Gazeta Matematică şi Fizică seria A. Nr. 7—1955
Lucrare prezentată la Prima Sesiune Ştiinţifică a S.S.F.M.

RESTUL ÎN FORMULA DE CUADRATURĂ „PREFERATĂ" A LUI NEWTON

D. V. IONESCU, prof. univ. Cluj

1. Formula de cuadratură « preferată » a lui Newton [1] este

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] + R \tag{1}$$

unde punctele x_1 şi x_2 împart în trei părţi egale intervalul (a, b), iar restul R este nul cînd $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul al treilea.

În această lucrare vom determina restul R, pentru funcţiile $f(x)$ care în intervalul (a, b) au derivatele succesive $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ şi $f^{VI}(x)$. Comparînd restul din formula lui *Newton*, cu restul din formula de cuadratură a lui *Simpson*, vom căuta să explicăm numirea de *formulă preferată* dată formulei (1).

2. La intervalele (a, x_1), (x_1, x_2) (x_2, b) să atașăm ecuaţiile diferenţiale

$$\varphi_1^{(4)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(4)}(x) = 1, \quad \varphi_3^{(4)}(x) = 1 \tag{2}$$

pe care să le integrăm cu următoarele condiţii:

$$\varphi_1(a) = \varphi_1'(a) = \varphi_1''(a) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \quad \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \quad \varphi_2''(x_1) = \varphi_1''(x_1) \tag{4}$$

$$\varphi_3(x_2) = \varphi_2(x_2), \quad \varphi_3'(x_2) = \varphi_2'(x_2), \quad \varphi_3''(x_2) = \varphi_2''(x_2) \tag{5}$$

$$\varphi_3(b) = \varphi_3'(b) = \varphi_3''(b) = 0. \tag{6}$$

Scriind că

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} \varphi_1^{(4)}(x) f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(4)}(x) f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} \varphi_3^{(4)}(x) f(x)\,dx$$

şi aplicînd la fiecare din integralele din membrul al doilea formula generalizată de integrare prin părţi avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi_1''' f - \varphi_1'' f' + \varphi_1' f'' - \varphi_1 f''']_a^{x_1} + \int_a^{x_1} \varphi_1(x) f^{(4)}(x)\,dx +$$

$$+ [\varphi_2''' f - \varphi_2'' f' + \varphi_2' f'' - \varphi_2 f''']_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) f^{(4)}(x)\,dx +$$

$$+ [\varphi_2''' f - \varphi_3'' f' + \varphi_3' f'' - \varphi_3 f''']_{x_2}^{b} + \int_{x_2}^{b} \varphi_3(x) f^{(4)}(x)\,dx.$$

Ţinînd seama de condiţiile (3), (4), (5) şi (6) această formulă se reduce la

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\varphi_1'''(a) f(a) + [\varphi_1'''(x_1) - \varphi_2'''(x_1)] f(x_1) + \tag{7}$$

$$+ [\varphi_2'''(x_2) - \varphi_3'''(x_2)] f(x_2) + \varphi_3'''(b) f(b) + \int_a^b \varphi(x) f^{(4)}(x)\,dx$$

unde $\varphi(x)$ este funcţia care coincide cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ în intervalele (a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, b).

S-a obţinut astfel, formula (7) care este de tipul formulei (1). Rămîne să determinăm funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.

3. Funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)_2$, $\varphi_3(x)$ sînt date de formulele:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} + \lambda\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} + \lambda\frac{(a-x)^3}{3!} + \mu\frac{(x-x_1)^3}{3!} \tag{8}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} + \lambda\frac{(x-a)^3}{3!} + \mu\frac{(x-x_1)^3}{3!} + \nu\frac{(x-x_2)^3}{3!}$$

ele verifică ecuaţiile (2) şi condiţiile (3), (4) şi (5). Scriind că şi condiţiile (6) sînt verificate, avem un sistem de ecuaţii lineare care determină pe λ, μ şi ν. Se găseşte

$$\lambda = -\frac{b-a}{8}, \quad \mu = -\frac{3(b-a)}{8}, \quad \nu = -\frac{3(b-a)}{8}. \tag{9}$$

Din formulele (8) şi (9) se deduce că

$$\varphi_1'''(a) = -\frac{b-a}{8}, \quad \varphi_1'''(x_1) - \varphi_2'''(x_1) = \frac{3(b-a)}{8},$$

$$\varphi_2'''(x_2) - \varphi_3'''(x_2) = \frac{3(a-b)}{8}, \quad \varphi_3'''(b) = \frac{b-a}{8}$$

astfel că formula (7) devine

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] + \int_a^b \varphi(x) f^{(4)}(x)\,dx \tag{10}$$

Aceasta este formula lui *Newton*. Să precizăm acum restul.

4. Avem

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{8}\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{8}\frac{(x-b)^3}{3!} - \frac{3(b-a)}{8}\frac{(x-x_1)^3}{3!}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{8}\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{3(b-a)}{8}\frac{(x-x_1)^3}{3!} - \frac{3(b-a)}{8}\frac{(x-x_2)^3}{3!}.$$

Dacă se face schimbarea de variabilă

$$x = \frac{a+b}{2} + X$$

ecuația curbei $y = \varphi_1(x)$ devine

$$y = \frac{X}{4!}\left(X - \frac{b-a}{2}\right)^3$$

iar ecuația curbei $y = \varphi_3(x)$ devine

$$y = \frac{X}{4!}\left(X + \frac{b-a}{2}\right)^3.$$

Se deduce că arcele de curbă $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_3(x)$ din intervalele $[a, x_1]$, $[x_2, b]$ sînt simetrice față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$.

Ecuația curbei $y = \varphi_2(x)$ devine prin aceiași schimbare de variabilă

$$y = \frac{1}{4!}\left[X^4 - \frac{(b-a)^4}{144}\right].$$

Arcul de curbă $y = \varphi_2(x)$ din intervalul $[x_1, x_2]$ este simetric față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$.

Graficul funcției $y = \varphi(x)$ în intervalul $[a, b]$ este dat de fig. 1. Curba este situată sub axa Ox și ordonata minimă este

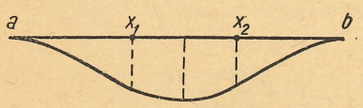


Fig. 1

$$\varphi_m = -\frac{(b-a)^4}{4!\ 144}. \tag{11}$$

Se mai constată că aria cuprinsă între axa Ox și arcul de curbă $y = \varphi(x)$ între a și b este

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\frac{(b-a)^4}{6480}. \tag{12}$$

Putem să precizăm acum restul R în formula lui Newton. Avem

$$R = \int_a^b \varphi(x)\, f^{(4)}(x)\,dx.$$

Funcția $\varphi(x)$ păstrînd un semn constant în intervalul (a, b), putem aplica formula întîia a mediei. Presupunînd că derivata $f^{(4)}(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$ vom avea

$$R = +f^{(4)}(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad \xi \in (a, b)$$

sau ținînd seamă de formula (12) vom avea

$$R = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi). \tag{13}$$

5.— Să considerăm formula de cuadratură a lui *Simpson*.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R_1 \tag{14}$$

pentru care restul R este nul cînd $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul al treilea. Pentru funcțiile $f(x)$ care au în intervalul $[a, b]$ derivatele $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}_{(x)}$ restul R_1 este dat de formula

$$R_1 = \int_a^b \psi(x)\, f^{(4)}(x)\,dx$$

unde funcția $\psi(x)$ este definită în modul următor:

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^4}{4!} - \dfrac{b-a}{6}\dfrac{(x-a)^3}{3!} & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right], \\ \dfrac{(b-x)^4}{4!} - \dfrac{b-a}{6}\dfrac{(b-x)^3}{3!} & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Arcul de curbă $y = \psi(x)$ în intervalul $[a, b]$ este simetric față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$. Graficul lui este dat în fig. 2. Curba este situată sub axa Ox și ordonata minimă este

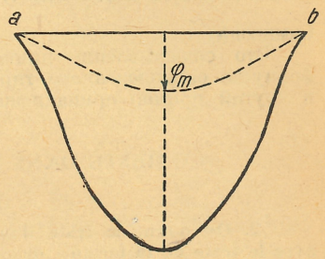


Fig. 2

$$\psi_m = -\frac{(b-a)^4}{4!\ 48}.$$

Comparînd pe φ_m cu ψ_m, se deduce că

$$\psi_m = 3\,\varphi_m.$$

Aria cprinsă între axa Ox și arcul de curbă $y = \psi(x)$ cuprins între a și b este

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = -\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Rezultă atunci că, dacă derivata $f^{(4)}_{(x)}$ este continuă în intervalul $[a, b]$, vom putea scrie

$$R_1 = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in (a, b). \tag{14}$$

Pentru o funcție $f(x)$ pentru care avem $\left|f^{(4)}_{(x)}\right| < M$ în intervalul $[a, b]$, vom avea următoarele evaluări ale valorii absolute a restului

$$\begin{aligned} |R| &< \frac{(b-a)^5}{6480} M \qquad \text{(formula lui Newton)} \\ |R| &< \frac{(b-a)^5}{2880} M \qquad \text{(formula lui Simpson).} \end{aligned} \tag{15}$$

Aceste inegalități dau margini superioare pentru valoarea absolută a restului cînd se aplică formulele lui Newton și Simpson. Marginea superioară găsită în cazul formulei lui Newton este $\frac{4}{9}$ din marginea superioară găsită în cazul formulei lui Simpson. De aceea socotim că este preferabil în aplicații să se aplice formula lui Newton și nu aceea a lui Simpson.

Determinarea restului în formula de cuadratură a lui Newton s-a făcut urmînd o metodă care a mai fost întrebuințată de noi cu altă ocazie [2].

BIBLIOGRAFIE

[1] G. Kowalewski: *Quadraturformeln.*
[2] D. V. Ionescu: *Despre o formulă de cuadratură mecanică.* Acad. R.P.R., Lucrările sesiunii generale ştiinţifice din 2—12 iunie 1950, p. 238—243.

★

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН «ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОЙ» КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

Резюме

Приводится остаточный член для квадратурной формулы Ньютона и сравнивается с остаточным членом квадратурной формулы Симпсона. В случае применения формул к функциям $f(x)$ для которых $|f^{(2)}(x)| < M$ формула Ньютона предпочтительна формуле Симпсона, т. к. получается оценка остатка сверху в которой коэффициент при M в формуле Ньютона равен $\frac{4}{9}$ коэффициента при M в формуле Симпсона.

Это сопоставление приводит к задаче нахождения наилучшей квадратурной формулы опрелделенного типа. Приводится пример в связи с формулой трапеций и другой пример принадлежащий тов. А. Коцину в связи с формулой Симпсона.

LE RESTE DANS LA FORMULE « PRÈFÉRÉE » DE NEWTON

Résumé

2. On donne le reste dans la formule de quadrature de Newton et on le compare avec le réste de la formule de quadrature de Simpson. Dan le cas où l'on applique les formules aux fonctions $f(x)$ pour lesquelles $|f^{(4)}_{(x)}| < M$, la formule de Newton est préfèrable à celle de Simpson, puisque, en èvaluant le reste, on obtient une borne supérieure dans laquelle le coefficient de M est dans la formule de Newton $\frac{4}{9}$ de celui qui intervient dans la formule de Simpson.

Cette comparaison conduit au problème de trouver la meilleure formule de quadrature d'un certain type. On donne un exemple concernant la formule des trapèzes et un exemple, dû à A. Cotin, concernant la formule de Simpson.