Gazeta Matematică şi Fizică seria A, Nr. 7—1955
Lucrare prezentată la Prima Sesiune Ştiinţifică a S.S.F.M

O IDENTITATE IMPORTANTĂ ŞI DESCOMPUNERE A UNEI FORME BILINEARE ÎNTR-O SUMĂ DE PRODUSE

D. V. IONESCU prof. univ. Cluj

1. Definim în această lucrare funcţia $\Phi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_n)$ *omogenă de gradul* p *în* $x_1, \ldots x_n$ şi de gradul q în $y_1, \ldots, y_n$ dacă ea verifică ecuaţia

$$\Phi(tx_1, \ldots, tx_n; t'y_1, \ldots, t'y_n) = t^p t'^q \Phi(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) \tag{1}$$

oricare ar fi t şi t' $(pq \neq 0)$.

De exemplu, funcţia

$$\Phi = x_1^p y_1^q \, 2\!\!\!/ \left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}; \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right), \tag{2}$$

unde $2\!\!\!/ (\xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \ldots \eta_n)$ este o funcţie arbitrară, este o funcţie omogenă de gradul p în $x_1, \ldots, x_n$ şi de gradul q în $y_1, \ldots y_n$.

În particular forma bilineară

$$\Phi = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \tag{3}$$

este omogenă de gradul 1 în $x_1, \ldots x_n$ şi de gradul 1 în $y_1, \ldots, y_n$.

Să presupunem că funcţia Φ are derivate parţiale de ordinul întîi $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ şi $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$ precum şi derivate parţiale de ordinul al doilea, de forma $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_k}$.

O astfel de funcţie se obţine din formula (2) alegînd funcţia $2\!\!\!/$ astfel ca ea să aibă derivatele parţiale $\frac{\partial 2\!\!\!/}{\partial \xi_i}, \frac{\partial 2\!\!\!/}{\partial \eta_k}, \frac{\partial^2 2\!\!\!/}{\partial \xi_i \, \partial \eta_k}$.

Derivînd ambii membri ai ecuaţiei (1) în raport cu t şi apoi în raport cu t', şi făcînd apoi $t = 1$, $t' = 1$ obţinem identităţile

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = p\Phi, \tag{4}$$

$$y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \ldots + y_n \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = q\Phi, \tag{5}$$

analoage cu formulele bine cunoscute ale lui Euler.

Derivînd ambii membri ai formulei (4) în raport cu y_k şi ai formulei (5) în raport cu x_i, obţinem identităţile

$$x_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_k} + x_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial y_k} + \ldots + x_n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial y_k} = p \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \tag{6}$$

$$y_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_1} + y_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_2} + \ldots + y_n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_n} = q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Din formulele (4) şi (7) sau (5) şi (6) se deduce că

$$pq\Phi = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_k} x_i y_k. \tag{8}$$

Sprijinindu-ne pe identităţile (4), (5), (6), (7), vom demonstra identitatea J, care face obiectul acestei lucrări şi care este verificată de orice funcţie Φ definită mai sus. În cazul particular cînd funcţia Φ este forma bilineară (3), identitatea J se reduce la descompunerea unei forme bilineare într-o sumă de produse, care, atunci cînd $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$, dă descompunerea lui Jacobi a unei forme patratice într-o sumă de patrate (1).

2. Să presupunem că în domeniul D definit de inegalităţile

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad , \quad a_k' \leqslant y_k \leqslant b_k' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

derivatele parţiale

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \, \partial y_k} \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

sînt continue, iar determinantul

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_n} \end{vmatrix}$$

nu este identic nul.

În acest caz, într-un anumit punct M al domeniului D, de coordonate $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, avem $\Delta \neq 0$ şi deoarece $\Delta(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_n)$ este o funcţie continuă de $x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots y_n$ în domeniul D, se poate delimita în jurul punctului M un domeniu $D'CD$ în care să avem

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n) \neq 0, \qquad (9)$$

Putem presupune atunci că notaţia a fost astfel aleasă ca toţi determinanţii

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial y_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial y_i} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

să fie diferiţi de zero.

Să demonstrăm că avem identitatea

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial y_n} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_n} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Pentru aceasta să utilizăm formulele (5) şi (7) şi să scriem următorul sistem de ecuaţii lineare în $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial y_n} y_n &= q \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n \partial y_n} y_n &= q \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y_n} y_n &= q\Phi \end{aligned}$$

Eliminînd între aceste ecuaţii pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi ţinînd seamă că în domeniul D', avem $\Delta_n \neq 0$, rezultă imediat formula (11).

Să notăm

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial y_k} \qquad (i, \; k = 1, 2, \ldots n)$$

şi

$$\varphi_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \quad , \quad \psi_k = \frac{\partial\Phi}{\partial y_k} \qquad (i, \; k = 1, \; 2, \ldots n)$$

Formula (11) se va scrie

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \ldots \lambda_{1n} & \varphi_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \ldots \lambda_{2n} & \varphi_2 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \ldots \lambda_{3n} & \varphi_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} \ldots \lambda_{nn} & \varphi_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \ldots \psi_n & 0 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Deoarece

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n \neq 0$$

putem transforma determinantul din membrul al doilea astfel ca să obţinem formula de forma

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_1 \\ 0 & \lambda_{22}^{(1)} & 0 \ldots 0 & \varphi_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \lambda_{33}^{(2)} \ldots 0 & \varphi_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_{nn}^{(n-1)} & \varphi_n^{(n-1)} \\ \psi_1 & \psi_2^{(1)} & \psi_3^{(2)} \ldots \psi_n^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

aplicînd o metodă analoagă algoritmului lui Gauss [2] pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii lineare.

Într-adevăr, să ne purtăm atenţia asupra liniei a i^{-a} din determinantul din formula (11), să înmulţim elementele liniilor a 1^{a}, a $2^{-a}, \ldots$, a $(i-1)^{a}$ cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$.

Să adunăm la elementele liniei i^{-a} și să alegem pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ astfel ca primii $i-1$ termeni ai liniei $a\,i^{-a}$ să fie nuli. Termenul al j-lea al liniei $a\,i^{-a}$ devine $\lambda_i^{(i-1)}$, iar termenul ultim al liniei $a\,i^{-a}$ devine $\varphi_i^{(i-1)}$. Vom avea ecuațiile

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{21}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{i-1,1}\alpha_{i-1} + \lambda_{i1} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{1,i-1}\alpha_1 + \lambda_{2,i-1}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{i-1,i-1}\alpha_{i-1} + \lambda_{i,i-1} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

care determină pe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ precum și ecuațiile:

$$\lambda_{ij}\alpha_1 + \lambda_{2j}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{i-1,j} + \lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(i-1)} \tag{14}$$

$$\varphi_1\alpha_1 + \varphi_2\alpha_2 + \ldots + \varphi_{i-1}\alpha_{i-1} + \varphi_i = \varphi_i^{(i-1)} \tag{15}$$

Eliminînd pe $\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$ între ecuațiile (13) și (14) avem:

$$\lambda_{ij}^{(i-1)} = \frac{1}{\Delta_{i-1}}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1,i-1} & \lambda_{1j}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2,i-1} & \lambda_{2j}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \lambda_{i-1,1} & \lambda_{i-1,2} & \ldots & \lambda_{i-1,i-1} & \lambda_{i-1,j}\\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i2} & \ldots & \lambda_{i,i-1} & \lambda_{ij} \end{vmatrix} \tag{16}$$

și

$$\varphi_i^{(i-1)} = \frac{p}{\Delta_{i-1}}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1,i-1} & \varphi_1\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \lambda_{i-1,1} & \ldots & \lambda_{i-1,i-1} & \varphi_{i-1}\\ \lambda_{i,1} & \ldots & \lambda_{i,i-1} & \varphi_i \end{vmatrix} \tag{17}$$

Formula (11) devine astfel

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1n} & \varphi_1\\ 0 & \lambda_{22}^{(1)} & \lambda_{23}^{(1)} & \ldots & \lambda_{2n}^{(1)} & \varphi_2^{(1)}\\ 0 & 0 & \lambda_{33}^{(2)} & \ldots & \lambda_{3n}^{(2)} & \varphi_3^{(2)}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{nn}^{(n-1)} & \varphi_n^{(n-1)}\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \ldots & \psi_n & 0 \end{vmatrix} \tag{18}$$

Să ne purtăm acum, atenția asupra coloanei k^{-a} a determinantului din formula (18); să înmulțim elementele coloanei $a\,1^{-a}$, $2^{-a}\ldots a\,(k-1)^a$ cu $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ și să adunăm la elementele coloanei $a\,k^{-a}$. Vom determina $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ astfel ca primele $k-1$ elemente ale coloanei $a\,k^{-a}$ să fie nule și vom nota cu $\psi_k^{(k-1)}$ ceea ce devine ultimul element al coloanei $a\,k^{-a}$. Vom avea ecuațiile

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2 + \ldots + \lambda_{1,k-1}\ \beta_{k-1} + \lambda_{1,k} &= 0\\
\lambda_{22}^{(1)}\beta_2 + \ldots + \lambda_{2,k-1}^{(1)}\ \beta_{k-1} + \lambda_{2,k}^{(1)} &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_{k-1,k-1}^{(k-r)}\beta_{k-1} + \lambda_{k-1,k}^{(k-2)} &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

care determină pe $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ precum și ecuația

$$\psi_1\beta_1 + \varphi_2\beta_2 + \ldots + \psi_{k-1}\beta_{k-1} + \psi_k = \psi_k^{(k-1)} \tag{20}$$

Eliminînd pe $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_{k-1}$ între ecuațiile (19) și (20) vom obține

$$\psi_k^{(k-1)} = \frac{1}{\lambda_{11}\lambda_{22}^{(1)}\ldots\lambda_{k-1,k-1}^{(k-2)}}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1,k-1} & \lambda_{1,k}\\ 0 & \lambda_{22}^{(1)} & \lambda_{22}^{(1)} & \ldots & \lambda_{2,k-1}^{)1)} & \lambda_{2k}^{(1)}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{k-1,k-1}^{(k-2)} & \lambda_{k-1,k}^{(k-2)}\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \ldots & \psi_{k-1} & \psi_k \end{vmatrix}$$

Din formulele (16) avem

$$\lambda_{11} = \Delta_1,\ \lambda_{22}^{(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \lambda_{33}^{(2)} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots, \lambda_{k-1,k-1}^{(k-2)} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}}.$$

Astfel că formula precedentă se mai scrie

$$\psi_k^{(k-1)} = \frac{1}{\Delta_{k-1}}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1,k-1} & \lambda_{1k}\\ 0 & \lambda_{22}^{(1)} & \lambda_{23}^{(1)} & \ldots & \lambda_{2,k-1}^{(1)} & \lambda_{2k}\\ 0 & 0 & \lambda_{22}^{(2)} & \ldots & \lambda_{3,k-1}^{(2)} & \lambda_{3,k}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{k-1,k-1}^{(k-2)} & \lambda_{k-1,k}^{(k-2)}\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \ldots & \psi_{k-1} & \psi_k \end{vmatrix} \tag{21}$$

Ținînd seamă de modul cum s-a ajuns de la primele $k-1$ linii ale determinantului din formula (11) la primele $k-1$ linii ale determinantului din formulele (18) se deduce că formula (21) se mai scrie sub forma:

$$\psi_k^{(k-1)} = \frac{1}{\Delta_{k-1}}\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1k}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2k}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \lambda_{k-1,1} & \lambda_{k-1,2} & \ldots & \lambda_{k-1,k}\\ \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_k \end{vmatrix} \tag{22}$$

Formula (12) este astfel demonstrată, unde $\varphi_i^{(i-1)}$ este dat de formula (17), $\psi_k^{(k-1)}$ de formula (22) și avem

$$\lambda_{ii}^{(i-1)} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}. \tag{23}$$

3. Dezvoltînd determinantul din formula (22) după elementele ultimei coloane avem:

$$\Phi = \frac{\lambda_{22}^{(1)}\lambda_{33}^{(2)}\ldots\lambda_{nn}^{(n-1)}}{\Delta_n}\varphi_1\psi_1 + \frac{\lambda_{11}\lambda_{33}^{(2)}\ldots\lambda_{nn}^{(n-1)}}{\Delta_n}\varphi_2^{(1)}\psi_2^{(1)} + \ldots$$

$$+ \frac{\lambda_{11}\lambda_{22}^{(1)}\ldots\lambda_{n-1,n-1}^{(n-2)}}{\Delta_n}\varphi_n^{(n-1)}\psi_n^{(n-1)}$$

sau ținînd seamă de formulele (23), aceasta se mai scrie

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_1}\varphi_1\psi_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\varphi_2^{(1)}\psi_2^{(1)} + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\varphi_n^{(n-1)}\psi_n^{(n-1)}$$

Înlocuind în fine, pe $\varphi_i^{(i-1)}$ și $\psi_k^{(k-1)}$ din formulele (17) și 22), vom avea:

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_0\Delta_1}\varphi_1\varphi_1 + \frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\begin{vmatrix}\lambda_{11}\varphi_1\\ \lambda_{21}\varphi_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_{11}\lambda_{12}\\ \psi_1\psi_2\end{vmatrix} + \ldots$$

$$+\frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1,n-1} & \varphi_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{n-1,1} & \ldots & \lambda_{n-1,n-1} & \varphi_{n-1}\\ \lambda_{n-1} & \ldots & \lambda_{n,n-1} & \varphi_n\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{n-1,1} & \ldots & \lambda_{n-1,n}\\ \psi_1 & \ldots & \psi_n\end{vmatrix}$$

sau revenind la vechile notații, vom avea identitatea (J) care face obiectul acestei lucrări.

$$(J)\qquad \Phi = \frac{1}{\Delta_0\Delta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_2}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\end{vmatrix} + \ldots$$

$$+\frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{n-1}\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{n-1}\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_{n-1}}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{n-1}\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{n-1}\partial y_n}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

în care Δ_i sînt determinanții dați de formulele (10). Identitatea (J) este valabilă în domeniul D.

4. Dacă în domeniul D se poate delimita un domeniu D'' astfel ca rangul matricei

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_n}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial y_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial y_n}\end{matrix}\right\| \qquad (24)$$

să fie r, pentru orice punct din domeniul D'', atunci membrul al doilea al formulei (J) se reduce numai la primii r termeni.

Într-adevăr, vom arăta că în acest caz avem identitatea:

$$\Phi = -\frac{1}{\Delta_r}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_r}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_r} & 0\end{vmatrix} \qquad (25)$$

Pentru aceasta să utilizăm formulele (5) și (7) și să scriem sistemul de ecuații lineare în $y_1, y_2, \ldots, y_r$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1}y_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r}y_r = q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \sum_{j=r+1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_j}y_j\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1}y_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r}y_r = q\frac{\partial\Phi}{\partial x_r} - \sum_{j=r+1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_j}y_j\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}y_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y_r}y_r = q\Phi - \sum_{j=r+1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}y_j.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Eliminînd între aceste ecuații pe $y_1, y_2, \ldots, y_r$ deoarece $\Delta_r \neq 0$, obținem ecuația

$$q\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_r}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_r} & \Phi\end{vmatrix} = \sum_{j=r+1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_j}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial y_j}\end{vmatrix}y_j \qquad (27)$$

Ținînd seama de identitatea (6), putem scrie

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_j}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_r} & \frac{\partial\Phi}{\partial y_j}\end{vmatrix} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j}\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_l\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_l\partial y_r} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_l\partial y_j}\end{vmatrix}x_l.$$

Determinanții din membrul al doilea sînt nuli, fie că au două linii identice ($l \leqslant r$), fie că rangul matricei este r. Revenind la formula (27) se deduce că membrul întîi este nul, de unde rezultă identitatea (25).

Aplicînd identității (25) aceleași transformări ca la numerele 3 și 4, ajungem la identitatea (J_1)

$$(J_1)\quad \Phi = \frac{1}{\Delta_0\Delta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\end{vmatrix} +$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_{r-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{r-1}\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{r-1}\partial y_{r-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_{r-1}} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_r\partial y_{r-1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_r}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{r-1}\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{r-1}\partial y_r} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_r}\end{vmatrix}$$

care este valabilă în tot domeniul D''.

5. Să facem o aplicație a identității (J_1). Să considerăm pentru această formă bilineară (3)

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k . \tag{3}$$

Matricea (24) este în acest caz:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{Vmatrix} \tag{28}$$

Fie r rangul ei, și notăm ca mai sus:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii}\end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{29}$$

Avem:

Deasemenea notăm: $\Delta_1\,\Delta_2\,\ldots\,\Delta_r \neq 0.$

$$P_i(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,i} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\end{vmatrix}, \quad Q_i(y) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1} & \ldots & a_{i,i-1} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\end{vmatrix} \tag{30}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, r$.

$P_i(x)$ și $Q_i(y)$ sînt forme lineare. Observăm că $P_i(x)$ nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, iar $Q_i(y)$ nu depinde de $y_1, y_2, \ldots y_{i-1}$. Avem

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} = \Delta_i$$

astfel că

$$\frac{D(P_1, \ldots, P_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{D(Q_1, \ldots, Q_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)} = \Delta_1\,\Delta_2, \ldots \Delta_r \neq 0$$

ceea ce dovedește că formele lineare $P_1, P_2, \ldots, P_r; Q_1, \ldots Q_r$ sînt linear independente.

Aplicînd formula (J_1) obținem formula de descompunere a formei bilineare (3) într-o sumă de r produse de forma

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k = \frac{P_1(x)\,Q_1(y)}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{P_2(x)\,Q_2(y)}{\Delta_1\,\Delta_2} + \ldots + \frac{P_r(x)\,Q_r(y)}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \tag{J_2}$$

unde $P_i(x)$ și $Q_i(y)$ sînt date de formulele (30), iar coeficienții de formulele (29).

Dacă forma bilineară (3) este simetrică, adică $a_{ik} = a_{ki}$ este ușor de văzut din formulele (30) că avem

$$P_i(x) = Q_i(x)$$

astfel că formula (J_2) se reduce în acest caz la

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k = \frac{Q_1(x)\,Q_1(y)}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{Q_2(x)\,Q_2(y)}{\Delta_1\,\Delta_2} + \ldots + \frac{Q_r(x)\,Q_r(y)}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \tag{J_2'}$$

Dacă $x_k = y_k$, unde $k = 1, 2, \ldots, n$ forma bilineară (3) se reduce la forma patratică

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k$$

unde $a_{ik} = a_{ki}$. Formula (J_2') este atunci descompunerea lui Jacobi, a formei patratice într-o sumă de patrate

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k = \frac{Q_1^2(x)}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{Q_2^2(x)}{\Delta_1\Delta_2} + \ldots + \frac{Q_r^2(x)}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \tag{I_3}$$

unde $Q_i(x)$ sînt date de formulele (30).

6. Să presupunem că forma bilineară (3) este cu coeficienți complexi și cu variabile complexe, pe care o presupunem scrisă sub forma

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \bar{x}_i\, y_k . \tag{31}$$

Forma bilineară este *hermitică* dacă

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} . \tag{32}$$

În acest caz avem

$$\mathfrak{A}(x, y) = \overline{\mathfrak{A}}(y, x).$$

Din formulele (30) se arată ținînd seamă de relațiile (32) că

$$P_i(x) = \bar{Q}_i(x)$$

astfel că formula de descompunere (2_2) ne dă în acest caz

$$\sum_{i,k=i}^{n} a_{ik}\,\overline{x}_i\,y_k = \frac{\overline{Q}_1(x)\,Q_1(y)}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{\overline{Q}_2(x)\,Q_2(y)}{\Delta_1\,\Delta_2} + \ldots + \frac{\overline{Q}_r(x)\,Q_r(y)}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \qquad (H)$$

unde determinanții Δ_i dați de formulele (29) sînt reali.

În cazul cînd $x_k = y_k$, unde $k = 1, 2, \ldots, n$ forma bilineară hermitică (31) se reduce la o formă patratică hermitică, și formula de descompunere (H) devine

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\overline{x}_i\,x_k = \frac{\overline{Q}_1(x)\,Q_1(x)}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{\overline{Q}_2(x)\,Q_2(x)}{\Delta_1\,\Delta_2} + \ldots + \frac{\overline{Q}_r(x)\,Q_r(x)}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \qquad (H_1)$$

sau

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\overline{x}\,x_k = \frac{|\,Q_1(x)\,|^2}{\Delta_0\,\Delta_1} + \frac{|\,Q_2(x)\,|^2}{\Delta_1\,\Delta_2} + \ldots + \frac{|\,Q_r(x)\,|^2}{\Delta_{r-1}\,\Delta_r} \qquad (H_1')$$

adică se obține descompunerea într-o sumă de patrate reale a formei patrate hermitice

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\,\overline{x}_i\,x_k .$$

BIBLIOGRAFIE

[1] A. Mostowski și M. Stark: *Algebra Wyzsza*, Warszawa 1953.
[2] F. R. Gantmacher: *Teoria matricelor*. Cap. II, p. 28. Moscova 1953.

★

О РАЗЛОЖЕНИИ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМУЛЫ В СУММУ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Резюме

Показано что функции, однородные и степени p относительно $x_1, \ldots, x_n$ и степени p относительно $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют некоторому тождеству (J). В частном случае когда Φ является билинейной формой. (J) сводится к разложению формы на сумму произведений которое в случае квадратичной формы сводится к разложению Якоби квадратичной формы на сумму квадратов.

UNE IDENTITÉ IMPORTANTE ET LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME BILINÉAIRE EN UNE SOMME DE PRODUITS

Résumé

3. On montre que pour les fonctions $\Phi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ homogènes, de grade p en $x_1, x_2, \ldots x_n$ et de grade q en $y_1, y_2, \ldots y_n$ existe une identité (J), qui dans le cas particulier quand Φ est une forme bilinéaire, fournit la décomposition de la forme bilinéaire en une somme de produits et qui, dans le cas de la forme quadratique, se réduit à la décomposition de Jacobi dans une somme de carrées.