REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE
STR. ACADEMIEI 14 — TELEFON 4.46.53. — BUCUREŞTI

SUMARUL

Seria A, nr. 8, vol. VII (LX), august 1955

LUCRĂRILE PRIMEI SESIUNI ŞTIINŢIFICE A S.S.M.F.

		Pag.
1. *D. V. Ionescu*	: Generalizarea formulei lui Taylor	389
2. *A. Halanay*	: Soluţii aproape periodice ale unor sisteme neliniare	396
3. *I. Maurer*	: Grupuri de permutări infinite	400
4. *F. Marcus*	: Asupra invarianţilor din teoria proiectivă diferenţială a congruentelor de drepte a lui Fubini	409
5. *R. Miron*	: Despre torsiunea totală a unei suprafeţe	417
6. *E. Vişa*	: Teorema lui Modenov	425
7. *N. Mihăilă*	: Despre deplasările infinitezimale ale sistemelor materiale nedeformabile	428
8. *G. Silaş*	: Asupra unor teoreme din mecanică	434
9. *I. Agîrbiceanu*	: Starea de polarizare a luminii difuzate de atmosferă	439
10. *M. Zăgănescu*	: Despre cuantificarea timpului propriu	443

STUDII ŞI NOTE

11. *E. Toth*	: Gauss şi geometria neeuclidiană	447
12. *I. Frisch*	: Cu privire la formula lui Weingarten	456
13. —	: Noţiuni de bază în fizica nucleară experimentală	457

ÎNVĂŢĂMÎNT

14. *S. Mora*	: Despre mărimi fizice şi măsura lor	470

RECENZII

15. *H. Segal*	: Cîteva observaţii cu privire la definirea noţiunilor matematice în «Dicţionarul Limbii Romîne Literare Contemporane» Vol. I, A-C, 1955	478

PROBLEME

16. Probleme rezolvate		480
17. Probleme propuse		484

ABONAMENTELE

SE PRIMESC LA TOATE OFICIILE POŞTALE DELA ORAŞE ŞI SATE, PRIN FACTORI POŞTALI, PRIN PROPAGANDIŞTI PRECUM ŞI LA SECŢIILE RAIONALE DE DIFUZARE A PRESEI

PROFESORI ŞI STUDENŢI . . . . . LEI 25 ANUAL
TARIF GENERAL . . . . . LEI 60 ANUAL

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA A

PUBLICAŢIE PENTRU STUDIUL ŞI RĂSPÎNDIREA ŞTIINŢELOR MATEMATICE ŞI FIZICE
SERIE NOUĂ A GAZETEI MATEMATICE FONDATĂ ÎN ANUL 1895

VOLUMUL VII (LX) * Nr. 8 August 1955

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK KÖNYVTÁRA

LUCRĂRILE PRIMEI SESIUNI ŞTIINŢIFICE A S. S. M. F.

GENERALIZAREA FORMULEI LUI TAYLOR

D. V. IONESCU, prof. univ. Cluj

1. Teoria ecuaţiei diferenţiale liniare adjuncte unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n [1] permite să stabilim o formulă care generalizează formula clasică a lui Taylor

$$y(x)=y(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}y'(x_0)+\ldots+$$

$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n)}(s)\,ds. \tag{1}$$

Fie

$$F(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \tag{2}$$

o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul n, coeficienţii $a_i(x)$, $i=1, 2,\ldots n$ fiind funcţii continue în intervalul $[a, b]$.

Fie deasemenea

$$G(z)=(-1)^n[z^{(n)}-(a_1z)^{n-1}+\ldots+(-1)^n a_n z]=0 \tag{3}$$

ecuaţia adjunctă ecuaţiei (2).

Se ştie că avem identitatea

$$zF(y)-yG(z)=\frac{d}{dx}\mathfrak{A}(y,z), \tag{4}$$

unde

$$\mathfrak{A}(y,z)=zy^{(n-1)}+ \tag{5}$$

$$+[(a_1z)-z']y^{(n-2)}$$
$$+[(a_2z)-(a_1z)'+z'']y^{(n-3)}$$
$$+\ldots$$
$$+[(a_{n-1}z)-(a_{n-2}z)'+\ldots+(-1)^{n-1}z^{(n-1)}]y.$$

Să integrăm ambii membri ai formulei (4) între x_0 şi x, unde şi x şi x_0 sînt puncte aparţinînd intervalului $[a, b]$. Vom obţine

$$\int_{x_0}^{x}\{z(s)F[y(s)]-y(s)G[z(s)]\}\,ds=\int_{x_0}^{x}\frac{d}{ds}\mathfrak{A}[y(s),z(s)]\,ds. \tag{6}$$

Fie

$$z(s) = \varphi(x, s) \tag{7}$$

o integrală a ecuației adjuncte $G(z) = 0$ care depinde de parametrul x și satisface condițiile inițiale:

$$z(s)\big|_x = \varphi(x, x) = 0,\ z'(s)\big|_x = \varphi'_s(x, x) = 0,\ \ldots\ldots$$
$$z^{(n-2)}(s)\big|_x = \varphi_s^{(n-2)}(x, x) = 0,\ z^{(n-1)}(s)\big|_x = \varphi_s^{(n-1)}(x, x) = 1. \tag{8}$$

Înlocuind în formula (6) pe $z(s)$ cu $\varphi(x, s)$, obținem ecuația

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) F[y(s)]\, ds = \mathcal{A}[y(s), z(s)]\Big|_{x_0}^{x}. \tag{9}$$

Observăm că $\mathcal{A}(y, z)$ este o funcție liniară și omogenă în $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, coeficientul lui $z^{(n-1)}$ fiind $(-1)^{n-1} y$. Pentru $s=x$, datorită relațiilor (8), $\mathcal{A}(y, z)$ se reduce la $(-1)^{n-1} y(x)$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}(y, z)$ este o funcție liniară și omogenă în $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ai cărei coeficienți sînt puși în evidență în formula (5) și care depind de x și s, deoarece $z = \varphi(x, s)$. Pentru $s = x_0$, coeficienții lui $y(x_0), y,(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ devin funcții de x, pe care-i notăm cu

$$(-1)^{n-1}\lambda_1(x),\quad (-1)^{n-1}\lambda_2(x), \ldots, (-1)^{n-1}\lambda_n(x).$$

Formula (9) devine

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x,s) F[y(s)]ds = (-1)^{n-1} y(x) + (-1)^n [\lambda_1(x) y(x_0) + \lambda_2(x) y'(x_0) + \ldots + \lambda_n(x) y^{(n-1)}(x_0)].$$

Rezolvînd în raport cu $y(x)$, obținem formula

$$y(x) = \lambda_1(x) y(x_0) + \lambda_2(x) y'(x_0) + \ldots + \lambda_n(x) y^{(n-1)}(x_0) + (-1)^{n-1}\int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) F[y(s)]\, ds. \tag{10}$$

Să dăm semnificația funcțiilor $\lambda_i(x)$. Înlocuind în formula (10) pe $y(x)$ cu integrala $y_i(x)$ a ecuației diferențiale $F(y) = 0$ care satisface condițiile inițiale

$$y_i(x_0) = 0, \ldots, y_i^{(i-2)}(x_0) = 0,\ y_i^{(i-1)}(x_0) = 1,$$
$$y_i^{(i)}(x_0) = 0, \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

obținem

$$y_i(x) = \lambda_i(x).$$

Astfel, în formula (10), $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)$ sînt integralele ecuației diferențiale $F(y) = 0$, pentru care condițiile inițiale sînt cele arătate în tabloul:

$y_1(x)$	$1\ 0 \ldots 0$
$y_2(x)$	$0\ 1 \ldots 0$
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$
$y_n(x)$	$0\ 0 \ldots 1$

(12

linia a i-a conținînd condițiile inițiale pentru $y_i(x)$.

Se știe că, în acest caz, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ formează un sistem fundamental de integrale ale ecuației diferențiale $F(y) = 0$. Formula (10) devine astfel

$$y(x) = y_1(x) y(x_0) + y_2(x) y'(x_0) + \ldots + y_n(x) y^{(n-1)}(x_0) + (-1)^{n-1}\int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) F[y(s)]ds. \tag{13}$$

În cazul particular cînd

$$F(y) = y^{(n)},$$

avem

$$G(z) = (-1)^n z^{(n)}.$$

Integrala ecuației diferențiale $G(z) = 0$ care satisface la condițiile inițiale (8) este

$$\varphi(x, s) = (-1)^{n-1}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},$$

iar integralele ecuației diferențiale $y^{(n)}=0$ care satisfac condițiile inițiale scrise pentru fiecare din ele în liniile tabloului (12) sînt

$$y_1(x) = 1,$$
$$y_2(x) = \frac{x-x_0}{1!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Formula (13) se reduce în acest caz la formula lui Taylor (1).

Deaceia formula (13), asupra căreia voim să atragem atenția în această lucrare, este o generalizare a formulei lui Taylor (1).

2. Metoda arătată mai sus permite să se exprime integralele fundamentale $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ale ecuației diferențiale $F(y) = 0$ care satisfac condițiile inițiale scrise pentru fiecare din ele în liniile tabloului (12) cu ajutorul funcției $\varphi(x, s)$.

Într-adevăr, ținînd seama de expresia (5) a lui $\mathcal{A}(y, z)$, vom deduce că

$$y_1(x) = (-1)^{n-1}\left[a_{n-1}(s)\varphi(x, s) - \frac{\partial a_{n-2}(s)\varphi(x, s)}{\partial s} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}\varphi(x, s)}{\partial s^{n-1}}\right]_{s=x_0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{14}$$
$$y_{n-2}(x) = (-1)^{n-1}\left[a_2(s)\varphi(x, s) - \frac{\partial a_1(s)\varphi(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial^2\varphi(x,s)}{\partial s^2}\right]_{s=x_0},$$
$$y_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}\left[a_1(s)\varphi(x, s) - \frac{\partial\varphi(x, s)}{\partial s}\right]_{s=x_0},$$
$$y_n(x) = (-1)^{n-1}[\varphi(x,s)]_{s=x_0}.$$

Din aceste formule, să reținem în special ultima. Ea arată că, s fiind un punct oarecare al intervalului $[a, b]$, integrala $K(x, s)$ a ecuației $F(y) = 0$, care depinde de parametrul s și care satisface la condițiile inițiale

$$K(x, s)|_{x=s} = 0 \quad , \quad K'_x(x, s)|_{x=s} = 0 \quad , \quad \ldots \quad K^{(n-2)}(x, s)|_{x=s} = 0 \, , \quad K^{(n-1)}(x, s)|_{x=s} = 1 \, , \tag{15}$$

este

$$(-1)^{(n-1)} \varphi(x, s) \, .$$

Putem deci scrie că avem

$$K(x, s) = (-1)^{n-1} \varphi(x, s) \, . \tag{16}$$

O consecință a acestei identități este că formula fundamentală (13) se mai poate scrie sub forma

$$y(x) = y_1(x)\, y(x_0) + y_2(x)\, y'(x_0) + \ldots + y_n(x) y^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} K(x,s)\, F[y(s)]\, ds. \tag{13'}$$

3. Aplicații

1° Să considerăm ecuația diferențială neomogenă

$$F(y) = f(x) \, .$$

Integrala ei care satisface condițiile inițiale

$$y(x_0) = 0 \quad , \quad y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

este dată de formula (13'), unde în membrul al doilea vom înlocui pe $F[y(s)]$ cu $f(s)$. Vom obține astfel:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, f(s)\, ds. \tag{17}$$

Regăsim astfel formula lui Cauchy, bine cunoscută.

2° Să presupunem că

$$F(y) = y'' + y \, .$$

Vom avea

$$G(z) = z'' + z$$

și integrala ecuației diferențiale

$$z'' + z = 0$$

care satisface condițiile

$$z(s)|_{s=x} = 0 \quad , \quad z'(s)|_{s=x} = 1$$

este

$$z = \varphi(x, s) = -\sin(x - s) \, .$$

Formulele (14) ne dau

$$y_1(x) = \cos(x - x_0) \, ,$$
$$y_2(x) = \sin(x - x_0) \, ,$$

iar formula (13) devine

$$y(x) = y(x_0) \cos(x - x_0) + y'(x_0) \sin(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \sin(x - s)[y''(s) + y(s)]\, ds \, .$$

În mod analog, se demonstrează formula

$$y(x) = y(x_0) \operatorname{ch}(x - x_0) + y'(x_0) \operatorname{sh}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \operatorname{sh}(x - s)\, [y''(s) - y(s)]\, ds. \tag{19}$$

3° Să presupunem că

$$F(y) = y^{IV} + 5\, y'' + 4\, y.$$

Vom avea

$$G(z) = z^{IV} + 5\, z'' + 4\, z.$$

Integrala ecuației diferențiale

$$z^{IV} + 5\, z'' + 4\, z = 0$$

care satisface condițiile

$$z(s)|_{s=x} = 0, \quad z'(s)|_{s=x} = 0, \quad z''(s)|_{s=x} = 0, \quad z'''(s)|_{s=x} = 1$$

este

$$z = \varphi(x, s) = \frac{\sin 2(x - s) - 2 \sin(x - s)}{6} \, .$$

Aplicînd formulele (14), găsim

$$y_1(x) = \frac{1}{3}[4 \cos(x - x_0) - \cos 2(x - x_0)],$$

$$y_2(x) = \frac{1}{6}[8 \sin(x - x_0) - \sin 2(x - x_0)],$$

$$y_3(x) = \frac{1}{3}[\cos(x - x_0) - \cos 2(x - x_0)],$$

$$y_4(x) = \frac{1}{6}[2 \sin(x - x_0) - \sin 2(x - x_0)].$$

Formula (13) devine

$$y(x) = \frac{1}{3}[4 \cos(x - x_0) - \cos 2(x - x_0)]\, y(x_0) + \frac{1}{6}[8 \sin(x - x_0) - \sin 2(x - x_0)]\, y'(x_0) + \frac{1}{3}[\cos(x - x_0) - \cos 2(x - x_0)]\, y''(x_0) + \frac{1}{6}[2 \sin(x - x_0) - \sin 2(x - x_0)]\, y'''(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{6}[\sin 2(x - s) - 2 \sin(x - s)]\, [y^{IV}(s) + 5y''(s) + 4\, y(s)]\, ds. \tag{20}$$

4° Să considerăm ecuaţia integrodiferenţială

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = \int_{x_0}^{x} N(x, s)\, y(s)\, ds + f(x), \qquad (21)$$

unde $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ sînt funcţii continue în intervalul $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, iar $N(x, s)$ este o funcţie continuă în domeniul $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$. Vrem să arătăm că integrala ecuaţiei (21) care satisface condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (22)$$

este integrala unei ecuaţii integrale de tip Volterra de speţa a doua, pe care o vom preciza (25).

Să aplicăm formula (13′) unde $F(y)$ este primul membru al ecuaţiei (21). Vom avea

$$y(x) = y_1(x)\, y_0 + y_2(x)\, y_0' + \ldots + y_n(x)\, y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, ds \int_{x_0}^{s} N(s, t)\, y(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, f(s)\, ds. \qquad (23)$$

Fie $Y(x)$ integrala ecuaţiei diferenţiale $F(y) = f(x)$ care satisface condiţiile (22). Ea va fi

$$Y(x) = y_1(x)\, y_0 + y_2(x)\, y_0' + \ldots + y_n(x)\, y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, f(s)\, ds. \qquad (24)$$

Pe de altă parte, să notăm

$$N_1(x, t) = \int_{t}^{x} K(x, s)\, N(s, t)\, ds. \qquad (25)$$

Ecuaţia (23) devine

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} N_1(x, t)\, y(t)\, dt + Y(x). \qquad (26)$$

S-a arătat prin urmare că integrala ecuaţiei integrodiferenţiale (21) care satisface condiţiile iniţiale (22) este integrala ecuaţiei integrale (26) de tip Volterra de speţa a doua, unde sîmburele $N_1(x, t)$ este dat de formula (25), iar $Y(x)$ este integrala ecuaţiei diferenţiale $F(y) = f(x)$ care satisface condiţiile (22).

BIBLIOGRAFIE

V. V. Stepanov, *Curs de ecuatii diferenţiale.* Moscova, 1953, p. 205—214.

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЭЙЛОРА

Резюме

Приводится формула

$$y(x) = y_1(x)\, y(x_0) + y_2(x)\, y'(x_0) + \ldots + y_n(x)\, y^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, F[y(s)]\, ds,$$

в качестве обобщение классической формулы Тэйлора. Функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются интегралами дифференциального уравнения

$$F(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0,$$

с начальными условиями

$$y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

$K(x, s)$ — представляет собой интеграл дифференциального уравнения $F(y) = 0$, удовлетворяющий условиям

$$K_{x^i}^{(i)}(x, s)\big|_{x=s} = \delta_{i, n-1}.$$

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE TAYLOR

Résumé

On donne la formule

$$y(x) = y_1(x)\, y(x_0) + y_2(x)\, y'(x_0) + \ldots + y_n(x)\, y^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, F[y(s)]\, ds$$

comme une généralisation de la formule classique de Taylor.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sont les intégrales de l'équation différentielle

$$F(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

$K(x, s)$ est l'intégrale de l'équation $F(y) = 0$ qui satisfait aux conditions

$$K_{x^i}^{(i)}(x, s)_{x=s} = \delta_{i, n-1}.$$