j,k}$ pentru $i, j, k = 0, 1, \dots, n$.

Pentru aceasta trebuie introduse următoarele
Condiții la limite:

$$(10) \quad \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x,y,z} = 0$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

pentru $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ și $r = 0, 1, \dots, n-1$.

$$(11) \quad \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i,j,k-1} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x,y,z} = 0$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

pentru

$$i, j, k = 0, 1, \dots, n \text{ și } r = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$(12) \quad \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [(\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} - \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}) -$$

$$- (\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i-1,j-1,k-1} - \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i-1,j,k-1})]_{x,y,z} = \begin{cases} C_{i,j,k} & \text{dacă } r=0 \\ 0 & \text{dacă } r \neq 0 \end{cases}$$

pentru $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ și $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Când se scriu condițiile (10), (11), (12) pentru nodurile de pe frontiera lui D se ține seama de *convenția* (A).

Problema la limite pentru determinarea funcției $\varphi_{i,j,k}$ va fi desemnată cu $(P_{i,j,k})$.

În general soluția problemei $(P_{i,j,k})$ depinde de soluțiile problemelor $(P_{i-1,j-1,k}), (P_{i,j-1,k}), (P_{i-1,j,k}), (P_{i,j,k-1}), (P_{i-1,j-1,k-1}), (P_{i,j-1,k-1}), (P_{i-1,j,k-1})$.

Scriind că condiția (13) este satisfăcută, constanta H este determinată și notînd

$$(20) \quad \begin{aligned} \lambda_i &= (-1)^{n+i} \frac{V(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, \dots, x_n)} \\ \mu_j &= (-1)^{n+j} \frac{V(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)}{V(y_0, y_1, \dots, y_n)} \\ \nu_k &= (-1)^{n+k} \frac{V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)}{V(z_0, z_1, \dots, z_n)} \end{aligned}$$

pentru $i, j, k = 0, 1, \dots, n$, avem

$$(21) \quad \mathfrak{D}[f] = \sum_{i,j,k=0}^n \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k).$$

Astfel problema la limite este complet rezolvată.

5. DEFINIȚIE. *Expresia lui $\mathfrak{D}[f]$, dată de problema la limite, prin formula (21) se numește diferența divizată de ordinul n a funcției f pe rețeaua de noduri $M_{i,j,k}$ ($i, j, k = 0, 1, \dots, n$), și se notează.*

$$(22) \quad \left[\begin{array}{c} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n ; f \\ z_0, z_1, \dots, z_n \end{array} \right],$$

Avem deci

$$(23) \quad \left[\begin{array}{c} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n ; f \\ z_0, z_1, \dots, z_n \end{array} \right] = \sum_{i,j,k=0}^n \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k).$$

TEOREMA 1. *În condițiile precizate în aliniatul 2, avem reprezentarea integrală a diferenței divizate (22)*

$$(24) \quad \left[\begin{array}{c} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n ; f \\ z_0, z_1, \dots, z_n \end{array} \right] = \iiint_D \varphi \frac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz.$$

unde funcția φ este soluția problemei la limite tratată în aliniatele 3, 4.

6. Funcția $\varphi_{i,j,k}$ este dată de teorema următoare

TEOREMA 2. *Avem*

$$(25) \quad \begin{aligned} \varphi_{i,j,k}(x, y, z) = & \\ = & (-1)^n \left[\lambda_0 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_i \frac{(x - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \left[\mu_0 \frac{(y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ & \left. + \dots + \mu_j \frac{(y - y_j)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \left[\nu_0 \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \nu_k \frac{(z - z_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \end{aligned}$$

7. Dacă se consideră funcțiile $u \in C^n [x_0, x_n]$, $v \in C^n [y_0, y_n]$, $w \in C^n [z_0, z_n]$ și diferențele divizate cu reprezentările lor integrale

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_n; u] &= \int_{x_0}^{x_n} \psi(x) u^{(n)}(x) dx \\ [y_0, y_1, \dots, y_n; v] &= \int_{y_0}^{y_n} \theta(y) v^{(n)}(y) dy. \\ [z_0, z_1, \dots, z_n; w] &= \int_{z_0}^{z_n} \chi(z) w^{(n)}(z) dz. \end{aligned} \quad (26)$$

unde ψ, θ, χ sînt „funcțiile spline”

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (-1)^n \left[\lambda_0 \frac{(x - x_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_n \frac{(x - x_n)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\ \theta(y) &= (-1)^n \left[\mu_0 \frac{(y - y_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \mu_n \frac{(y - y_n)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\ \chi(z) &= (-1)^n \left[\nu_0 \frac{(z - z_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \nu_n \frac{(z - z_n)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

formula (25) se scrie

$$\varphi_{i,j,k}(x, y, z) = \psi_i(x) \theta_j(y) \chi_k(z). \quad (28)$$

Rezultă

TEOREMA 3. În formula (24) avem

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x) \theta(y) \chi(z). \quad (29)$$

În sfîrșit avem

TEOREMA 4. Funcția φ din reprezentarea integrală (24) a diferenței divizate (22) este pozitivă pe paralelipipedul D și este nulă pe frontiera lui.

BIBLIOGRAFIE

1. NICOLESCU M., Contribuțiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului. St. și cerc. mat. (1952) pg. 7—51.
2. IONESCU D. V., La différence divisée d'une fonction de trois variables et sa représentation par une intégrale triple. Rev. roum. de mathématiques pures et appliquées (1970), pg. 1425 — 1436.