BIBLIOTECA
FACULTĂȚII
DE
518
B-19

EPUBLICII POPULARE ROMÎNE
IINȚĂ ȘI TEHNICĂ

7

BAL ★ FRANCISC RADÓ

LECȚII DE NOMOGRAFIE

EDITURA TEHNICĂ

340498

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ

7

LASCU BAL ★ FRANCISC RADÓ

LECŢII DE NOMOGRAFIE

Nr. 14484/257

BCU Cluj-Napoca
MATER 2008 05210

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI — 1956

518
B-19

PREFAȚA

Lucrarea de față conține lecțiile ținute de autori la Casa Oamenilor de Știință din București în iarna anului 1955, în cadrul cursurilor organizate de Academia Republicii Populare Române pentru ingineri și tehnicieni. La aceste lecții s-au adăugat unele completări.

Calculul cu ajutorul nomogramelor, fiind un auxiliar prețios tehnicienilor din diferite ramuri de producție, are astăzi o largă răspîndire. Există numeroase albume de nomograme, prin care se ușurează șirul de calcule complicate ce intervin în diferite proiectări.

Construirea nomogramelor ridică diferite probleme matematice. Stabilirea condițiilor în care o formulă dată poate fi rezolvată cu un anumit tip de nomogramă, precizia calculului nomografic și determinarea erorilor în aceste calcule, determinarea transformărilor nomogramei în vederea micșorării maxime a erorilor — sînt probleme care necesită o cercetare matematică. O parte din aceste probleme au fost rezolvate, iar o altă parte formează obiectul unor cercetări actuale. La secția de matematică a Filialei Academiei R.P.R. din Cluj, în cadrul problemelor de calcul numeric și grafic, se studiază teme de această natură.

În rezolvarea problemelor de nomografie este interesat atît inginerul și tehnicianul, cît și matematicianul, fiecare avînd partea lui de preocupare. Am căutat să satisfacem cerințele în amîndouă direcțiile. Nu dăm un curs complet ci prezentăm numai problemele de bază ale nomografiei, arătînd principiile de rezolvare nomografică a ecuațiilor, condițiile în care o ecuație este rezolvabilă prin nomograme și metodele de construcție. Sperăm că pe baza acestui curs cititorul va putea rezolva probleme de nomografie.

Pentru înțelegerea materialului prezentat se presupun cunoștințe generale din analiza matematică și geometrie analitică, nu

se presupun însă cunoştinţe de geometrie proiectivă. Intrucît anumite noţiuni din geometria proiectivă sînt absolut necesare proiectării şi transformării nomogramei pînă la forma ei definitivă, am crezut potrivit să introducem într-un capitol aparte aceste noţiuni, legîndu-le strîns de materialul de nomografie. Prin aceasta facem accesibil materialul expus unui cerc mai larg de cititori şi totodată sperăm a trezi interes pentru probleme de această natură.

Ideia întocmirii unui curs de nomografie cu prezentarea matematică a problemelor s-a născut cu ocazia cercetărilor din cadrul secţiei de matematică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R.

Exprimăm recunoştinţa noastră profesorului Tiberiu Popoviciu, pentru îndrumarea dată spre această direcţie a matematicii aplicate, pentru sprijinul său constant şi sfaturile sale preţioase la întocmirea acestor lecţii.

Cluj, 30 aprilie 1956.

AUTORII

CAPITOLUL I

NOŢIUNI INTRODUCTIVE

1. METODE GRAFICE DE CALCUL

Pentru efectuarea rapidă a calculelor se folosesc de multe ori diverse figuri geometrice. Există două forme diferite în utilizarea acestor figuri:

a) calculul grafic propriu-zis;

b) calculul nomografic.

In calculul grafic, diferitele numere care intervin sînt reprezentate prin elemente geometrice (de obicei, segmente măsurate cu o anumită unitate). Asupra acestor elemente se execută anumite construcţii care ne conduc la alte elemente geometrice, ale căror corespondente numerice ne dau rezultatele căutate.

Ca exemplu de acest mod de calcul să arătăm cum se rezolvă grafic o ecuaţie de gradul al doilea cu o necunoscută:

$$z^2+pz+q=0.$$

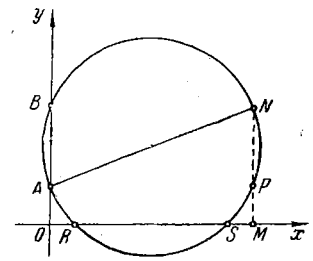


Fig. 1

Se ia în plan sistemul cartezian rectangular xOy (fig. 1); pe axa Ox se construieşte segmentul $OM=-p$, iar pe axa Oy segmentele $OA=1$, $OB=q$. Pe paralela din M la Oy se ia segmentul $MN=OB=q$. Se construieşte cercul de diametru AN, care taie pe Ox segmentele OR şi OS. Aceste segmente măsurate cu $OA=1$ ne dau valorile rădăcinilor ecuaţiei date. In adevăr, avem:

$$OA=MP,\quad OB=MN,\quad OR=SM,$$
$$OR+OS=OM=-p,$$
$$OR\cdot OS=OA\cdot OB=q.$$

Pentru fiecare ecuaţie de gradul al doilea trebuie construită o figură aparte.

Spre deosebire de aceasta, în calculul nomografic se construieşte un singur grafic (nomograma), corespunzător formulei date, şi cu ajutorul lui, prin simple citiri, se găsesc rezultatele, oricare ar fi valorile numerice ale parametrilor din formulă. Acest lucru este posibil prin întrebuinţarea elementelor geometrice cotate. Ca exemplu dăm o nomogramă pentru rezolvarea ecuaţiei de mai sus.

Utilizarea acestui desen este cu totul alta decît în cazul precedent. Fiind date valorile $p=-5$, $q=4$, construim pe figură punctele A şi B, care corespund acestor date numerice (fig. 2). Rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$z^2+pz+q=0$$

se găsesc la intersecţia dreptei AB cu scara variabilei z; ele sînt $z_1=1$, $z_2=4$. Nomograma serveşte numai pentru aflarea rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei; rădăcinile negative se găsesc rezolvînd transformata în $-z$.

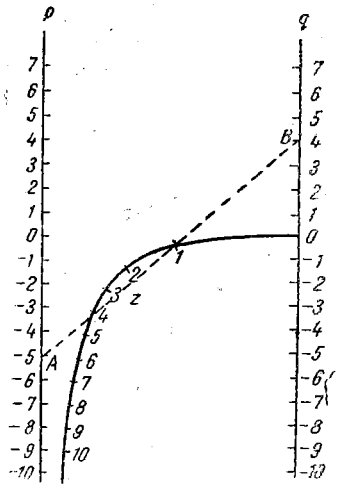


Fig. 2

2. SCARA

Să considerăm ecuaţiile

$$x=f(z), \quad y=g(z), \qquad (1)$$

unde funcţiile $f(z)$ şi $g(z)$ sînt definite în intervalul (α, β). Dînd o valoare variabilei z din intervalul (α, β), obţinem un punct în planul xOy. Scriind valoarea lui z lîngă acest punct, obţinem un *punct cotat*. Locul geometric al acestor puncte cotate, cînd z descrie intervalul (α, β), se numeşte *scară*. In cele ce urmează funcţiile $f(z)$ şi $g(z)$ sînt presupuse continue, cu derivate continue care nu se anulează simultan[1]). In acest caz, ecuaţiile (1) definesc o curbă (fig. 3) care poartă numele de *suportul scării*. Ecuaţiile (1) se numesc *ecuaţiile scării*.

Se înţelege că nu putem figura efectiv toate punctele cotate ale scării. Se procedează ca la gradarea riglei obişnuite sau riglei de calcul. Anumite puncte vor fi indicate prin trasarea gradaţiilor şi lîngă o parte din ele se vor scrie şi cotele lor. Fixarea unui punct pe scară, cînd se dă cota, precum şi găsirea cotei unui punct de pe scară se face, în general, prin interpolare vizuală. Pentru ca citirea pe scară să fie uşoară, cotele corespunzătoare gradaţiilor consecutive trebuie să formeze o progresie aritmetică, a cărei raţie se numeşte *pasul scării*. Arcul cuprins între două gradaţii consecutive se numeşte *interval grafic*.

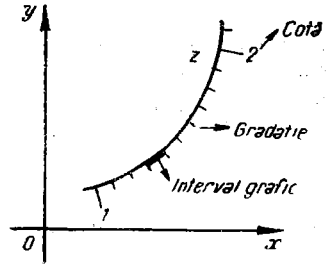


Fig. 3

Cîteva reguli empirice trebuie respectate: lungimea intervalului grafic să fie cuprinsă între 1 şi 3 mm (la execuţii de mare precizie se pot întîlni şi intervale grafice mai mici). Pentru a putea respecta această normă, nu putem în general păstra acelaşi pas de-a lungul întregii scări. La rigla de calcul, pasul se schimbă de două ori: de la 1 a 2 pasul este de 0,01, de la 2 la 4 pasul este de 0,02 şi de la 4 la 10 de 0,05. Subdiviziunile se fac în cinci sau în două.

In cazul scărilor rectilinii (fig. 4), suportul scării fiind pe axa x, ecuaţia ei o scriem sub forma

$$x=\mu f(z), \qquad (2)$$

unde $f(z)$ este o funcţie monotonă şi factorul constant se numeşte *modulul scării*. Modulul se determină în funcţie de intervalul de variaţie (α, β) a lui z şi în funcţie de lungimea scării. Dacă L este lungimea scării, avem:

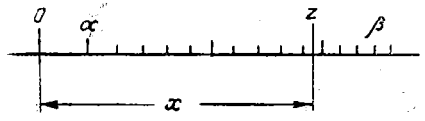


Fig. 4

$$\mu=\frac{L}{|f(\beta)-f(\alpha)|}. \qquad (3)$$

Se înţelege că precizia scării depinde de lungimea ei, dar această lungime este constrînsă de dimensiunile desenului şi de aceea în formula (3) L trebuie considerat ca fiind dat.

La fixarea unui punct de o cotă dată se comite o eroare Δx, numită *eroare geometrică*. Valoarea ei depinde de exerciţiul ochiului şi este mai mică decît 0,2 mm. Din (2) avem

$$\Delta x \approx \mu f'(z)\Delta z,$$

[1]) In cursul expunerilor vom presupune că sistemele de funcţii întîlnite satisfac aceste condiţii, fără a fi menţionate în mod deosebit.

din care găsim eroarea absolută pentru z

$$E_a = \Delta z \approx \frac{\Delta x}{\mu} \cdot \frac{1}{f'(z)} \qquad (4)$$

și eroarea relativă

$$E_r = \frac{\Delta z}{z} \approx \frac{\Delta x}{\mu} \cdot \frac{1}{zf'(z)}. \qquad (4')$$

In formulele (4) și (4') se ia Δx constant, de obicei $\Delta x = 0{,}2$ mm. Ne interesează în special punctele unde eroarea relativă este maximă sau minimă. Aceste puncte se determină din condiția

$$\frac{dE_r}{dz} = 0$$

sau

$$f'(z) + zf''(z) = 0;$$

z_0 fiind cota unui astfel de punct, eroarea relativă în acest punct este maximă sau minimă după cum expresia

$$2f''(z_0) + z_0 f'''(z_0)$$

este pozitivă sau negativă.

Scări particulare mai importante:

a) **Scara regulată** (fig. 5) are ecuația

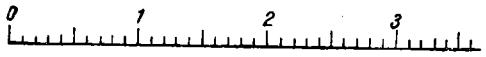


Fig. 5

$$x = \mu(z - a). \qquad (5)$$

Pentru $z = a$ avem $x = 0$; $z = a$ este cota *punctului nul* al scării. Intervalul grafic este constant și *eroarea absolută este aceeași pentru orice punct al scării* [v. (4)].

b) **Scara logaritmică** (fig. 6) are ecuația

$$x = \mu \lg \frac{z}{a}. \qquad (6)$$

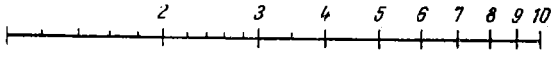


Fig. 6

Intervalele grafice descresc, cînd z crește. Eroarea relativă *este aceeași pentru orice punct al scării* [v. (4')].

c) **Scara proiectivă** are ecuația

$$x = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (7)$$

(modulul μ este inclus în coeficienții a și b). Această scară se obține din scara regulată printr-o construcție grafică simplă. Calculăm prin înlocuiri în ecuația (7) și construim trei puncte ale scării corespunzătoare cotelor z_1, z_2, z_3 (fig.7). Așezăm punctul A de cotă z_1 al scării regulate în punctul de cotă z_1 al scării proiective și luăm pe scara regulată punctele B și C de cote z_2 și z_3. Din, punctul de intersecție O al dreptelor care unesc punctele cu cotele z_2, respectiv z_3, de pe cele două scări, proiectăm scara regulată pe cea de construit (justificarea acestei construcții este dată în cap. VIII, 7). Importanța scărilor proiective constă, pe de o parte, în construcția grafică ușoară și pe de altă parte, în gradul de libertate al alegerii constantelor din (7).

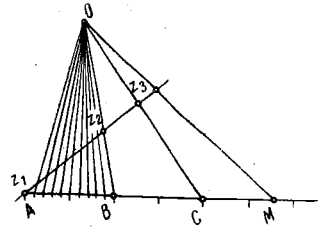


Fig. 7

Construcția scării după ecuația ei dată cere o muncă minuțioasă. Remarcăm aici că nu este nevoie să calculăm abscisele tuturor punctelor gradate; este suficient să fixăm prin calcul un număr restrîns de puncte, iar punctele gradate intermediare le construim cu aproximație prin *interpolare proiectivă*. Intre trei puncte consecutive calculate, scara se înlocuiește cu una proiectivă construită ca în fig. 7. Erorile astfel comise sînt neglijabile din punct de vedere practic (pentru expresia erorii a se vedea cap. IX, 1).

3. NOMOGRAMA INMULȚIRII

Să luăm acum trei scări rectilinii (fig. 8) de ecuații

$$x = f(z_1) \quad \text{(scara } z_1\text{)},$$

$$y = g(z_2) \quad \text{(scara } z_2\text{)},$$

$$v = h(z_3) \quad \text{(scara } z_3\text{)}.$$

O dreaptă intersectează cele trei scări în punctele P, Q, R. Avem:

$$\frac{O_1P}{O_2Q} = \frac{O_1R}{O_2R}$$

sau

$$\frac{x}{y} = \frac{v}{a - v},$$

unde $a=O_1O_2$. Notînd

$$\frac{v}{a-v}=\frac{h(z_2)}{1-h(z_3)}=H(z_3).$$

între cotele punctelor P, Q, R există relaţia

$$f(z_1)=g(z_2)\,H(z_3). \qquad (8)$$

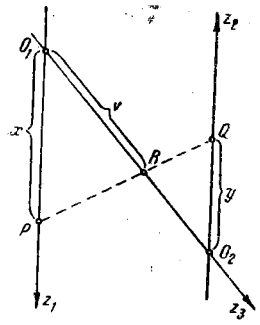


Fig. 8

Fiind dată o ecuaţie de formă (8), formăm funcţia

$$h(z_3)=\frac{H(z_3)}{1+H(z_3)}$$

şi construim scările $x=f(z_1)$ cu originea în O_1, $y=g(z_2)$ cu originea în O_2 şi $v=h(z_3)$ cu originea în O_1. Dacă se dă cîte o valoare numerică pentru variabilele z_1 şi z_2, rădăcina z_3 a ecuaţiei (8) se găseşte pe graficul construit în felul următor: fixăm punctul P de cotă dată z_1 pe scara acestei variabile, punctul Q de cotă dată z_2 pe scara z_2 şi unind punctele P şi Q, la intersecţia dreptei PQ cu scara z_3 obţinem un punct determinat R. Cota punctului R citită pe scara z_3 este rădăcina căutată.

Acest exemplu simplu de *nomogramă cu puncte aliniate* ilustrează un principiu geometric, pe care se bazează nomografia, şi care va fi dezvoltat în capitolele următoare.

4. NOMOGRAMA CARTEZIANĂ

Ecuaţia cu trei variabile

$$F(x, y, z)=0 \qquad (9)$$

pentru x şi y date devine o ecuaţie cu o singură variabilă z. Rezolvarea grafică a acestei ecuaţii, pentru x şi y fixate ori cum, se poate obţine prin reprezentarea carteziană obişnuită după cum urmează.

Ecuaţia cu două variabile

$$F(x, y, z')=0.$$

unde z' este dat, reprezintă o curbă, notată în fig. 9 cu z'. Dînd lui z diverse valori z', z'', z''', ..., obţinem o familie de curbe în planul xOy. Construind şi fasciculele de drepte paralele cu axele de coordonate, obţinem trei familii de linii cotate în plan (cota unei drepte paralelă cu axa y este abscisa comună a punctelor ei, la fel ordonata comună a punctelor de pe o dreaptă paralelă cu axa x este cota acestei drepte).

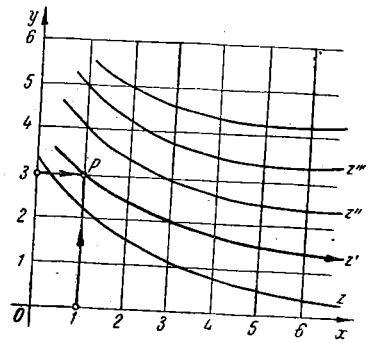


Fig. 9

Fiind dat un x şi un y, pentru a găsi pe cale grafică rădăcina corespunzătoare în z a ecuaţiei (9), căutăm curba familiei z, care trece prin punctul P de coordonate x şi y (intersecţia dreptelor de cote x respectiv y). Cota acestei curbe este rădăcina căutată. In fig. 9 s-a arătat exemplul: $x=1$, $y=3$, $z=z'$.

Nomograma poate fi folosită şi în cazul cînd x şi z sau y şi z sînt date.

Exemplu. Să se construiască o nomogramă carteziană pentru ecuaţia

$$z=xy.$$

Curbele $z=$const. sînt hiperbole echilatere $xy=$const. Pe fig. 10 *a* se vede exemplul $x=1$, $y=2$, $z=2$.

Schimbînd notaţia, ecuaţiei de mai sus îi dăm forma

$$x=yz.$$

Liniile $z=$const formează un fascicul de drepte cu centrul în origine. Pe fig. 10 *b* se vede exemplul $x=2$, $y=1$, $z=2$.

In acest punct am folosit un al doilea principiu de construire a nomogramelor.

5. FAMILII DE LINII COTATE

Intre curbele familiei $z=$const. (din fig. 9) şi valorile variabilei z dintr-un interval există o corespondenţă biunivocă ca şi între punctele unei scări şi cotele lor. Familia de curbe şi scara sînt elementele geometrice cotate prin care se reprezintă variabilele; ele formează elementele constitutive ale nomogramelor.

Ceea ce am stabilit la gradarea scărilor se poate extinde la cotarea unei familii de linii. Două linii cotate vecine să nu fie mai apropiate de 2 mm. Pasul are o definiţie analogă cu

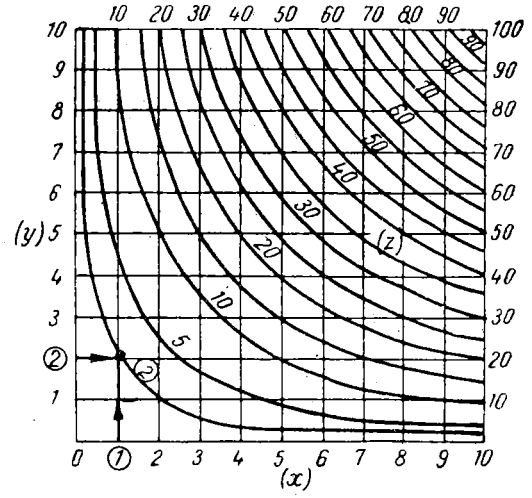


Fig. 10 *a*

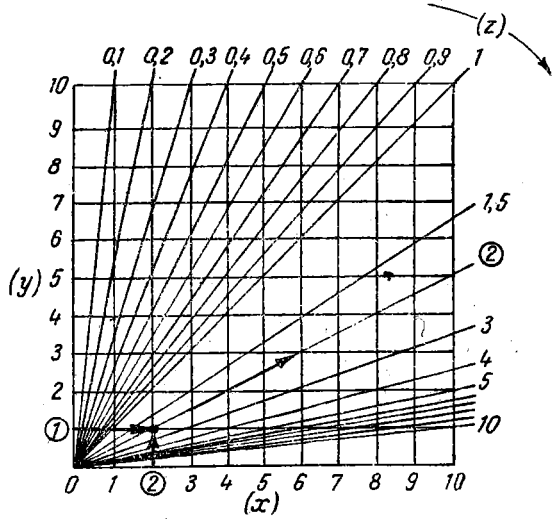


Fig. 10 *b*

cea de la scări, iar pentru ca interpolarea vizuală să fie uşurată, liniile familiei vor fi îngroşate din 2 în 2 sau din 5 în 5 (fig. 11). Eroarea geometrică se apreciază la 0,4 mm (de două ori mai mare de cît în cazul scărilor).

Să considerăm două familii de linii cotate, avînd ecuaţiile

$$F(x, y, z_1)=0, \quad G(x, y, z_2)=0 \qquad (10)$$

care se bucură de proprietatea că prin fiecare punct al unei regiuni din plan trece o singură linie din fiecare familie (fig. 12). Dacă se dau valori numerice pentru variabilele z_1 şi z_2, ecuaţiile (10) determină pe x şi y şi prin aceasta un punct M din

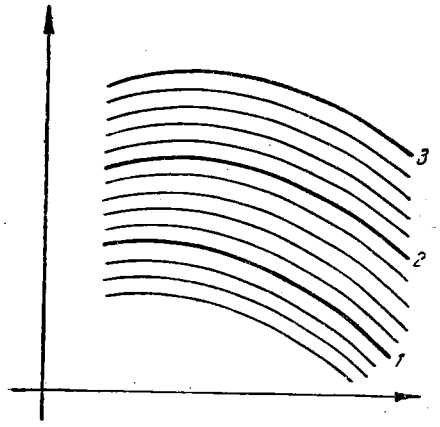


Fig. 11

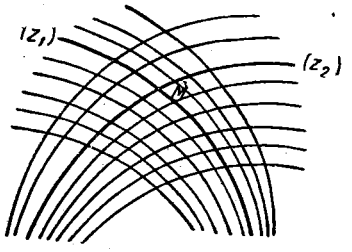


Fig. 12

plan. Invers, fiind dat un punct din plan, se pot determina cotele z_1 şi z_2 ale curbelor ce trec prin acest punct. Deci, sistemul format din cele două familii de linii cotate generalizează reţeaua carteziană obişnuită, utilizată la nomograma din fig. 9. Sistemul format din cele două familii de linii cotate poartă numele de *cîmp binar* sau *reţea*. Ecuaţiile ei se pot da fie sub forma (10) fie

$$x=f(z_1, z_2), \quad y=g(z_1, z_2). \qquad (10')$$

Din aceste ecuaţii se vede că reţeaua generalizează şi scara: scara a fost definită ca locul punctelor cu o singură cotă [ecuaţiile (1)], iar, reţeaua apare ca locul punctelor cu două cote.

6. NOTAŢII

Vom folosi următoarele notaţii şi prescurtări:

Variabilele se vor nota cu $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Funcţia de variabila z_i se va nota cu f_i în loc de $f_i(z_i)$;

iar funcția de variabilele z_i și z_j se va nota cu f_{ij} în loc de $f_{ij}(z_i, z_j)$.

Modulele se vor nota cu μ sau μ_i.

Lungimea scării se va nota cu L, dimensiunile nomogramei cu $L \times M$.

Variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ale funcției $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vor fi numite *variabile*, indiferent de faptul că se consideră funcția de n variabile sau ecuația

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n)=0.$$

CAPITOLUL II

NOMOGRAME PENTRU ECUAȚIILE CU DOUĂ VARIABILE

1. SCARA DUBLĂ

Pentru rezolvarea ecuațiilor cu ajutorul nomogramelor vom porni de la ecuațiile cu două variabile

$$F(z_1, z_2)=0. \qquad (1)$$

Reprezentînd variabilele prin familii de linii cotate (I, 5), vom lua pentru variabilele z_1 și z_2, familiile

$$\varphi_1(x, y, z_1)=0, \quad \varphi_2(x, y, z_2)=0, \qquad (2)$$

astfel că printr-un punct oarecare dintr-un domeniu D să treacă cîte o singură curbă din fiecare familie. Afară de această restricție, funcțiile φ_1 și φ_2 sînt arbitrare. In aceste condiții cele două familii formează o rețea.

Pe această rețea considerăm punctele ale căror cote satisfac ecuația (1). Ele vor determina o curbă anumită C (fig. 13), de ecuație $\Phi(x, y)=0$, care se obține din eliminarea variabilelor z_1 și z_2 între ecuațiile (1) și (2).

Acest desen cotat ne permite să rezolvăm ecuația dată cînd se cunoaște valoarea uneia din variabile. Dacă z_1' este o valoare dată a variabilei z_1, acestei valori îi corespunde o anumită curbă din familia z_1. Această curbă intersectează

linia C într-un punct M. Cota z_2 a curbei din familia z_2, care trece prin M, este valoarea căutată. Curba C poate fi intersectată în mai multe puncte de linia z_1 și în acest caz ecuația are mai multe soluții.

In particular, rețeaua de linii cotate poate fi chiar rețeaua carteziană,

$$x=\mu_1 z_1; \quad y=\mu_2 z_2$$

și în acest caz curba C este graficul obișnuit din geometria analitică

$$F\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right)=0.$$

Rețeaua poate fi aleasă totdeauna astfel ca să obținem pentru curba C o curbă dată dinainte (de obicei, o dreaptă sau un cerc), ceea ce rezultă din faptul că funcțiile φ_1 și φ_2 sînt oarecare.

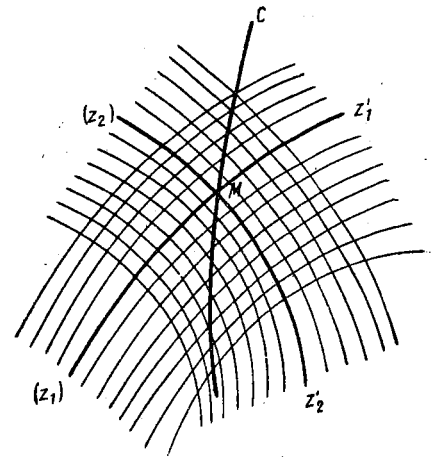


Fig. 13

Pentru utilizarea desenului nu este nevoie să construim liniile cotate decît în vecinătatea curbei C. Desenînd porțiuni de curbe dintr-o familie pe o parte a curbei C și din cealaltă familie pe cealaltă parte, vom obține două scări cu același suport. Acest nou desen este nomograma cea mai simplă, *scara dublă*. Fiecare din punctele scării are două cote care verifică ecuația dată.

Putem ajunge mai simplu la o scară dublă rectilinie pentru ecuațiile cu două variabile.

Dacă construim graficul cartezian

$$F\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right)=0$$

și considerăm un punct M variabil pe acest grafic, proiecțiile acestui punct pe axa Oy, cotate cu valorile abscisei lui, vor constitui pe această axă scara dată de formula

$$y=\mu_2 \varphi(z_1),$$

unde

$$z_2=\varphi(z_1)$$

este forma explicită a ecuației (1). Trecînd pe cealaltă parte a axei Oy scara regulată (fig. 14)

$$y=\mu_2 z_2,$$

am obținut pe axa Oy *scara dublă* a ecuației (1).

De aici rezultă procedeul practic de construit scara dublă a unei ecuații cu două variabile.

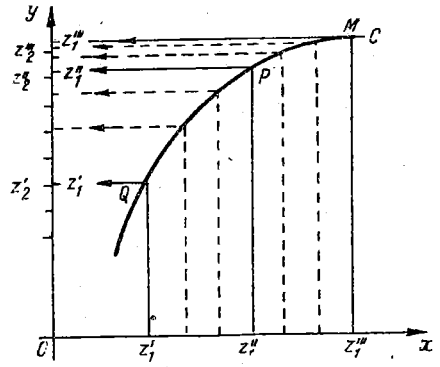


Fig. 14

Pe o axă oarecare u se construiesc scările

$$u=\mu z_1, \quad u=\mu f(z_2)$$

sau

$$u=\mu\varphi(z_1), \quad u=\mu\psi(z_2),$$

după cum ecuația (1) a fost pusă sub formele

$$z_1=f(z_2)$$

sau

$$\varphi(z_1)=\psi(z_2)$$

și se reprezintă de o parte scara variabilei z_1 și de cealaltă parte scara variabilei z_2.

2. EXEMPLE

1. In geodezie se folosește formula

$$f=0{,}42\frac{S^2}{R},$$

care dă corecția de curbură și refracție, cu ajutorul distanței S de la punctul observat, în metri: $R=6\,370$ km este raza pămîntului.

Luînd pentru S intervalul (400, 2 000) și lungimea scării de 150 mm, vom determina modulul scării după formula (3) (cap. I):

$$\mu=\frac{L}{f_{2\,000}-f_{400}}\approx 600 \text{ mm}.$$

In acest caz, ecuațiile scărilor nomogramei sînt

$$u=600\cdot f; \quad u=600\cdot 0{,}42\,\frac{S^2}{R}.$$

Ele sînt construite în fig. 15. Exemplu: $S=1\,600$ m, $f=0{,}172$ m.

2. Pentru calcularea unghiurilor de refracție a liniilor magnetice avem formula

$$\operatorname{tg}\alpha_1=n\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Să construim scara dublă a acestei ecuații pentru indicele de refracție $n=1{,}5$ și intervalul de variație al unghiurilor (0°, 90°). Nu putem folosi for-

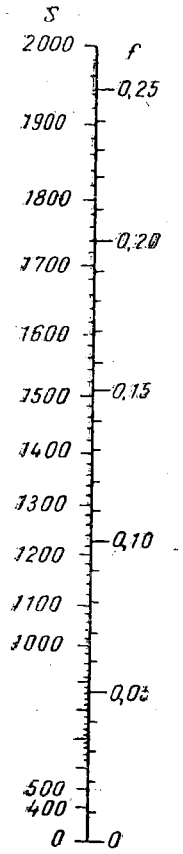


Fig. 15

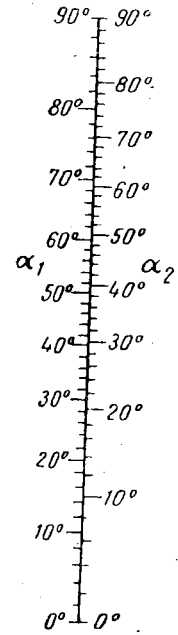


Fig. 16

mula sub această formă pentru că ne conduce la scări cu lungimea infinită. Scriind-o însă sub forma

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{1}{1+1{,}5\operatorname{tg}\alpha_2}$$

și luînd lungimea scărilor de 150 mm, ecuațiile lor sînt

$$u=150\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1};\quad u=150\frac{1}{1+1{,}5\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

In fig. 16 este dat exemplul pentru

$$\alpha_1=80°,\quad \alpha_2=75°{,}2.$$

CAPITOLUL III

NOMOGRAME CU LINII COTATE PENTRU ECUAȚIILE CU TREI VARIABILE

1. GENERALITĂȚI

Ne propunem să rezolvăm cu ajutorul unei nomograme ecuația cu trei variabile

$$F(z_1, z_2, z_3)=0. \qquad (1)$$

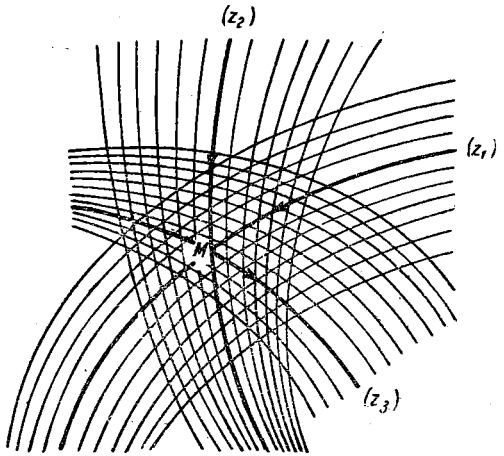


Fig. 17

Ca și în cazul precedent, reprezentăm două din variabile cu o rețea de curbe arbitrare (fig. 17) dată de ecuațiile

$$f(x, y, z_1)=0,\quad g(x, y, z_2)=0. \qquad (2)$$

Fie z_3^* o valoare fixă a lui z_3 din intervalul său de variație. Trecînd pe rețeaua (2) toate punctele corespunzătoare sistemelor

de valori z_1, z_2 și z_3^* care verifică ecuația (1), acestea vor determina o curbă C, pe care o cotăm cu valoarea z_3^* dată. Pentru mulțimea valorilor z_3 cuprinse în intervalul dat se obține o familie de curbe cu un parametru

$$h(x, y, z_3)=0. \qquad (3)$$

Ecuația (3) se obține din ecuațiile (1) și (2) prin eliminarea variabilelor z_1 și z_2.

Din construcția făcută rezultă utilizarea desenului pentru rezolvarea ecuației (1). Fiind dat un sistem de valori z_1, z_2, curbele care poartă cotele z_1 și z_2 determină un punct M (fig. 17). Cota liniei fiind familia (z_3), care trece prin acest punct, alcătuiește împreună cu sistemul de valori z_1, z_2, date, o soluție a ecuației (1) (operația indicată necesită de cele mai multe ori interpolări vizuale între curbele familiilor).

Deoarece pentru fiecare sistem de valori z_1, z_2 și z_3 ce satisfac ecuația (1) corespund trei linii concurente, desenul se numește *nomogramă cu întretăieri, nomogramă cu linii concurente* sau *nomogramă cu rețele.*

Fiind dată ecuația (1), oricînd este posibilă găsirea ecuațiilor (2) și (3). Operația prin care se determină cele trei ecuații $f=0$, $g=0$ și $h=0$, poartă numele de *disjuncția variabilelor.*

Primele nomograme de acest fel au fost obținute cu ajutorul disjuncției

$$x=\mu_1 z_1,\quad y=\mu_2 z_2,\quad F\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right)=0;$$

ele sînt formate dintr-o rețea carteziană regulată pe care este așezată familia de curbe z_3 (după cum am arătat în cap. I, 4).

Ultima familie de curbe poate fi considerată ca proiecția liniilor de nivel ale suprafeței $F(x, y, z)=0$ pe planul xOy.

Cea mai veche nomogramă carteziană a fost folosită de *L. Pouchet* în *„Aritmétique lineaire"* (Rouen, 1795).

Exemple. 1. Să se construiască nomograma ecuației

$$z^3+pz^2+q=0$$

cu dimensiunile 200×150 mm și cu intervalele de variație pentru p (0, 20), iar pentru q (200, 4 000). Folosind disjuncția

$$x=\mu_1 p,\quad y=\mu_2 q,\quad \frac{y}{\mu_2}+\frac{x}{\mu_1}z^2+z^3=0,$$

găsim pentru module $\mu_1=7{,}5$ mm, $\mu_2=0{,}05$ mm. Nomograma este reprezentată în fig. 18.

2. Pentru calcularea lungimii pendulului fizic redus avem formula

$$l=e+\frac{i^2}{2},$$

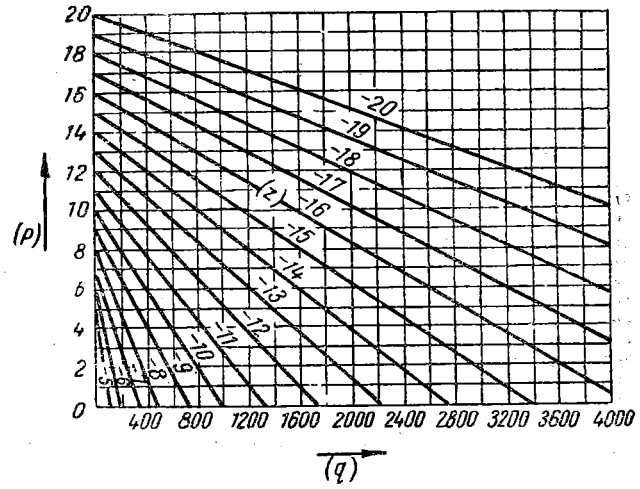


Fig. 18

unde e este distanta centrului de greutate la centrul de rotație, iar i este raza de giratie. Construim o nomogramă de dimensiuni $L=100$ mm și $M=50$ mm pentru această formulă, cu următoarele intervale de variație pentru e și

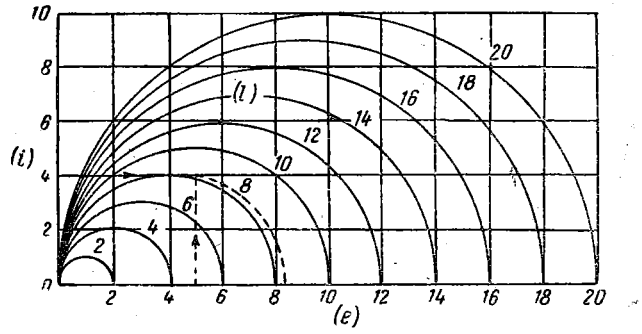


Fig. 19

i: (0, 20) respectiv (0, 10). Luînd pentru e și i rețeaua carteziană regulată, găsim pentru l un fascicul de cercuri

$$x=\mu e,\quad y=\mu l,\quad y^2+x^2-\mu l x=0.$$

Pe fig. 19 se vede exemplul $i=4$, $e=5$, $l=8{,}2$.

2. PROBLEMA ANAMORFOZEI

La multe ecuații cu trei variabile, folosirea rețelei carteziene regulate ne conduce la familii de curbe complicate pentru variabila a treia, lucru ce îngreunează folosirea nomogramei. La nomogramele utilizate pînă acum, două din familiile de linii sînt fascicule de drepte paralele cu axele de coordonate și echidistante. Dacă renunțăm la echidistanță și păstrăm mai departe paralelismul cu axele de coordonate (rețeaua funcțională de coordonate), se poate întîmpla ca și cea de a treia familie de linii să fie formată din drepte.

De exemplu, pentru ecuația

$$\gamma=\alpha\beta,$$

folosind rețeaua funcțională logaritmică

$$x=\mu_1 \lg \alpha,\quad y=\mu_2 \lg \beta,$$

avem pentru familia

$$\frac{x}{\mu_1}+\frac{y}{\mu_2}=\lg \gamma,$$

un fascicul de drepte paralele (fig. 20).

Observație. Hîrtia cu rețea logaritmică și semilogaritmică ($x=\mu_1\alpha$, $y=\mu_2 \lg \beta$) se folosește ca și hîrtia milimetrică obișnuită (fig. 21, *a*, *b*).

Pentru rezolvarea ecuației

$$z_3=az_1^2+bz_2^3.$$

folosind rețeaua carteziană regulată, pentru variabila z_3 se obține o familie de cubice greu de construit și greu de utilizat

$$z_3=ax^2+by^3,$$

pe cînd, făcînd disjuncția cu o rețea funcțională

$$x=\mu_1 z_1^2,\quad y=\mu_2 z_2^3,$$

familia de linii cotate z_3 este alcătuită din drepte paralele

$$z_3=\frac{a}{\mu_1}x+\frac{b}{\mu_2}y,$$

ușor de construit și mînuit.

Se pune întrebarea care este ecuația cu trei variabile cea mai generală, care poate fi rezolvată cu o nomogramă cartezіană formată din linii cotate drepte. Deoarece nomograma

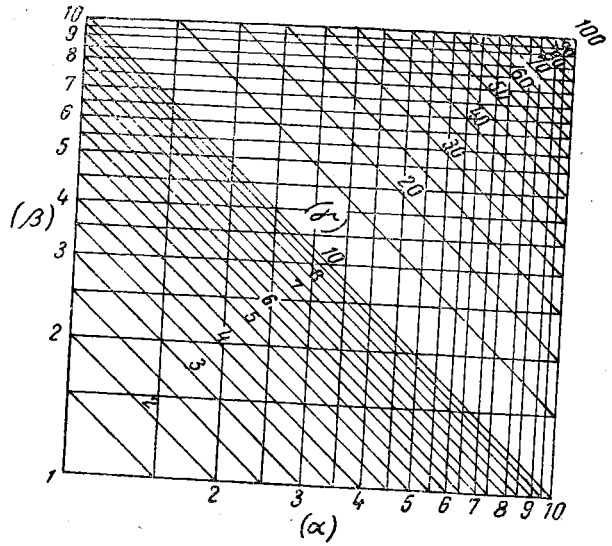


Fig. 20

carteziană conține două familii de drepte paralele (rețeaua carteziană regulată sau funcțională), urmează că familia corespunzătoare celei de a treia variabile trebuie să fie familie de drepte. Pentru aceasta, ecuația

$$F(z_1,\ z_2,\ z_3)=0, \tag{1}$$

după transformarea

$$x=f_1(z_1),\quad y=f_2(z_2), \tag{a}$$

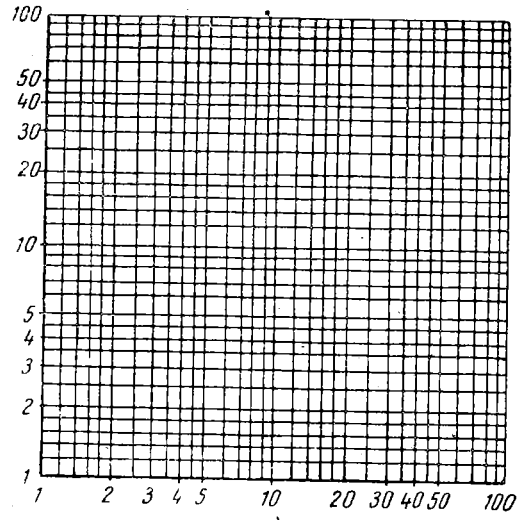
trebuie să devină liniară în x și y, adică să fie de forma

$$Ax+By+C=0,$$

unde A, B, C sînt funcții de variabila z_3. Notînd

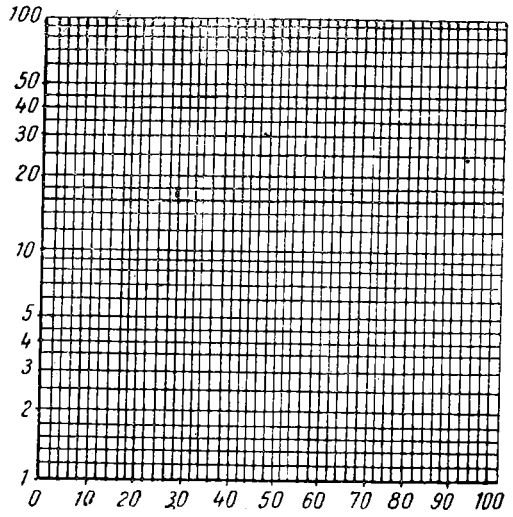
$$A=f_3(z_3),\quad B=g_3(z_3)\quad \text{și}\quad C=h_3(z_3),$$

avem:



a)

Fig. 21 *a*



b)

Fig. 21 *b*

Cea mai generală ecuație cu trei variabile care se poate rezolva printr-o nomogramă carteziană cu linii cotate drepte este ecuația lui Cauchy:

$$f_1(z_1)f_3(z_3)+f_2(z_2)g_3(z_3)+h_3(z_3)=0. \tag{4}$$

Transformările (a) se numesc *ecuații de anamorfoză* sau *anamorfoză*.

Se poate întîmpla ca pe lîngă transformarea (a) să existe și o altă transformare

$$x=f_1^*(z_1),\quad y=f_2^*(z_2), \tag{a*}$$

prin care ecuația (1) devine liniară în x și y. Două anamorfoze (a) și (a*) se numesc egale, dacă avem

$$f_1^*(z_1)=m_1f_1(z_1)+n_1,$$
$$f_2^*(z_2)=m_2f_2(z_2)+n_2,$$

unde m_1, n_1, m_2 și n_2 sînt constante. In caz contrar, cele două anamorfoze (a) și (a*) se numesc *distincte*. Interpretarea geometrică a acestor noțiuni este imediată: nomogramele corespunzătoare anamorfozelor egale se obțin una din alta printr-o transformare afină; cele corespunzătoare anamorfozelor distincte nu se pot deduce una din alta printr-o astfel de transformare.

Nu totdeauna ecuația (1) se poate aduce la forma (4) și de multe ori chiar dacă este posibilă această transformare, ea nu rezultă ușor. Din această cauză se impune problema de a recunoaște dacă o ecuație cu trei variabile se poate reprezenta prin ecuația lui Cauchy și a găsi ecuațiile de disjuncție. Pentru acest scop vom demonstra următoarea teoremă.

Condiția necesară și suficientă ca ecuația

$$F(z_1,z_2,z_3)=0 \tag{1}$$

să se poată scrie sub forma

$$f_1f_3+f_2g_3+h_3=0 \tag{4}$$

este

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}:\frac{\partial F}{\partial z_2}=M(z_1)N(z_2)P(z_3). \tag{5}$$

Condiția este necesară. Presupunem că ecuația (1) se poate scrie sub forma (4), adică ecuațiile (1) și (4) sînt echivalente.

Prin diferențiere obținem:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial F}{\partial z_2}dz_2+\frac{\partial F}{\partial z_3}dz_3=0,\\ f_1'f_3\,dz_1+f_2'g_3\,dz_2+(f_1f_3'+f_2g_3'+h_3')\,dz_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Din ecuația echivalenței ecuațiilor (1) și (4) cele două relații (6) exprimă aceeași legătură între dz_1, dz_2, dz_3. Rezultă proporționalitatea coeficienților lui dz_1, dz_2 și dz_3:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{f_1'f_3}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{f_2'g_3}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z_3}}{f_1f_3'+f_2g_3'+h_3'}. \tag{7}$$

Din prima egalitate deducem

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}:\frac{\partial F}{\partial z_2}=\frac{f_1'}{f_2'}\frac{f_3}{g_3}=f_1'\cdot\frac{1}{f_2'}\cdot\frac{f_3}{g_3}, \tag{8}$$

adică condiția (5) $\left(M=f_1',\ N=\frac{1}{f_2'},\ P=\frac{f_3}{g_3}\right)$.

Condiția este suficientă. Condiția (5) fiind îndeplinită, folosim transformarea de variabile

$$\left.\begin{aligned}x=\int M(z_1)\,dz_1=f_1(z_1),\\ y=\int\frac{dz_2}{N(z_2)}=f_2(z_2)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

și ecuația (1) devine în noile variabile

$$\Phi(x,y,z_3)=0. \tag{10}$$

Pentru z_3 fix, această ecuație definește pe y ca o funcție de x și, ținînd seama de (9), avem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz_2}}{\frac{dx}{dz_1}}\cdot\frac{dz_2}{dz_1}=\frac{1}{M(z_1)N(z_2)}\cdot\frac{dz_2}{dz_1};$$

dar pentru z_3 fix din ecuația (1) avem

$$\frac{dz_2}{dz_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}},$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{M(z_1)\,N(z_2)} \cdot \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_2}}.$$

Ţinînd seamă de (5), găsim:

$$\frac{dy}{dx} = -P(z_3). \tag{11}$$

Astfel, ecuaţia (10) defineşte pe y ca o funcţie *liniară* de x (pentru z_3 fix). Prin urmare, ecuaţia (10) este echivalentă cu

$$f_3 x + g_3 y + h_3 = 0,$$

unde f_3, g_3 şi h_3 sînt funcţii de z_3. Avînd în vedere (9), găsim condiţia (4).

In partea a doua a demonstraţiei *am găsit şi ecuaţiile de anamorfoză, care se scriu sub forma* (9).

Prin modificări evidente ale raţionamentului de mai sus, găsim:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia (1) *să se poată scrie sub forma*

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0 \tag{12}$$

este

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2} = M(z_1)\,N(z_2). \tag{13}$$

Condiţia (13) este restricţia condiţiei (5) $[P(z_3) \equiv \text{const}]$. Ea se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \ln\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2}\right) = 0, \tag{13'}$$

cunoscută sub numele de condiţia lui Saint-Robert [1]).

In cazul ecuaţiei (12), respectiv în cazul condiţiei (13) sau (13'), nomograma carteziană corespunzătoare ecuaţiei este formată din familii de drepte paralele. Acest lucru rezultă din (11), în care avem $P(z_3) = \text{const}$.

[1]) In condiţia (13'), $\dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}$ se aplică unei funcţii de z_1 şi z_2; prin (1) z_3 depinde de variabilele independente z_1 şi z_2. *P. de Saint-Robert*, Mem. della R. Acad. di Sc. Torino, t 25, 1871, p. 53.

Exemplu. Să se constate dacă pentru ecuaţia

$$z_1 z_2 z_3 + 2z_1 z_2 + 3z_2 z_3 + z_1 z_3 + 2z_1 + 6z_2 + z_3 + 1 = 0$$

se poate construi o nomogramă carteziană cu drepte cotate şi în caz afirmativ să se găsească ecuaţiile de disjuncţie.

Condiţia (5) ne dă

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2} = \frac{z_2 z_3 + 2z_2 + z_3 + 2}{z_1 z_3 + 2z_1 + 3z_3 + 6} = \frac{z_2 + 1}{z_1 + 3}$$

şi arată că sîntem în cazul condiţiei lui Saint-Robert. Nomograma corespunzătoare se compune din trei familii de drepte paralele. Anamorfoza este dată de [v. (9)]:

$$x = \int \frac{dz_1}{z_1 + 3} = \ln(z_1 + 3),$$

$$y = \int \frac{dz_2}{z_2 + 1} = \ln(z_2 + 1)$$

şi deci ecuaţia dată se pune sub forma

$$\ln(z_1 + 3) + \ln(z_2 + 1) = \ln\frac{2z_3 + 5}{z_3 + 2}.$$

In legătură cu numărul anamorfozelor posibile putem demonstra teorema.

O ecuaţie care admite două anaformoze distincte este neapărat de forma

$$f_1 f_2 = f_3 \tag{14}$$

şi atunci are o infinitate de anamorfoze,

Presupunem că ecuaţia (1) admite pe lîngă anamorfoza (9) şi anamorfoza

$$x = \varphi_1(z_1), \quad y = \varphi_2(z_2).$$

In acest caz, ţinînd seama de cele două anamorfoze, avem din condiţia (8)

$$M(z_1)\,N(z_2)\,P(z_3) = f_1' \cdot \frac{1}{f_2'} \cdot \frac{f_3}{g_3} = \varphi_1' \cdot \frac{1}{\varphi_2'} \cdot R(z_3) \tag{15}$$

o relaţie între variabilele z_1, z_2 şi z_3. Variabilele z_1, z_2 şi z_3 fiind presupuse că îndeplinesc numai relaţia (1), rezultă că trebuie ca (15) să fie echivalentă cu (1). Punînd

$$\frac{M(z_1)}{\varphi_1'(z_1)} = f_1, \quad N(z_2)\,\varphi_2'(z_2) = f_2 \quad \text{şi} \quad \frac{P(z_3)}{R(z_3)} = f_3,$$

relaţia (15) se scrie sub forma (14).

Că această ecuație (14) admite o infinitate de anamorfoze rezultă din faptul că este echivalentă cu

$$f_1^n \cdot f_2^n = f_3^n.$$

Anamorfozele sînt date de formulele

$$x = -\frac{1}{nf_1^n}, \quad y = \frac{f_2^n}{n}.$$

Observație. Ecuația (12) se poate scrie sub forma (14):

$$e^{f_1(z_1)} \cdot e^{f_2(z_2)} = e^{-f_3(z_3)},$$

și ecuația (14) se poate scrie sub forma (12):

$$\ln f_1(z_1) + \ln f_2(z_2) = \ln f_3(z_3).$$

Deci și ecuația (14) satisface condiția lui Saint-Robert.

3. PROBLEMA GENERALĂ A ANAMORFOZEI

Am văzut că pentru orice ecuație cu trei variabile se poate construi o nomogramă cu linii cotate concurente dintre care două familii sînt arbitrare. Ele pot fi alese familii de drepte. Aceste familii de drepte se aleg în așa fel ca familia a treia de linii să fie cît mai simplă. Astfel la pct. 2 am căutat ca și a treia familie să fie formată din drepte, dar acolo primele două familii au fost supuse la condiția de a fi paralele cu axele de coordonate. Acum părăsim această restricție.

Pentru ecuația

$$k^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) + p\left(k\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

întîlnită în rezistența materialelor, se poate construi o nomogramă formată din două familii de drepte și o familie de cercuri. Ecuațiile de disjuncție sînt

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x, \quad ky = \frac{x}{3} - k^2, \quad x^2 + y^2 - px = 0.$$

Luînd pentru φ și p intervalele (20°; 45°) și (0,4; 1) se obține nomograma din fig. 22.

Deoarece atît construcția cît și utilizarea nomogramelor cu linii cotate oarecare prezintă dificultăți, s-a căutat să se stabilească clase de ecuații care se pot reprezenta prin nomograme cu familii de drepte și nomograme cu familii de cercuri.

Vom cerceta care tipuri de ecuații se pot rezolva cu nomograme care conțin două familii de drepte și o familie de cercuri. Pentru astfel de ecuații, disjuncția variabilelor este dată de relațiile

$$f_1 x + g_1 y + h_1 = 0,$$

$$f_2 x + g_2 y + h_2 = 0,$$

$$\varphi_3(x^2+y^2) + f_3 x + g_3 y + h_3 = 0.$$

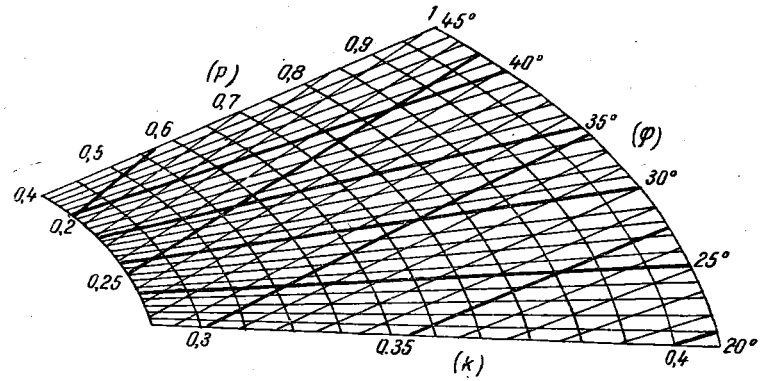


Fig. 22

Eliminînd pe x și y din cele trei ecuații, obținem forma sub care se prezintă ecuațiile de acest tip:

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3^* & g_3^* & h_3^* \end{vmatrix} = 0.$$

Amintim că printre ecuațiile care intră în această categorie sînt ecuațiile de gradul al doilea în f_1, f_2 și f_3:

$$\sum A_i f_i^2 + 2\sum B_i f_j f_k + 2\sum C_i f_i + D = 0, \qquad (i,j,k = 1,2,3).$$

Mult mai importante decît acestea și mult mai întîlnite în practică sînt ecuațiile care se rezolvă cu ajutorul nomogramelor formate din familii de drepte cotate.

Pentru ca ecuația (1) *să poată fi rezolvată cu ajutorul unei nomograme cu drepte cotate este necesar și suficient ca această ecuație să se poată pune sub forma*

$$F_{123}=\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

Dacă ecuația (1) admite o nomogramă cu drepte cotate, atunci familiile cotate au ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} f_1x+g_1y+h_1=0,\\ f_2x+g_2y+h_2=0,\\ f_3x+g_3y+h_3=0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Prin eliminarea variabilelor x și y obținem ecuația (16). Să arătăm acum că dacă ecuația (1) este echivalentă cu (16), atunci ea se poate rezolva printr-o nomogramă cu trei familii de drepte cotate. Să considerăm dreptele date de ecuațiile (17). Fie z_1, z_2, z_3 un sistem de valori care verifică (1); atunci verifică și (16), deci dreptele familiilor considerate, corespunzătoare cotelor z_1, z_2, z_3, sînt concurente [(16) este condiția ca dreptele (17) să fie concurente]. Prin urmare, sistemul format din cele trei familii de drepte (17) formează nomograma ecuației (1).

Ecuația lui Cauchy, care se rezolvă prin nomograma cartesiană formată din drepte cotate, apare ca un caz particular.

Exemplu. Ecuația de forma

$$f_1f_2f_3+f_1+f_2+f_3+A=0$$

se poate pune sub forma (16). In adevăr, făcînd transformările

$$x=f_1f_2,\quad y=f_1+f_2,$$

obținem disjuncția

$$f_3x+y+f_3+A=0,$$

$$x-yf_1-f_1^2=0,$$

$$x-yf_2-f_2^2=0,$$

care conduce la ecuația (16):

$$\begin{vmatrix} f_3 & 1 & f_3+A \\ 1 & -f_1 & -f_1^2 \\ 1 & -f_2 & -f_2^2 \end{vmatrix}=0.$$

Conditia ca o ecuație cu trei variabile să se poată scrie sub forma (16) nu este ușor de stabilit. Găsirea ei constituie o problemă fundamentală în nomografie și este cunoscută sub numele de *problema generală a anamorfozei*. Asupra ei vom reveni la studiul nomogramelor cu puncte aliniate (cap. IV).

4. TIPURI PARTICULARE DE NOMOGRAME CU FAMILII DE DREPTE COTATE

a) **Nomograme formate din trei fascicule de drepte cu centrele în trei puncte coliniare.** Presupunem că fasciculele cu centrele în A, B și C (fig. 23) reprezintă variabilele z_1, z_2

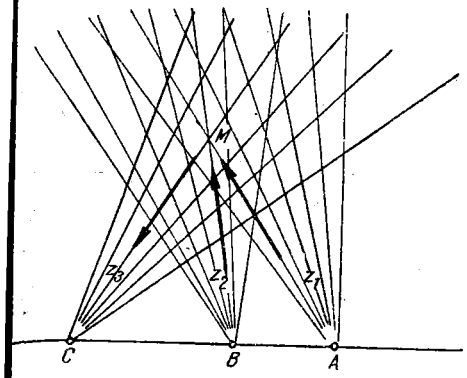


Fig. 23

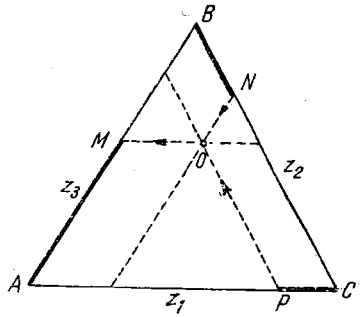


Fig. 24

și z_3. Luînd un sistem de axe rectangulare cu originea în C și avînd CA ca axă x, ecuațiile fasciculelor se scriu

$$y=(x-a)f_1,\quad y=(x-b)f_2,\quad y=f_3x. \qquad (18)$$

Ecuația care se rezolvă cu această nomogramă se obține eliminînd variabilele x și y din (18):

$$F_{123}=\begin{vmatrix} f_1 & af_1 & 1 \\ f_2 & bf_2 & 1 \\ f_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

sau

$$F_{123}=(b-a)f_1f_2+af_1f_3-bf_2f_3=0.$$

Prin notațiile

$$\varphi_1=-\frac{b}{f_1},\quad \varphi_2=\frac{a}{f_2},\quad \varphi_3=\frac{b-a}{f_3}$$

ecuația ia forma simplă

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=0.$$

Un caz mai particular al acestor nomograme îl constituie *nomograma triunghiulară*, în care A, B, C sînt aruncate la infinit, adică fasciculele sînt paralele și dreptele din două fascicule diferite formează unghiuri de 60°. Utilizarea acestei nomograme rezultă simplu dintr-o proprietate a triunghiurilor echilaterale. Considerăm un punct O în interiorul triunghiului și ducem prin el paralele la laturile triunghiului echilateral. Din fig. 24 se vede că

$$AM+BN+CP=AB=BC=CA=a.$$

Dacă punem $AM=f_1$, $BN=f_2$ și $CP=f_3$, atunci nomograma rezolvă ecuațiile de forma

$$f_1+f_2+f_3=a.$$

b) **Nomograme formate din fascicule cu centrele în vîrfurile unui triunghi.** Pentru a găsi ecuația care se rezolvă cu această nomogramă vom caracteriza dreptele fasciculului, nu prin coeficientul lor unghiular, cum am făcut la primul exemplu,

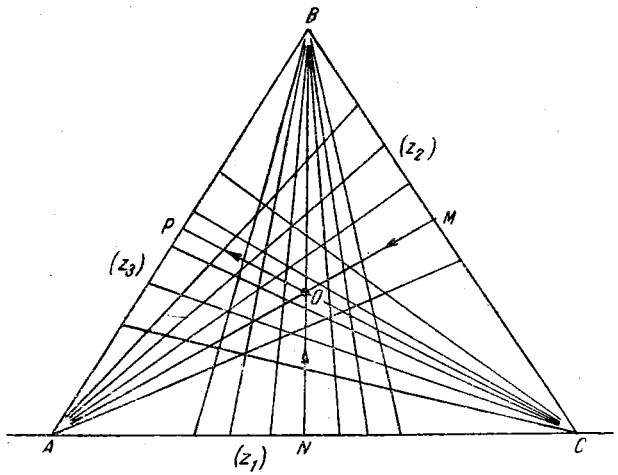


Fig. 25

ci prin scara pe care o determină pe latura opusă. Considerînd trei drepte corespunzătoare valorilor z_1, z_2, z_3 care verifică ecuația (fig. 25), teorema lui Ceva ne dă

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BP}{PA}=1.$$

Notînd

$$\frac{AN}{NC}=f_1,\quad \frac{CM}{MB}=f_2 \text{ și } \frac{BP}{PA}=f_3,$$

obținem ecuația

$$f_1f_2f_3=1.$$

Scările construite pe laturile triunghiului sînt scări proiective ale scărilor funcțiilor f_1, f_2 și f_3. În adevăr, din relațiile de mai sus rezultă

$$AN=\frac{bf_1}{1+f_1},\quad CM=\frac{af_2}{1+f_2},\quad BP=\frac{cf_3}{1+f_3},$$

unde

$$AB=c,\quad BC=a,\quad AC=b.$$

CAPITOLUL IV

NOMOGRAME CU PUNCTE ALINIATE PENTRU ECUAȚIILE CU TREI VARIABILE

1. GENERALITĂȚI

Nomograma arătată în cap. I, 3 se poate generaliza luînd scări curbilinii în loc de scări rectilinii.

Reprezentăm variabilele z_1, z_2, z_3 prin scările

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(z_1),\\ y&=g_1(z_1);\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=f_2(z_2),\\ y&=g_2(z_2);\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=f_3(z_3),\\ y&=g_3(z_3).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Luăm o dreaptă care intersectează cele trei scări respectiv în punctele P, Q, R (fig. 26). Între cotele acestor trei puncte avem o relație, care se obține scriind condiția analitică de coliniaritate a punctelor P, Q, R:

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1\\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1\\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1\end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Nomograma din fig. 26 se numeşte *nomogramă cu puncte aliniate*: ea a fost imaginată de fondatorul nomografiei Maurice d'Ocagne.

Dacă o ecuaţie dată este chiar de forma (4), atunci rezolvarea ei grafică se poate obţine construind o nomogramă ale cărei scări se stabilesc după ecuaţiile (1), (2), (3), în care funcţiile f_i şi g_i sînt elementele determinantului dat.

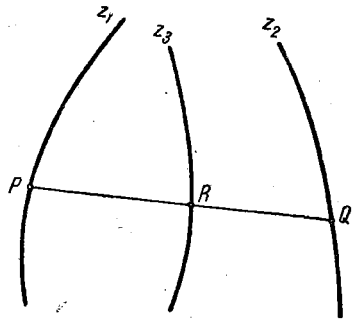


Fig. 26

Dacă o ecuaţie dată

$$F(z_1, z_2, z_3)=0 \qquad (5)$$

nu este de forma (4), atunci se caută o ecuaţie echivalentă de forma (4).

Pentru ca ecuaţia (5) *să poată fi rezolvată cu ajutorul unei nomograme cu puncte aliniate este necesar şi suficient ca această ecuaţie să se poată pune sub forma* (4).

Simplitatea utilizării, cum şi exactitatea rezultatelor obţinute prin folosirea acestei nomograme, în comparaţie cu nomogramele cu reţele, i-au dat o foarte mare răspîndire. In adevăr, fiind date valorile z_1 şi z_2 se pot determina cu mai multă exactitate punctele P, Q, R, care au aceste cote, deoarece se face o interpolare între puncte şi nu între cote. Determinarea punctului R se face destul de precis ca o intersecţie a unei drepte cu o curbă. Pentru aceasta se foloseşte fie marginea unei rigle, fie un transparent pe care este trasată o dreaptă fină, fie un fir întins.

Deşi clasa ecuaţiilor rezolvabile prin nomograme cu puncte aliniate teoretic este restrînsă, totuşi marea majoritate a ecuaţiilor folosite în practică sînt de această formă.

O ecuaţie care se rezolvă cu o nomogramă cu puncte aliniate este echivalentă cu ecuaţia (4), iar o ecuaţie care se rezolvă cu o nomogramă cu linii cotate drepte este echivalentă cu ecuaţia (16) din cap. III, 3. Aceste două ecuaţii sînt numai aparent diferite, căci ecuaţia (16) din cap. III, 3 se poate aduce la forma (4), împărţind elementele liniilor cu elementele coloanei a treia. Deci, *ecuaţiile rezolvabile prin nomograme cu puncte aliniate sînt aceleaşi cu ecuaţiile rezolvabile prin nomograme cu linii cotate drepte.*

Legătura intimă între aceste două feluri de nomograme va fi dezvăluită în cap. VIII, 11.

Ecuaţia (4) se numeşte *ecuaţia lui Soreau*, iar membrul ei întîi, *determinantul lui Massau.*

Problema determinării ecuaţiei lui Soreau, pentru o ecuaţie dată, este aceeaşi cu problema disjuncţiei variabilelor şi deci vom încerca ca prin introducerea variabilelor auxiliare x şi y să determinăm trei ecuaţii liniare în x şi y, care conţin numai cîte una din variabilele z_1, z_2, z_3, astfel ca prin eliminarea variabilelor auxiliare să găsim o ecuaţie echivalentă cu ecuaţia (1) dată. Exemple pentru această operaţie am întîlnit deja în cap. III, şi vor urma altele mai jos. La început vom studia nişte ecuaţii simple.

2. NOMOGRAMELE ECUAŢIEI $f_1=f_2f_3$.

In cap. I, 3 am găsit această ecuaţie, pornind de la o figură geometrică simplă. Aici vrem să încadrăm ecuaţia dată în forma generală (4). Ecuaţiile de disjuncţie pentru

$$f_1=f_2f_3 \qquad (6)$$

se găsesc imediat: punînd

$$x=f_2, \quad y=f_1$$

avem

$$y=f_3x.$$

Eliminarea variabilelor x şi y din cele trei ecuaţii ne conduce la

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ 1 & 0 & f_2 \\ f_3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad (6')$$

Ţinînd seama de proprietăţile determinanţilor, putem introduce nişte parametri, care vor permite o anumită libertate în alegerea nomogramei, care alegere se va face în aşa fel, ca erorile de utilizare să fie cele mai mici posibile (cap. VII). Inmulţind prima şi a doua coloană respectiv cu $-b$ şi $-a$ şi adunîndu-le la a treia coloană obţinem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 & -a \\ 1 & 0 & f_2 & -b \\ f_3 & -1 & a-bf_3 & \end{vmatrix}=0.$$

Inmulțind linia întîi cu μ_1 și a doua cu $-\mu_2$ și împărțind prima și a doua coloană respectiv cu $-\mu_2$ și μ_1, ecuația ia forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \mu_1(f_1-a) \\ 1 & 0 & -\mu_2(f_2-b) \\ -\frac{f_3}{\mu_2} & -\frac{1}{\mu_1} & a-bf_3 \end{vmatrix}=0.$$

Adunînd coloana a doua la prima și împărțind elementele liniilor cu elementele coloanei întîi astfel obținute, avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu_1(f_1-a) \\ 1 & 0 & -\mu_2(f_2-b) \\ 1 & \frac{\mu_2}{\mu_1 f_3+\mu_2} & \frac{\mu_1\mu_2(bf_3-a)}{\mu_1 f_3+\mu_2} \end{vmatrix}=0.$$

Inmulțind elementele coloanei a doua cu M și ale coloanei a treia cu L, avem ecuația lui Soreau sub forma finală:

$$\begin{vmatrix} 1 & M & L\mu_1(f_1-a) \\ 1 & 0 & -L\mu_2(f_2-b) \\ 1 & \frac{M\mu_2}{\mu_1 f_3+\mu_2} & \frac{L\mu_1\mu_2(bf_3-a)}{\mu_1 f_3+\mu_2} \end{vmatrix}=0.$$

Ecuațiile scărilor nomogramei sînt

$$\left.\begin{aligned} x&=M, & y&=L\mu_1(f_1-a), \\ x&=0, & y&=-L\mu_2(f_2-b), \\ x&=\frac{M\mu_2}{\mu_1 f_3+\mu_2}, & y&=\frac{L\mu_1\mu_2(bf_3-a)}{\mu_1 f_3+\mu_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ele ne permit construcția nomogramei ecuației $f_1=f_2f_3$. Fie (α_1, β_1) și (α_2, β_2) intervalele de variație ale variabilelor z_1 și z_2. Marginile superioare și inferioare exacte ale funcțiilor f_1 și f_2 în aceste intervale se notează cu A_2, A_1, respectiv B_2, B_1 și punctele corespunzătoare ale scărilor se numesc *punctele superioare* sau *inferioare* ale lor,

$$A_1 \leqq f_1 \leqq A_2, \quad B_1 \leqq f_2 \leqq B_2.$$

Parametrii a și b îi determinăm astfel ca punctele inferioare ale scărilor (z_1) și (z_2) (fig. 27) să fie pe axa Ox: adică

$$A_1-a=0, \quad B_2-b=0.$$

Lățimea nomogramei este distanța dintre cele două scări paralele, care este egală cu M. Scriind că scările variabilelor z_1 și z_2 au aceeași lungime dată L, avem

$$\mu_2 L(B_2-B_1)=\mu_1 L(A_2-A_1)=L. \qquad (8)$$

Aceste două relații determină pe $L\mu_1$, $L\mu_2$ și μ_1/μ_2. In ecuațiile (6) parametri intră numai sub aceste forme, deci ecuațiile (6) sînt complet determinate. Se înțelege că parametrii se pot determina și altfel (nu este obligatoriu ca cele două scări să aibă aceeași lungime).

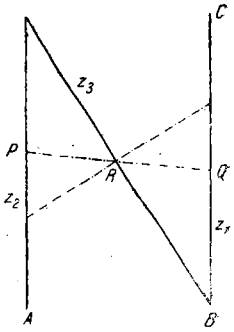


Fig. 27

Exemple. 1. Se cere construirea unei nomograme pentru formulele

$$u=l\cos\varphi,$$

$$v=l\sin\varphi$$

cu $u\geqq 0$, $v\geqq 0$, $l\leqq 1\,000$; $0°\leqq\varphi\leqq 90°$.

Luînd în cazul primei ecuații $f_1=u$, $f_2=\cos\varphi$, $f_3=l$, $M=150$ mm, $L=230$ mm, avem $A_1=B_1=a=0$, $b=\cos 0°=1$, $230=L\mu_1\cdot 1\,000$, $L\mu_1=0{,}23$, $L\mu_2=230$, $\mu_1/\mu_2=10^{-3}$. Parametrii fiind determinați, ecuațiile scărilor nomogramei sînt

Scara u: $x=150$, $y=0{,}23\,u$.

Scara φ: $x=0$, $y=-230(\cos\varphi-1)$.

Scara l: $x=\dfrac{150}{10^{-3}l+1}$, $y=\dfrac{0{,}23\,l}{10^{-3}l+1}$.

Aceeași nomogramă (fig. 28) se poate utiliza și pentru a doua formulă.

2. Formula lui Kutter din hidraulică

$$k=\frac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}},$$

unde R variază în intervalul (0,4) și m în (0,3) (fig. 29), se pune sub forma

$$\frac{100-k}{k}=\frac{m}{\sqrt{R}},$$

din care se vede că se poate construi o nomogramă cu puncte aliniate cu scările

$$u=\mu m,\ v=\mu\sqrt{R},\ w=c\,\frac{k}{100}.$$

Nomograma din fig. 27 este cunoscută sub numele de nomograma înmulțirii sau nomograma „N", sau nomograma „Z". Ea se construiește cu destulă ușurință. Scările paralele sînt regulate în f_1, respectiv f_2, iar scara diagonală este o scară proiectivă în f_3.

Cu toată simplitatea construcției, nomograma nu este utilizată decît în două cazuri: cînd funcțiile au valori în jurul lui

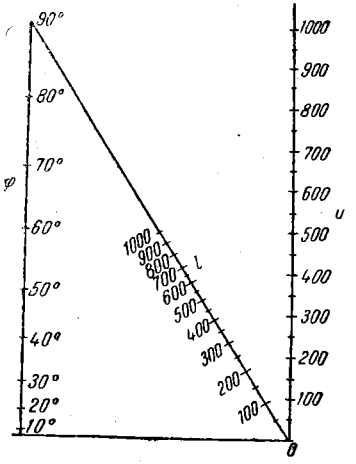


Fig. 28

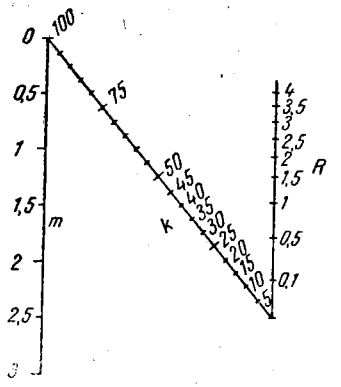


Fig. 29

zero și cînd intră în compoziția unei nomograme compuse (cap. VI). In celelalte cazuri această nomogramă se poate înlocui cu o nomogramă cu trei scări paralele (pct. 3).

Nomograma în N este un caz particular al nomogramei cu scările așezate pe laturile unui triunghi cînd unul din vîrfuri este aruncat la infinit. Acesta rezultă din următoarea transformare a determinantului (6′):

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{f_1+1} & 1 \\ \frac{1}{f_2+1} & 0 & 1 \\ \frac{f_3}{f_3-1} & \frac{1}{1-f_3} & 1 \end{vmatrix}=0$$

(am adunat elementele coloanelor întîi și a doua la coloana a treia și am împărțit cu elementele coloanei a treia), care conduce la scările

$$x=0,\quad y=\frac{1}{f_1+1},$$
$$x=\frac{1}{f_2+1},\quad y=0,$$
$$x=\frac{f_3}{f_3-1},\quad y=\frac{1}{1-f_3}.$$

Am obținut trei scări rectilinii, formînd un triunghi.

Se pot construi și alte nomograme pentru ecuația $f_1=f_2f_3$. De exemplu, scriind-o sub forma

$$(f_2+f_3)(f_2f_3-f_1)=0,$$

se găsesc ecuațiile de disjuncție

$$xf_3+yf_3^2=1,\quad y=\frac{1}{f_1},$$
$$-xf_2+yf_2^2=1.$$

Acestea conduc la ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & 1 \\ -f_2 & f_2^2 & 1 \\ f_3 & f_3^2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

care ne dă scările

$$x=0,\quad y=f_1,$$
$$x=-f_2,\quad y=f_2^2,$$
$$x=f_3,\quad y=f_3^2.$$

Nomograma acestei transformate are scările variabilelor z_2 și z_3 situate pe o parabolă, iar scara z_1 pe axa parabolei (fig. 30).

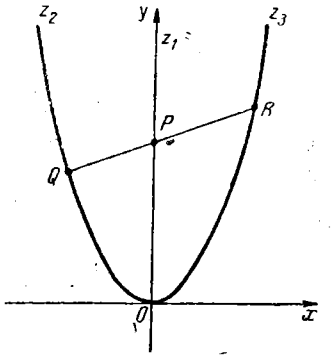


Fig. 30

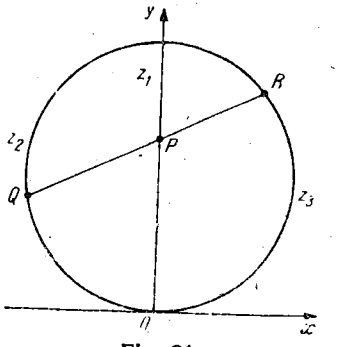


Fig. 31

Pintr-o transformare proiectivă a planului (v. cap. VIII), parabola se transformă într-o conică oarecare, iar axa ei într-o coardă. In particular, se poate obține o nomogramă cu două scări

situate pe o elipsă sau cerc și o scară pe o axă a elipsei sau un diametru al cercului. Aceste nomograme sînt foarte practice în cazul cînd intervalele de variație a două variabile sînt mari.

Ultima ecuație a lui Soreau se mai poate scrie și sub forma

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{f_1}{1+f_1} & 1 \\ \frac{-f_2}{1+f_2^2} & \frac{f_2^2}{1+f_2^2} & 1 \\ \frac{f_3}{1+f_3^2} & \frac{f_3^2}{1+f_3^2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

din care rezultă că nomograma are scările

$$x=0, \quad y=\frac{-f_1}{1+f_1},$$

$$x=\frac{-f_2}{1+f_2^2}, \quad y=\frac{f_2^2}{1+f_2^2},$$

$$x=\frac{f_3}{1+f_3^2}, \quad y=\frac{f_3^2}{1+f_3^2}.$$

Scara variabilei z_1 este pe axa Oy, iar celelalte două scări pe cercul $x^2+y^2-y=0$ (fig. 31).

Exemple. 1. In geodezie se folosește formula

$$\sin\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Ea se mai poate pune sub forma

$$\sin\gamma=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

care este de tipul (6). Din ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 0 & R\sin\gamma & 1 \\ R\sin\alpha & R\cos\alpha & 1 \\ R\sin\beta & R\cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă scările:

$$x=0, \quad y=R\sin\gamma,$$
$$x=R\sin\alpha, \quad y=R\cos\alpha,$$
$$x=R\sin\beta, \quad y=R\cos\beta.$$

Nomograma este dată în fig. 32.

2. Nomograma pentru determinarea momentului de rotație medie a unui motor, dat de formula

$$M=716{,}2\,\frac{N}{n},$$

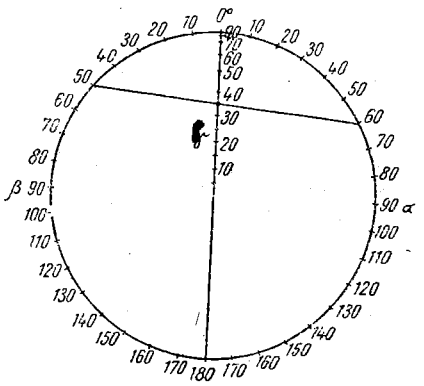


Fig. 32

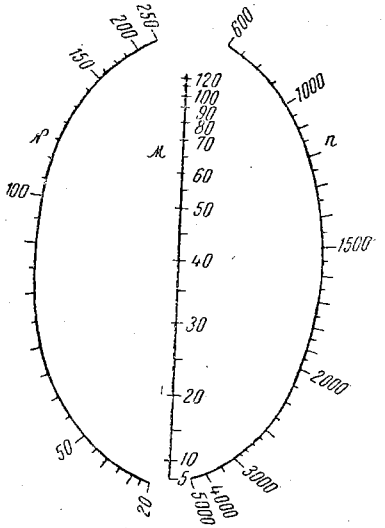


Fig. 33

unde N variază între 20 și 250, iar n între 600 și 5 000, este construită în fig. 33.

Dezvoltînd determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1^2}{1-f_1^3} & \frac{-f_1}{1-f_1^3} & 1 \\ \frac{f_2}{1+f_2^3} & \frac{f_2^2}{1+f_2^3} & 1 \\ \frac{f_3}{1+f_3^3} & \frac{f_3^2}{1+f_3^3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

obținem

$$(f_1-f_2)(f_1-f_3)(f_2-f_3)(f_1-f_2f_3)=0,$$

adică o ecuație care este verificată de toate soluțiile ecuației (6). Am găsit, prin urmare, o nouă nomogramă cu puncte aliniate pentru ecuația (6). Toate scările sînt situate pe cubica

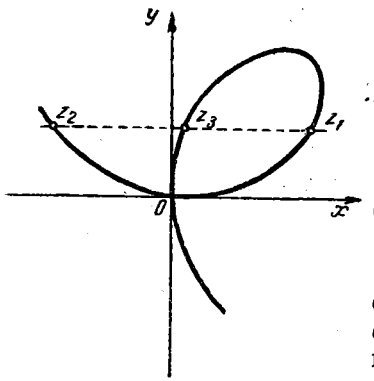


Fig. 34

$$xy=x^3+y^3$$

(foliul lui Descartes, fig. 34).

Vedem că *pentru ecuația* $f_1=f_2f_3$ *se pot construi trei tipuri diferite de nomograme cu puncte aliniate*: nomogramă cu trei scări rectilinii (în formă de triunghi sau „N"), cu două scări pe o conică și una pe o coardă a ei și nomograma cu toate scările pe o cubică cu un punct dublu.

3. NOMOGRAMELE ECUAȚIEI $f_3=f_1+f_2$

Folosind transformarea

$$x=f_1,\quad y=f_2,$$

avem

$$x+y=f_3.$$

Prin eliminarea lui x și y rezultă ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ 1 & 1 & f_3 \end{vmatrix}=0.$$

O putem transforma în mod analog cu cazul de la pct. 2, cap. IV și obținem

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu_1(f_1-a) & 1 \\ M & \mu_2(f_2-b) & 1 \\ \frac{M\mu_1}{\mu_1+\mu_2} & \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}(f_3-a-b) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Ecuațiile scărilor sînt

$$x=0,\quad y=\mu_1(f_1-a),$$
$$x=M,\quad y=\mu_2(f_2-b),$$
$$x=\frac{M\mu_1}{\mu_1+\mu_2},\quad y=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}(f_3-a-b),$$

μ_1, μ_2 și $\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ fiind modulele scărilor z_1, z_2 și z_3.

Parametrii M, μ_1, μ_2 se determină ținînd seamă de dimensiunile nomogramei.

Exemple. 1. Să construim nomograma ecuației

$$V=\frac{q_a}{c_a}+\frac{q_b}{c_b},$$

care determină volumul unui amestec de apă cu alcool, unde q_a, q_b sînt cantitățile de apă și alcool, c_a și c_b greutățile specifice: $c_a=1\,000$ kg/m³, $c_b=790$ kg/m³, iar intervalele de variație sînt pentru q_a și q_b respectiv (0, 1 000 kg) și (0, 2 000 kg). Dimensiunile nomogramei sînt 50×75 mm.

Ecuația dată este de formă $f_3=f_1+f_2$; punem

$$f_3=V,\quad f_1=\frac{q_a}{c_a},\quad f_2=\frac{q_b}{c_b}.$$

Pentru intervalele de variație date avem

$$0\leq f_1\leq 1;\quad 0\leq f_2\leq 2{,}53.$$

Luăm originele scărilor pe axa Ox și în acest caz obținem $a=b=0$, Ținînd seama de lățimea nomogramei, pentru distanța scărilor exterioare. găsim $M=50$, iar pentru module se află

$$\mu_1=75,\quad \mu_2\approx 30;\quad \mu_3=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\approx\frac{150}{7}.$$

Ecuațiile scărilor sînt

$$x=0,\quad y=75\frac{q_a}{1\,000},$$
$$x=75,\quad y=30\frac{q_b}{790},$$
$$x=\frac{225}{4},\quad y=\frac{150}{7}V.$$

Nomograma acestei formule este dată în fig. 35.

2. Să construim nomograma ecuației

$$S=4(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}),$$

folosită în geodezie, cu intervalele

$$0 \leq h_1 \leq 50, \quad 0 \leq h_2 \leq 50$$

și $\mathcal{L}=140$ mm, $M=80$ mm. Avem $\mu_1=\mu_2=\dfrac{140}{4\sqrt{50}} \approx 5$ mm. Luînd originile scărilor pe axa x, avem ecuațiile

$$x=0, \quad y=20\sqrt{h_1},$$
$$x=80, \quad y=20\sqrt{h_2},$$
$$x=40, \quad y=25S.$$

Nomograma este reprezentată în fig. 36.

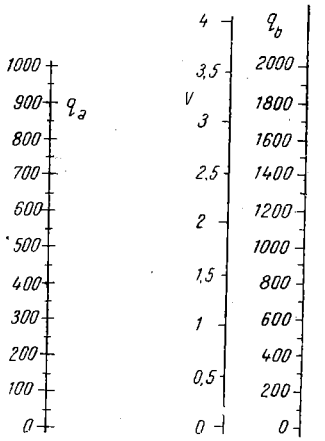


Fig. 35

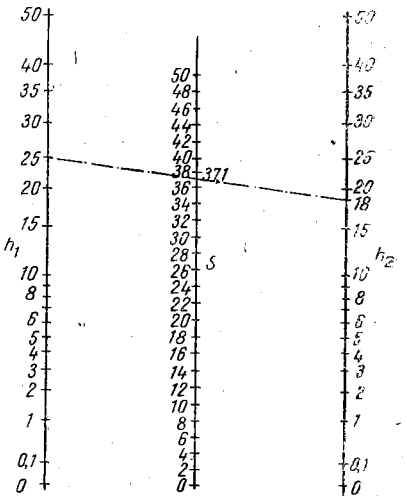


Fig. 36

Ecuația $f_3=f_1+f_2$ se poate rezolva și cu o nomogramă avînd trei scări rectilinii concurente. Acest lucru poate fi pus ușor în evidență prin operații cu elementele determinantului. Dacă f_1, f_2 și f_3 nu iau valori nule, atunci ecuația lui Soreau se poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{f_2} & 1 \\ \frac{1}{f_3} & \frac{1}{f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

din care rezultă scările

$$x=\frac{1}{f_1}, \quad y=0,$$
$$x=0, \quad y=\frac{1}{f_2},$$
$$x=\frac{1}{f_3}, \quad y=\frac{1}{f_3},$$

așezate pe trei suporți rectilinii concurenți $y=0$; $x=0$ și $y=x$.

Notînd $\varphi_i=\dfrac{1}{f_i}$, ecuația $f_3=f_1+f_2$ devine

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}=\frac{1}{\varphi_3}. \qquad (10)$$

Atunci nomograma cu scările așezate pe trei drepte concurente se poate construi folosind ecuația (9), care devine succesiv

$$\begin{vmatrix} \mu_1\varphi_1 & 0 & 1 \\ 0 & \mu_2\varphi_2 & 1 \\ \mu_1\varphi_3 & \mu_2\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1\varphi_1 & k\mu_1\varphi_1 & 1 \\ 0 & \mu_2\varphi_2 & 1 \\ \mu_1\varphi_3 & (\mu_2+k\mu_1)\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar ecuațiile scărilor

$$x=\mu_1\varphi_1, \quad y=k\mu_1\varphi_1,$$
$$x=0, \quad y=\mu_2\varphi_2,$$
$$x=\mu_1\varphi_3, \quad y=(\mu_2+k\mu_1)\varphi_3$$

Scara z_2 se află pe axa y. Notînd cu α și α' unghiurile formate de scările z_1 respectiv z_3 cu scara z_2, avem (fig. 37):

$$\operatorname{ctg}\alpha=k,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha'=k+\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Modulele scărilor sînt

$$\mu_1\sqrt{1+k^2}, \quad \mu_2, \quad \sqrt{\mu_1^2+(\mu_2+k\mu_1)^2}.$$

In cazul cînd $\alpha=120°$ şi $\alpha'=60°$, cele trei scări regulate în φ_i au acelaşi modul $\frac{2\mu_1}{\sqrt{3}}$.

Exemplu. Să rezolvăm ecuaţia

$$w^2=u^2+v^2$$

cu ajutorul unei nomograme cu trei scări concurente avînd unghiurile dintre scara interioară şi scările exterioare de 30°, iar intervalele de variaţie pentru u şi v fiind (4, 10) (fig. 38).

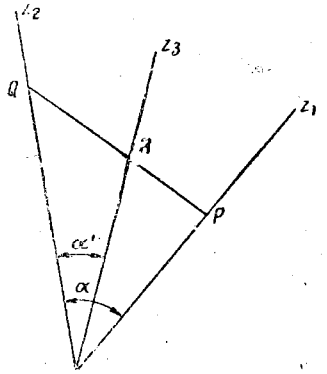


Fig. 37

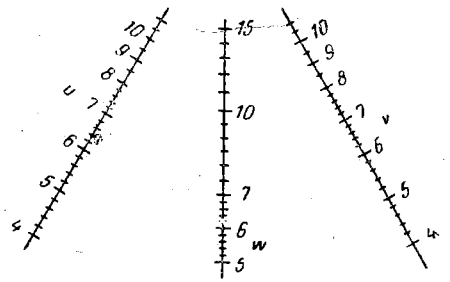


Fig. 38

Pentru a aduce ecuaţia sub forma (10) facem schimbările

$$\varphi_1=\frac{1}{u^2+a},\quad \varphi_2=\frac{1}{v^2+a},\quad \varphi_3=\frac{1}{w^2+2a}.$$

Între parametrii k, μ_1, μ_2 avem relaţiile

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=k,$$

$$\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

sau

$$k=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \mu_2=\frac{2\mu_1}{\sqrt{3}}.$$

Ecuaţiile scărilor sînt

$$x=\mu_1\frac{1}{u^2+a},\quad y=\frac{\mu_1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{u^2+a},$$

$$x=0,\quad y=\frac{2\mu_1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{v^2+a},$$

$$x=\mu_1\cdot\frac{1}{w^2+2a},\quad y=\frac{\sqrt{3}\mu_1}{w^2+2a}.$$

Dacă pentru lungimea comună a scărilor u şi v luăm $\mathcal{L}=96$ mm şi $a=40$, atunci găsim modulul

$$96=\frac{2\mu_1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{56}-\frac{1}{140}\right),$$

$$\frac{2\mu_1}{\sqrt{3}}\approx 8\,000 \text{ mm}.$$

Transformînd ecuaţia $f_3=f_1+f_2$,

sau

$$(f_1-f_2)(f_1+f_2-f_3)=0$$

$$f_1^2-f_2^2-(f_1-f_2)f_3=0$$

şi folosind disjuncţia

$$y=f_3,\quad x=f_1^2-f_1y,$$

$$x+f_2y=f_2^2,$$

se obţine ecuaţia lui Soreau

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1^2} & 1 \\ \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_2^2} & 1 \end{vmatrix}=0,$$

care conduce la o nomogramă cu două scări pe o parabolă şi una pe tangenta în vîrful parabolei (fig. 39). Ecuaţiile scărilor sînt

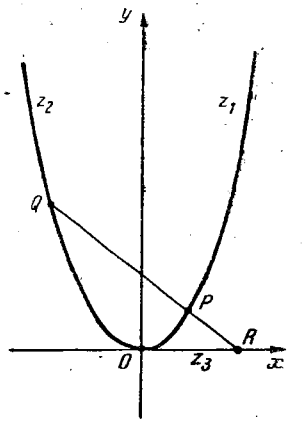


Fig. 39

$$x=\frac{1}{f_3},\quad y=0$$

$$x=\frac{1}{f_1},\quad y=\frac{1}{f_1^2}$$

$$x=\frac{1}{f_2},\quad y=\frac{1}{f_2^2}.$$

Prin operaţii cu elementele determinantului putem obţine o nomogramă cu două scări pe o conică oarecare şi a treia pe o tangentă la acea conică.

Pentru transformata

$$(f_1-f_2)(f_1-f_3)(f_2-f_3)(f_1+f_2-f_3)=0$$

se poate construi o nomogramă cu toate trei scările pe o cubică cu un punct de întoarcere.

4. NOMOGRAMELE ECUAȚIEI $f_1f_2f_3=f_1+f_2+f_3$

Folosind transformarea

$$x=f_1+f_2, \quad y=f_1f_2,$$

ecuațiile de disjuncție sînt

$$x-yf_3+f_3=0,$$

$$xf_1-y-f_1^2=0,$$

$$xf_2-y-f_2^2=0$$

și ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 & 1 \\ f_2 & f_2^2 & 1 \\ \frac{1}{f_3} & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

căreia îi corespunde o nomogramă cu două scări pe o parabolă și a treia pe o dreaptă exterioară parabolei (fig. 40). Ecuațiile scărilor sînt

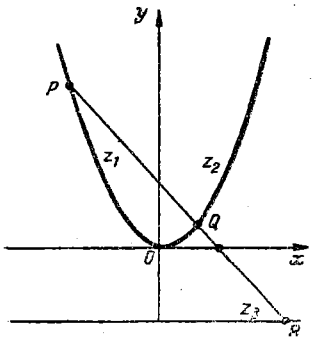


Fig. 40

$$x=f_1, \quad y=f_1^2,$$

$$x=f_2, \quad y=f_2^2,$$

$$x=\frac{1}{f_3}, \quad y=-1.$$

Prin operații asupra elementelor determinantului putem pune ecuația lui Soreau și sub forma

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{f_1^2+p^2} & \frac{f_1}{f_1^2+p^2} & 1 \\ \frac{p}{f_2^2+p^2} & \frac{f_2}{f_2^2+p^2} & 1 \\ \frac{p}{p^2-1} & \frac{1}{(p^2-1)f_3} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Nomograma corespunzătoare acestei ecuații are două scări pe cercul

$$\left(x-\frac{1}{2p}\right)^2+y^2=\frac{1}{4p^2}$$

și a treia pe

$$x=\frac{p}{p^2-1}, \quad y=\frac{1}{(p^2-1)f_3},$$

o dreaptă exterioară cercului. La fel, prin alte operații asupra elementelor determinantului, putem obține o nomogramă cu două scări pe o conică oarecare și a treia pe o dreaptă exterioară conicei.

Scriind ecuația dată sub forma

$$(f_1-f_2)(f_1-f_3)(f_2-f_3)(f_1f_2f_3-f_1-f_2-f_3)=0,$$

se poate construi o nomogramă cu toate scările pe aceeași cubică cu un punct izolat.

Prin anumite transformări transcendente, oricare dintre ecuațiile

$$f_1=f_2f_3 \qquad \text{(I)}$$

$$f_3=f_1+f_2 \qquad \text{(II)}$$

$$f_1f_2f_3=f_1+f_2+f_3 \qquad \text{(III)}$$

se poate reprezenta prin fiecare din cele opt tipuri de nomograme arătate la pct. 2, 3 și 4 din cap. IV. In adevăr, dacă în ultima ecuație punem

$$f_1=\operatorname{tg}\varphi_1, \quad f_2=\operatorname{tg}\varphi_2 \quad \text{și} \quad f_3=-\operatorname{tg}\varphi_3,$$

ea devine

$$\operatorname{tg}\varphi_3=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2),$$

adică

$$\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2+k\pi,$$

care este de forma (II).

Ecuația (I) se poate transforma într-una de forma (II) prin aplicarea logaritmilor, cum am arătat în cap. III, 2.

5. NOMOGRAMA ECUAȚIEI LUI CAUCHY

Ecuația lui Cauchy

$$f_1f_3+f_2g_3+h_3=0 \qquad (11)$$

am întîlnit-o la nomogramele cu linii cotate (cap. III, 2). Ea reprezintă relația cea mai generală între trei variabile, care

se poate rezolva cu o nomogramă carteziană, avînd o rețea funcțională. Să cercetăm acum ce fel de nomogramă cu puncte aliniate i se poate asocia.

Dacă facem transformarea

$$x=f_1,\quad y=f_2,$$

atunci obținem imediat ecuațiile de disjuncție

$$x-f_1=0,\quad y-f_2=0,$$

$$xf_3+yg_3+h_3=0.$$

Eliminarea variabilelor ajutătoare x și y ne conduc la ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ f_3 & g_3 & -h_3 \end{vmatrix}=0, \qquad (12)$$

și prin operații cu elementele determinantului putem obține ecuația lui Soreau sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_1(f_1-a) \\ 1 & M & \mu_2(f_2-b) \\ 1 & \frac{M\mu_1 g_3}{\mu_2 f_3+\mu_1 g_3} & -\frac{\mu_1\mu_2(af_3+bg_3+h_3)}{\mu_2 f_3+\mu_1 g_3} \end{vmatrix}=0. \qquad (12')$$

Această ecuație ne permite construirea unei nomograme cu două scări rectilinii și una curbilinie (fig. 41), avînd următoarele ecuații

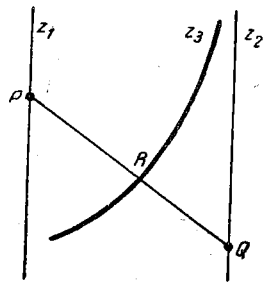


Fig. 41

$$\begin{aligned} &x=0, && y=\mu_1(f_1-a),\\ &x=M. && y=\mu_2(f_2-b),\\ &x=\frac{M\mu_1 g_3}{\mu_2 f_3+\mu_1 g_3}, && y=-\frac{\mu_1\mu_2(af_3+bg_3+h_3)}{\mu_2 f_3+\mu_1 g_3}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Parametrii a și b se determină prin fixarea originilor scărilor z_1 și z_2, parametrul M prin lățimea nomogramei, iar μ_1 și μ_2 sînt modulele scărilor rectilinii.

Porțiunea din scara z_3 necesară calculului poate fi sau între sau în afara scărilor z_1 și z_2, după cum avem inegalitățile

$$\frac{f_3}{g_3}>0 \text{ sau } \frac{f_3}{g_3}<0. \qquad (14)$$

În adevăr, pentru ca scara z_3 să fie între scările z_1 și z_2 trebuie să avem

$$0<\frac{M\mu_1 g_3}{\mu_2 f_3+\mu_1 g_3}<M$$

sau

$$0<\frac{1}{\frac{\mu_2 f_3}{\mu_1 g_3}+1}<1.$$

Rezolvînd aceste inegalități duble găsim condițiile (14).

Prin alte operații asupra determinantului (12) putem găsi scări rectilinii concurente.

In cadrul ecuațiilor de tipul lui Cauchy intră un mare număr de ecuații întîlnite în tehnică. Cel mai simplu caz este ecuația trinomă

$$z^m+pz^n+q=0.$$

Exemplu. Să construim o nomogramă pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea

$$z^2+pz+q=0.$$

cu intervalele

$$-8\leq p\leq 8,\quad -8\leq q\leq 8 \quad \text{(fig. 42).}$$

Luînd în (13)

$$p=f_1,\quad q=f_2,\quad z=f_3,\quad g_3=1,\quad h_3=z^2,$$

originile scărilor pe axa x și dimensiunile nomogramei 100×160 mm, avem

$$a=b=0;\quad M=100$$

$$\mu_1=\mu_2=\frac{160}{16}=10,$$

iar ecuațiile scărilor sînt

$$\begin{aligned} &x=0, && y=10p\\ &x=100, && y=10q\\ &x=\frac{100}{1+z}, && y=-\frac{10z^2}{1+z}. \end{aligned}$$

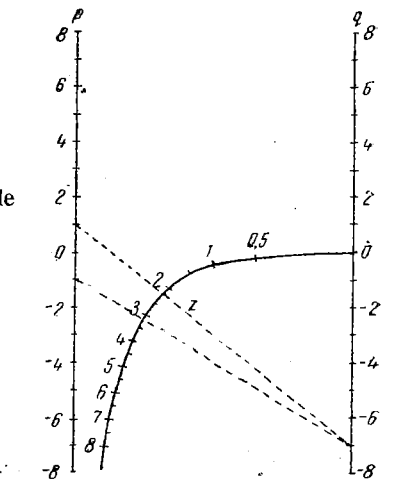


Fig. 42

Observație. Deoarece în fig. 42 scara variabilei z prezintă numai cote pozitive (partea scării z_3 cu cotele negative fiind exterioară, nu este figurată în desen), rezultă că nu putem obține cu această nomogramă decît rădăcinile pozitive ale ecuației date. Pentru obținerea rădăcinilor negative se face transformata în $-z$ și tot cu această nomogramă se pot calcula și valorile absolute ale rădăcinilor negative. Ca exemplu, pentru $p=1$, $q=-7$ găsim $z_1=2{,}2$ și $z_2=-3{,}2$.

Pentru calcularea rădăcinilor complexe trebuie construită o nouă nomogramă. Dacă rădăcinile complexe sînt

$$z_1=\alpha+i\beta,\quad z_2=\alpha-i\beta,$$

atunci

$$\alpha=-\frac{p}{2},\quad \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Pentru calcularea lui β folosim nomograma ecuației

$$\frac{p^2}{4}+\beta^2=q,$$

compusă din trei scări rectilinii concurente. Valorile lui α se citesc pe aceeași nomogramă, trecînd pe scara lui p și scara $\alpha=-\frac{p}{2}$. In fig. 43 este construită nomograma pentru intervalele

$$0\leq p\leq 5,\quad 0\leq q\leq 30,$$

Ca exemplu, pentru $p=1$, $q=4$, obținem $z=-0{,}5\pm 1{,}9i$.

Pentru ecuațiile de gradul al treilea sub forma redusă

$$z^3+pz+q=0$$

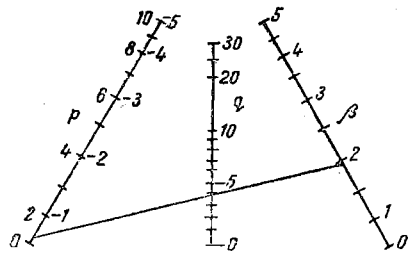


Fig. 43

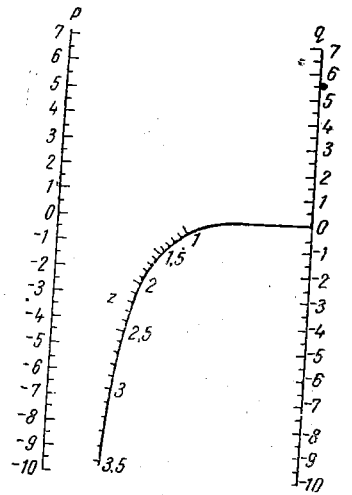


Fig. 44

se poate construi o nomogramă analogă (fig, 44). In cazul cînd are două rădăcini complexe se calculează mai întîi rădăcina reală și apoi împărțind cu $z-z_1$ noua ecuație de gradul al doilea, se rezolvă ca în cazul de mai sus.

6. NOMOGRAMA ECUAȚIEI LUI CLARK[1])

Acest tip de ecuație

$$f_1f_2f_3+(f_1+f_2)g_3+h_3=0 \qquad (15)$$

este strîns legat de ecuația lui Cauchy, deoarece conține același număr de funcții de cîte o singură variabilă.

[1]) *I. Clark*, Revue de Mécanique, t. 21, 1907, pp. 321, 576.

Făcînd transformările

$$x=f_1f_2,\quad y=f_1+f_2,$$

obținem ecuațiile de disjuncție

$$\begin{aligned} xg_3+yf_3+h_3&=0,\\ xf_1-y-f_1^2&=0,\\ xf_2-y-f_2^2&=0, \end{aligned}$$

care conduc la ecuația lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{g_3}{f_3} & \frac{h_3}{f_3}\\ 1 & -f_1 & f_1^2\\ 1 & -f_2 & f_2^2 \end{vmatrix}=0.$$

De aici rezultă că ecuația lui Clark se poate rezolva cu ajutorul unei nomograme cu două scări pe o conică și una pe o curbă oarecare (fig. 45).

Exemplu. Drumul parcurs de glisiera mecanismului din fig. 46 este dat de formula

$$s=r(1-\cos\alpha)+l\times$$

$$\times\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha}\right).$$

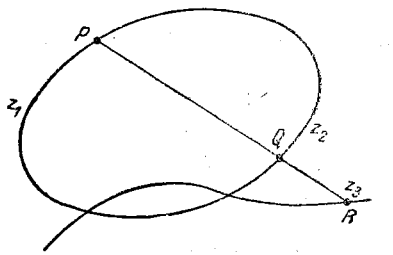


Fig. 45

Punînd $\frac{r}{l}=\beta$ și $\frac{s}{r}=\gamma$ formula se mai poate scrie,

$$\gamma^2+2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(1-\cos\alpha)-$$

$$-2\gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=0$$

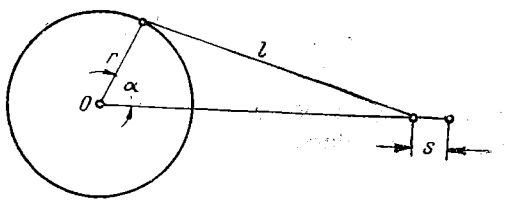


Fig. 46

sau

$$\frac{1}{\beta}\,\frac{\cos\alpha}{1-\gamma}+\frac{1}{\beta}-\cos\alpha+\frac{1+(1-\gamma)^2}{2(1-\gamma)}=0.$$

Observăm că această ecuație este de genul lui Clark cu

$$f_1=\frac{1}{\beta},\quad f_2=-\cos\alpha;\quad f_3=\frac{1}{\gamma-1},\quad h_3=\frac{1+(1-\gamma)^2}{2(1-\gamma)};\quad g_3=1.$$

Ecuația lui Soreau pentru această formulă se poate pune sub forma

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} & \frac{1}{1+\cos^2\alpha} & 1 \\ -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \frac{\beta^2}{1+\beta^2} & 1 \\ -\frac{2(1-\gamma)}{3+(1-\gamma)^2} & \frac{2}{3+(1-\gamma)^2} & 1 \end{vmatrix}=0,$$

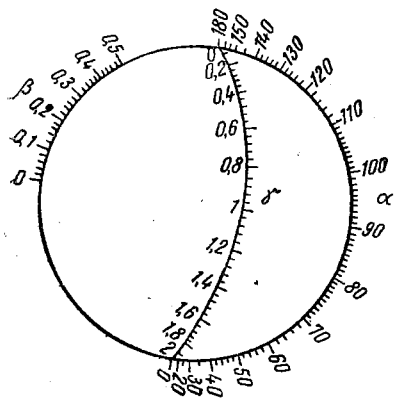


Fig. 47

care conduce la nomograma cu scările

$$x=\frac{1}{1+\cos^2\alpha},\quad y=-\frac{\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha},$$

$$x=\frac{\beta^2}{1+\beta^2},\quad y=\frac{\beta}{1+\beta^2},$$

$$x=\frac{2}{3+(1-\gamma)^2},\quad y=\frac{2(1-\gamma)}{3+(1-\gamma)^2},$$

din care două se află pe un cerc și a treia pe o elipsă (fig. 47).

7. NOMOGRAMA ECUAȚIEI $f_3g_1+f_3g_2=f_1+f_2$

Făcînd transformarea

$$x=f_3;\quad y=f_3g_2-f_2,$$

obținem ecuațiile de disjuncție

$$xg_1+y=f_1,$$
$$xg_2-y=f_2,$$
$$x=f_3.$$

Eliminînd variabilele auxiliare x și y și operînd convenabil cu elementele determinantului, găsim ecuația lui Soreau sub forma

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{g_1} & \frac{f_1}{g_1} & 1 \\ \frac{1}{g_2} & \frac{f_2}{g_2} & 1 \\ 0 & f_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

din care se obține o nomogramă cu două scări curbilinii și una rectilinie (fig. 48), de ecuații

$$x=-\frac{1}{g_1},\quad y=\frac{f_1}{g_1},$$
$$x=\frac{1}{g_2},\quad y=\frac{f_2}{g_2},$$
$$x=0,\quad y=f_3.$$

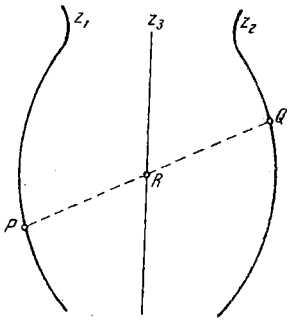


Fig. 48

Dacă între f_1, g_1 sau f_2, g_2 există o relație liniară, ecuația degenerează în ecuația lui Cauchy, iar dacă există deodată două relații liniare, atunci ecuația degenerează în ecuația (I), (pct. 4, cap. IV).

Exemplu. Formula

$$\sin\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

este de forma ecuației de mai sus. Nomograma ei a fost dată în fig. 32.

CAPITOLUL V

TEORIA GENERALĂ A NOMOGRAMELOR CU PUNCTE ALINIATE

1. ISTORIC

Am văzut în cap. IV că problema rezolvării ecuațiilor cu trei variabile prin nomograme cu puncte aliniate este strîns legată de găsirea ecuației lui Soreau. In cazul unor ecuații simple, am arătat cum se ajunge la ecuația lui Soreau și prin aceasta la ecuațiile scărilor nomogramei. Această problemă, cunoscută sub numele de problema anamorfozei, a fost rezolvată în trei etape.

In prima etapă, Saint-Robert găsește condiția necesară și suficientă ca o ecuație cu trei variabile

$$F(z_1,z_2,z_3)=0 \qquad (1)$$

să poată fi adusă la forma simplă

$$f_1f_2f_3=\text{const} \qquad (2)$$

sau

$$f_1+f_2+f_3=0. \qquad (3)$$

Această condiție a fost dată în cap. III, 2, formula (13′).

In a doua etapă, Massau și Lecornu dau condiția necesară și suficientă ca ecuația (1) să se poată scrie sub forma ecuației lui Cauchy:

$$f_1f_3+f_2g_3+h_3=0. \qquad (4)$$

Formula (5) din cap. III, 2 exprimă această condiție.

Din punct de vedere nomografic, relația lui Saint-Robert reprezintă condiția ca o ecuație cu trei variabile să se rezolve cu o nomogramă cu puncte aliniate compusă din scări rectilinii sau cu o nomogramă carteziană cu fascicule de drepte cotate paralele. A doua condiție [formula (5), cap. III, 2] fiind îndeplinită, ecuațiile cu trei variabile pot fi rezolvate cu o nomogramă cu două scări rectilinii și una curbilinie sau cu o nomogramă carteziană cu drepte cotate.

Problema generală a anamorfozei a fost rezolvată complet de Gronwall în anul 1912 [1]). El a dat condiția necesară și suficientă sub forma existenței unei integrale comune la un sistem de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Soluția dată de Gronwall are numai importanță teoretică, aplicarea ei la cazuri practice făcîndu-se cu foarte multă greutate. Din această cauză s-au căutat soluții mai simple, particularizîndu-se soluția cu trei variabile. Importante soluții, au fost date în lucrările matematicienilor O. D. Kellog [2]), R. Soreau [3]) și S. V. Smirnov [4])

R. Soreau, pornind de la observația că majoritatea ecuațiilor care intervin în tehnică sînt ecuații care conțin variabilele z_1, z_2, z_3, prin funcții separate, el caută condiții ca ecuația

$$F_{12}(z_1,z_2)f_3(z_3)+G_{12}(z_1,z_2)g_3(z_3)+H_{12}(z_1,z_2)=0 \qquad (5)$$

să poată fi pusă sub forma determinantului lui Massau (cap. IV, 1), simplificînd în felul acesta în mod simțitor rezultatele lui Gronwall în problema anamorfozei. In cele ce urmează ne mărginim la metoda lui Soreau.

---

[1]) *T. H. Gronwall*, Journal de mathématiques pures et appliquées (6), vol. 8 (1912), pp. 59–102.

[2]) *O. D. Kellog*, Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 63 (1915) pp. 159–173.

[3]) *R. Soreau*, Nomographie ou traité des abaques, Paris, 1921.

[4]) С. В. Смирнов, Доклады Академий Наук, vol. 69, 3, 1949.

2. GENUL NOMOGRAMEI. ORDIN NOMOGRAFIC

M. d'Ocagne a clasificat nomogramele cu puncte aliniate ale ecuațiilor cu trei variabile după numărul scărilor curbilinii. Acest număr l-a numit *genul nomogramei*. Din acest punct de vedere există patru tipuri de nomograme: *nomograme de genul zero*, care au toate scările rectilinii; *nomograme de genul întîi*, care au o scară curbilinie și două rectilinii; *nomogramele de genul al doilea*, cu două scări curbilinii și una rectilinie, și *nomogramele de genul al treilea*, cu toate scările curbilinii.

R. Soreau a studiat nomogramele cu puncte aliniate nu după genul lor, ci după ordinul nomografic al ecuațiilor. Dacă funcția din membrul întîi al ecuației (1) este de forma

$$F(z_1,z_2,z_3)=F_{12}f_3+G_{12}g_3+H_{12}h_3+\ldots+L_{12}l_3=0, \qquad (1')$$

atunci zicem că funcția este *nomografic rațională în raport cu* x_3. Ecuația (1) poate fi pusă în diferite moduri sub forma (1′). Notăm cu $p+1$ numărul cel mai mic de funcții $f_3, g_3, h_3, \ldots l_3$, cînd parcurgem toate formele posibile (1′). Numărul p se numește *ordinul nomografic al funcției* F_{123}, *în raport cu variabila* z_3. Dacă ordinele nomografice ale funcției F_{123} în raport cu variabilele z_1 și z_2 sînt q și r, atunci numărul

$$n=p+q+r$$

se numește *ordinul nomografic al funcției.*

Ecuația (1) se poate pune sub diferite forme echivalente (membrul al doilea fiind totdeauna nul). Funcțiile din membrul întîi al acestor ecuații pot avea ordine nomografice diferite. Cel mai mic dintre aceste ordine nomografice este *ordinul nomografic al ecuației.* In exemplul

$$f_2f_3+\sqrt{1+f_2^2}\sqrt{1+f_3^2}-f_1=0,$$

ordinul nomografic al funcției este cinci, deoarece cuprinde funcțiile separate $f_1, f_2, f_3, \sqrt{1+f_2^2}, \sqrt{1+f_3^2}$. Ecuația de mai sus se poate scrie și sub forma

$$f_1+\sqrt{f_1^2-1}-(f_2+\sqrt{1+f_2^2})(f_3+\sqrt{1+f_3^2})=0,$$

care conține numai trei funcții separate:

$$f_1+\sqrt{f_1^2-1},\quad f_2+\sqrt{1+f_2^2},\quad f_3+\sqrt{1+f_3^2}.$$

Ordinul nomografic al ecuației este deci trei.

Ecuațiile

$$f_1 f_2 f_3 = \text{const}, \tag{2}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \tag{3}$$

$$f_1 f_2 f_3 + f_1 + f_2 + f_3 = 0 \tag{6}$$

sînt de ordinul al treilea nomografic, iar ecuația lui Chauchy (4), care se poate scrie și sub forma:

$$f_1 \frac{f_3}{h_3} + f_2 \frac{g_3}{h_3} + 1 = 0, \tag{4}$$

sau

$$f_1 \varphi_3 + f_2 \psi_3 + 1 = 0,$$

este de ordinul al patrulea nomografic.

Ordinul nomografic al ecuației este numărul cel mai mic de funcții de cîte o variabilă, liniar independente, ce intră în ecuația dată. O dependență liniară între funcțiile separate scade ordinul nomografic cu o unitate. Deoarece o ecuație anamorfozabilă se poate pune sub formă de determinant (i se poate găsi ecuația lui Soreau), înseamnă că ordinul nomografic al ei poate fi trei, patru, cinci și șase. Ecuațiile cu ordinul nomografic mai mic decît trei nu conțin trei variabile, iar ecuațiile cu ordinul nomografic mai mare decît șase nu sînt anamorfozabile. Înainte de a examina pe rînd ecuațiile de ordinul al treilea, al patrulea, al cincilea și al șaselea, să dăm o metodă simplă pentru găsirea ecuației lui Soreau a ecuației date.

3. REGULA ELIMINĂRII

Dacă o ecuație ordonată după funcțiile care conțin variabila z_3 este de forma

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} = 0, \tag{5}$$

atunci introducem variabilele auxiliare

$$x = \frac{F_{12}}{H_{12}}, \quad y = \frac{G_{12}}{H_{12}} \tag{7}$$

și eliminăm pe rînd între aceste ecuații variabilele z_2 și z_1. Se poate întîmpla ca să obținem ecuații liniare în x și y:

$$\left.\begin{aligned} f_1 x + g_1 y + h_1 &= 0, \\ f_2 x + g_2 y + h_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ecuația dată prin transformarea (7) devine

$$f_3 x + g_3 y + 1 = 0.$$

Eliminînd variabilele auxiliare x și y din ultimele trei ecuații, obținem:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{h_1} & \frac{g_1}{h_1} & 1 \\ \frac{f_2}{h_2} & \frac{g_2}{h_2} & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este ecuația lui Soreau. Dacă această regulă nu conduce la ecuații liniare în variabilele auxiliare x și y, nu rezultă că ecuația nu este anamorfozabilă. Nu este exclus ca regula să se aplice pentru o ecuație echivalentă cu cea dată. Exemplele următoare vor ilustra acest lucru.

Ecuația

$$f_2 f_3 + \sqrt{1+f_2^2} \cdot \sqrt{1+f_3^2} - f_1 = 0,$$

prin transformarea

$$x = \frac{f_2}{f_1}, \quad y = \frac{\sqrt{1+f_2^2}}{f_1},$$

conduce la un sistem de disjuncție neliniar:

$$y^2 = \frac{1}{f_1^2} + x^2, \quad f_2 y = x\sqrt{1+f_2^2}, \quad x f_3 + y\sqrt{1+f_3^2} - 1 = 0.$$

Dar ecuația

$$f_1 + \sqrt{f_1^2 - 1} - (f_2 + \sqrt{1+f_2^2})(f_3 + \sqrt{1+f_3^2}) = 0,$$

echivalentă cu cea dată, fiind de forma

$$\varphi_1 = \varphi_2 \varphi_3,$$

știm că este anamorfozabilă.

Ecuația

$$u = D^2 + Dd + d^2$$

nu conduce la un sistem liniar (8), dar ecuaţia

$$u(D-d)=D^3-d^3$$

sau

$$uD+(d^3-ud)\cdot 1-D^3=0$$

este anamorfozabilă. Punînd

$$x=u$$

$$y=d^3-ud,$$

găsim ecuaţiile liniare

$$xD+y-D^3=0,$$

$$x-u=0,$$

$$xd+y-d^3=0.$$

Cu toate greutăţile pe care le prezintă, metoda eliminării este cea mai simplă metodă de a găsi ecuaţiile de disjuncţie şi deci ecuaţia lui Soreau.

4. ECUAŢIA DE ORDINUL AL TREILEA NOMOGRAFIC

In conformitate cu definiţia ordinului nomografic, forma generală a ecuaţiei de ordinul al treilea nomografic este

$$Af_1f_2f_3+B_1f_2f_3+B_2f_3f_1+B_3f_1f_2+C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3+D=0, \quad (9)$$

unde A, B_i, C_i şi D sînt constante.

Vom demonstra că *totdeauna se pot determina transformările*

$$f_i=\frac{\alpha_i\varphi_i+\beta_i}{\gamma_i\varphi_i+\delta_i} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (10)$$

astfel ca ecuaţia (9) *să se scrie sub una din următoarele trei forme,*

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3=1, \qquad (I)$$

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=0, \qquad (II)$$

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3, \qquad (III)$$

numite *forme canonice*. Notînd

$$\Delta=(AD+B_1C_1-B_2C_2-B_3C_3)^2-4(AC_1-B_2B_3)(B_1D-C_2C_3),$$

ecuaţia (9) *se transformă în forma* (I), (II), (III) *după cum* Δ *este pozitiv, nul sau negativ.* Δ se numeşte *discriminantul* ecuaţiei (9),

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $A\neq 0$. In adevăr, dacă $A=0$, atunci unul din coeficienţii B_i sau C_i este diferit de zero. Să presupunem că $B_1\neq 0$. Impărţind ecuaţia (9) cu f_1 şi notînd $\frac{1}{f_1}=g_1$, obţinem o ecuaţie de aceeaşi formă între funcţiile g_1, f_2, f_3, în care coeficientul produsului $g_1f_2f_3$ este $B_1\neq 0$. Dacă $C_1\neq 0$, atunci împărţim cu f_2f_3 şi notăm $g_2=\frac{1}{f_2}$, $g_3=\frac{1}{f_3}$.

Aplicînd transformările

$$f_i=\psi_i-\frac{B_i}{A}, \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

ecuaţia (9) trece în

$$A\psi_1\psi_2\psi_3+M_1\psi_1+M_2\psi_2+M_3\psi_3+N=0, \qquad (11)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} M_i&=\frac{AC_i-B_jB_k}{A},\\ N&=\frac{A^2D+2B_1B_2B_3-A(B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3)}{A^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

i, j, k fiind o permutare a numerelor 1, 2, 3.

Rezolvînd ecuaţia (11) în raport cu f_3, avem:

$$-\psi_3=\frac{M_1\psi_1+M_2\psi_2+N}{A\psi_1\psi_2+M_3}.$$

Introducem noile funcţii:

$$g_1=M_1\psi_1+\frac{N}{2}$$

$$g_2=M_2\psi_2+\frac{N}{2};$$

ecuaţia devine:

$$-\frac{\psi_3}{M_1\cdot M_2}=\frac{g_1+g_2}{Ag_1g_2-\frac{AN}{2}(g_1+g_2)+\frac{AN^2}{4}+M_1M_2M_3}$$

sau adunînd la numitor numărătorii înmulțiți cu $\frac{AN}{2}$, obținem:

$$\frac{\psi_3}{\frac{N}{2}\psi_3-\frac{M_1M_2}{A}}=\frac{g_1+g_2}{g_1g_2+\frac{A^2N^2+4AM_1M_2M_3}{4A^2}}. \tag{13}$$

Notăm

$$\frac{A^2N^2+4AM_1M_2M_3}{4A^2}=\frac{\Delta}{4A^2}=\varepsilon k^2, \tag{14}$$

unde ε poate avea valorile $+1, 0$ sau -1. Printr-o nouă schimbare de funcții

$$h_1=\frac{g_1}{k},$$

$$h_2=\frac{g_2}{k},$$

$$h_3=\frac{k\psi_3}{\frac{N}{2}\psi_3-\frac{M_1M_2}{A}},$$

ecuația (13) devine

$$h_3=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2+\varepsilon}. \tag{15}$$

Dacă $\Delta>0$, adică $\varepsilon=+1$, atunci prin transformarea

$$h_1=\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1},\quad h_2=\frac{\varphi_2+1}{\varphi_2-1},\quad h_3=\frac{1-\varphi_3}{1+\varphi_3}$$

ecuația (15) devine

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3=1,$$

adică de forma (I) canonică.

Dacă $\Delta=0$, adică $\varepsilon=0$, atunci (15) se scrie:

$$h_3=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2},$$

care este de forma (II) canonică.

Dacă $\Delta<0$, adică $\varepsilon=-1$, atunci (15) este de forma (III) canonică.

Expresia lui Δ prin coeficienții inițiali se găsește din (14) și (12):

$$\Delta=(AD+B_1C_1-B_2C_2-B_3C_3)^2-4(AC_1-B_2B_3)(B_1D-C_2C_3).$$

Teorema este astfel demonstrată.

In cap. IV. pct. 2, 3, 4 am construit nomogramele canonice (I), (II) și (III). Teorema demonstrată reduce cazul ecuației (9) la aceste forme. Rezultă că pentru ecuația (9) se pot construi nomograme cu puncte aliniate, formate din două scări situate pe aceeași conică și o scară rectilinie.

Aplicînd ecuației (11) regula eliminării, găsim succesiv

$$\begin{cases}\psi_1\psi_2=x\\ M_1\psi_1+M_2\psi_2=y\end{cases}$$

$$M_2x-\psi_1y+M_1\psi_1^2=0$$

$$M_1x-\psi_2y+M_2\psi_2^2=0$$

$$A\psi_3x+y+M_3\psi_3+N=0.$$

care conduce la ecuația lui Soreau:

$$\begin{vmatrix} M_2 & -\psi_1 & M_1\psi_1^2\\ M_1 & -\psi_2 & M_2\psi_2^2\\ A\psi_3 & 1 & M_3\psi_3+N\end{vmatrix}=0.$$

In baza acestei disjuncții putem construi o nomogramă cu două scări pe parabola

$$y=M_1M_2x^2$$

și o scară pe dreapta

$$y=Nx+\frac{M_3}{A}.$$

Comparînd rezultatele obținute aici cu cele din cap. IV, pct. 2, 3, 4, rezultă că o ecuație de ordinul al treilea nomografică (9) se poate rezolva:

în cazul $\Delta>0$, fie cu o nomogramă cu trei scări rectilinii în formă de triunghi sau „N", fie cu o nomogramă cu două scări pe o conică și una rectilinie secantă, fie cu trei scări curbilinii așezate pe aceeași cubică cu punct dublu;

în cazul $\Delta=0$, fie cu o nomogramă cu trei scări rectilinii (concurente sau paralele), fie cu două scări pe o conică și una rectilinie tangentă, fie cu trei scări curbilinii pe aceeași cubică cu un punct de întoarcere;

în cazul $\Delta<0$, fie cu o nomogramă cu două scări pe o conică și una rectilinie exterioară, fie cu trei scări pe aceeași cubică cu un punct izolat.

Aplicînd ecuației (9) transformări de forma (10), putem alege din nomogramele formei canonice pe cea corespunzătoare. Folosind însă și transformări transcendente (cap, IV, 4 și cap. III, 2), putem trece de la o formă canonică la alta, deci putem alege oricare din cele opt tipuri de nomograme enumerate mai sus.

Exemplu. Să se reducă la formă canonică ecuația

$$xyz-2xy+x-y+z-1=0.$$

Avem $\Delta=-3<0$; deci, vom obține forma (III) canonică. Făcînd calculele indicate în demonstrarea teoremei, obținem succesiv:

$$z=z'+2$$

$$xyz'+x-y+z'+1=0$$

$$-z'=\frac{x-y+1}{xy+1}$$

$$\begin{cases} x'=x+\dfrac{1}{2} \\ y'=-y+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{2z'}{z'+2}=\frac{x'+y'}{x'y'-\dfrac{3}{4}}$$

și cu ultima substituție

$$X=\frac{2x'}{\sqrt{3}},\quad Y=\frac{2y'}{\sqrt{3}},\quad Z=\frac{\sqrt{3}z'}{z'+2}$$

obținem în cele din urmă

$$XYZ=X+Y+Z,$$

unde

$$X=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad Y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-y\right),\quad Z=\frac{\sqrt{3}(z-2)}{z}.$$

5. ECUAȚIA DE ORDINUL AL PATRULEA NOMOGRAFIC

Ecuația cu trei variabile de forma

$$L_{12}f_3+M_{12}g_3+N_{12}=0, \tag{16}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} L_{12}&=a_0f_1f_2+a_1f_1+a_2f_2+a_3, \\ M_{12}&=b_0f_1f_2+b_1f_1+b_2f_2+b_3, \\ N_{12}&=c_0f_1f_2+c_1f_1+c_2f_2+c_3 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(a_i, b_i, c_i fiind coeficienți constanți) este de ordinul al patrulea nomografic.

Cazuri particulare de ecuații de ordinul al patrulea nomografic au fost întîlnite în cap. IV, pct. 5 și 6: ecuația lui Cauchy și ecuația lui Clark,

$$f_1f_3+f_2g_3+h_3=0, \tag{18}$$

$$f_1f_2f_3+(f_1+f_2)g_3+h_3=0. \tag{19}$$

Vom arăta că orice ecuație de ordinul al patrulea nomografic, ireductibilă, se poate aduce la una din cele două forme canonice: forma lui Cauchy sau forma lui Clark.

Demonstrăm mai întîi lema:

Dacă o ecuație de ordinul al patrulea nomografic este ireductibilă (adică nu se reduce la o ecuație de ordin nomografic inferior), atunci rangul matricei

$$\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\| \tag{20}$$

este trei.

Să presupunem că toți determinanții de ordinul al treilea ai matricei (20) sînt nuli. Atunci sistemul de ecuații omogene

$$\begin{aligned} a_0\lambda+b_0\mu+c_0\nu&=0, \\ a_1\lambda+b_1\mu+c_1\nu&=0, \\ a_2\lambda+b_2\mu+c_2\nu&=0, \\ a_3\lambda+b_3\mu+c_3\nu&=0. \end{aligned}$$

are o soluție nenulă. Ținînd seama de (17), avem:

$$\lambda L_{12}+\mu M_{12}+\nu N_{12}=0, \tag{21}$$

unde cel puțin unul din numerele λ, μ, ν este diferit de zero. Prin eliminarea funcției L_{12} din (16) și (21) se obține:

$$M_{12}(\lambda g_3-\mu f_3)+N_{12}(\lambda-\nu f_3)=0$$

sau

$$M_{12}h_3+N_{12}=0, \tag{22}$$

unde s-a notat

$$h_3=\frac{\lambda g_3-\mu f_3}{\lambda-\nu f_3}.$$

Ecuaţia (16) pusă sub forma (22) arată că are ordinul nomografic trei, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza noastră.

Să demonstrăm teorema:

Ecuaţia de ordinul al patrulea nomografic, ireductibilă, poate fi adusă, prin substituţii de forma (10), *la una din cele două forme canonice Clark sau Cauchy.*

Dacă notăm

$$Q_i=a_if_3+b_ig_3+c_i,$$

atunci ecuaţia (16) devine:

$$L_{12}f_3+M_{12}g_3+N_{12}=f_1f_2Q_0+f_1Q_1+f_2Q_2+Q_3=0. \tag{23}$$

Determinantul

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix}$$

este egal cu zero, pentru că ultima linie este formată din combinaţii liniare ale elementelor celorlalte linii şi deci avem:

$$Q_0D_0-Q_1D_1+Q_2D_2-Q_3D_3=0, \tag{24}$$

unde D_i $(i=0,1,2,3)$ sînt determinanţii formaţi din matricea (20) prin tăierea coloanei i.

Să facem în ecuaţia (23) transformarea

$$f_1=\frac{D_0+D_1\varphi_1}{D_2+D_3\varphi_1} \tag{25}$$

în ipoteza

$$D_0D_3-D_1D_2\neq 0.$$

După un calcul simplu se obţine

$$\varphi_1f_2(D_1Q_0+D_3Q_2)+f_2(D_0Q_0+D_2Q_2)+\varphi_1(D_1Q_1+D_3Q_3)+D_0Q_1+$$
$$+D_2Q_3=0.$$

Dar ţinînd seamă de (24) şi notînd

$$D_1Q_0+D_3Q_2=F_3;\quad D_0Q_0+D_2Q_2=D_1Q_1+D_3Q_3=G_3;$$
$$D_0Q_1+D_2Q_3=H_3,$$

ecuaţia devine:

$$\varphi_1f_2F_3+(\varphi_1+f_2)G_3+H_3=0,$$

adică tocmai forma canonică a lui Clark.

Dacă

$$D_0D_3-D_1D_2=0, \tag{26}$$

atunci transformarea (25) nu se mai poate aplica, deoarece membrul al doilea este constant. In acest caz, folosim transformările

$$f_1=\varphi_1+\frac{D_1}{D_3},\quad f_2=\varphi_2-\frac{D_2}{D_3}$$

(în baza lemei putem presupune $D_3\neq 0$), care conduc la ecuaţia

$$Q_0\varphi_1\varphi_2+\left(Q_1-\frac{Q_0D_2}{D_3}\right)\varphi_1+\left(Q_2+\frac{Q_0D_1}{D_3}\right)\varphi_2+\frac{Q_1D_1}{D_3}+$$
$$+Q_3-\frac{Q_0D_1D_2}{D_3^2}-\frac{Q_2D_2}{D_3}=0. \tag{27}$$

Termenul liber este nul, deoarece

$$\frac{1}{D_3}\left(Q_1D_1+Q_3D_3-Q_2D_2-Q_0D_1\cdot\frac{D_2}{D_3}\right)=$$
$$=\frac{1}{D_3}(Q_1D_1+Q_3D_3-Q_2D_2-Q_0D_0)=0,$$

în virtutea relaţiilor (26) şi (24).

Notînd acum în (27)

$$\frac{1}{\varphi_1}=\psi_1,\quad \frac{1}{\varphi_2}=\psi_2,\quad Q_0=H_3,\quad Q_1-\frac{Q_0D_2}{D_3}=G_3,\quad Q_2+\frac{Q_0D_1}{D_3}=F_3,$$

obţinem ecuaţia

$$\psi_1F_3+\psi_2G_3+H_3=0,$$

care este ecuaţia canonică a lui Cauchy.

In cap. IV, 5 am văzut că ecuaţia lui Cauchy se rezolvă cu o nomogramă de genul întîi, iar ecuaţia lui Clark cu una de genul al treilea, avînd două scări pe o conică şi a treia pe o curbă oarecare. In baza teoremei demonstrate, *o ecuaţie de ordinul al patrulea nomografic* (16) *se reprezintă printr-o nomogramă de genul întîi sau al treilea* (particulară).

Pentru rezolvarea nomografică a ecuaţiei (16), în general aducem mai întîi ecuaţia la forma canonică şi apoi îi construim

nomograma. Uneori se poate construi nomograma și direct pentru ecuația dată.

Exemplu. Ecuația

$$(1+l)\,h^2-l\,(1+p)\,h-\frac{1}{3}\,(1-l)\,(1+2p)=0$$

este de ordinul al patrulea nomografic. Punînd

$$\frac{l}{1+l}=f_1,\quad 1+p=f_2,\quad \frac{1}{h}=f_3,\quad \frac{1}{h^2}=g_3,$$

ecuația de mai sus devine

$$f_1f_2\,(3f_3-2g_3)+g_3\,(f_2-2f_1)+g_3-3=0.$$

Schimbînd notarea funcțiilor

$$\varphi_1=-2f_1,\quad \varphi_2=f_2,\quad \varphi_3=\frac{2g_3-3f_3}{2},\quad \psi_3=g_3,\quad \chi_3=g_3-3,$$

avem

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3+(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi_3+\chi_3=0,$$

forme canonice ale lui Clark.

Reprezentarea nomografică a acestei ecuații se poate face și direct, folosind regula eliminării; găsim ecuațiile de disjuncție

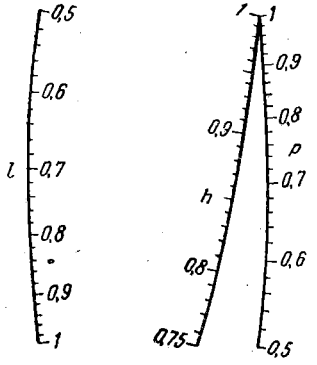


Fig. 49

$$x+hy-h^2=0,\quad \frac{3}{1+2p}\,x+\frac{2y}{1+p}=1,$$

$$\frac{3\,(1+l)}{1-l}\,x-\frac{2\,(1+l)}{l}\,y=-1,$$

care conduc la ecuația lui Soreau:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & h^2 \\ 1 & \dfrac{2\,(1+2p)}{3\,(1+p)} & \dfrac{1+2p}{3} \\ 1 & \dfrac{2\,(l-1)}{3l} & \dfrac{l-1}{3\,(l+1)} \end{vmatrix}=0.$$

Nomograma care rezolvă această ecuație este dată în fig. 49.

Ecuațiile de ordinul al treilea nomografic pot fi considerate ca ecuații de ordinul al patrulea nomografic, reductibile

Presupunînd dependența liniară

$$f_3=\alpha g_3+\beta,$$

ecuația lui Cauchy se reduce la ecuația de ordinul al treilea nomografic

$$f_1f_3+\alpha f_2f_3+\beta f_2+1=0,$$

care are discriminantul $\Delta=\beta^2$ și deci se poate reduce la forma (I) sau (II) canonică, după cum $\beta\neq 0$ sau $\beta=0$.

Ecuația lui Clark în acest caz devine

$$f_1f_2f_3+\alpha f_1f_3+\alpha f_2f_3+\beta f_1+\beta f_2+1=0$$

și are discriminantul

$$\Delta=1-4\alpha\beta,$$

deci se poate aduce la una din cele trei forme canonice ale ecuațiilor de ordinul al treilea nomografic.

6. ECUAȚIILE DE ORDINUL AL CINCILEA ȘI AL ȘASELEA NOMOGRAFIC

Aceste ecuații, în general, nu sînt anamorfozabile. Studiul detaliat al lor iese din cadrul cursului nostru. Se demonstrează că pentru aceste ecuații există cîte o formă canonică, la care se reduc ecuațiile anamorfozabile de ordinul al cincilea și al șaselea nomografic:

$$f_3=\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2},\qquad (28)$$

studiată în cap. IV, 7, și

$$\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\frac{f_1+f_3}{g_1+g_3},\qquad (29)$$

care este cazul general al ecuațiilor reprezentabile prin nomograme cu puncte aliniate. Ecuația corespunzătoare Soreau pentru (29) este

$$\begin{vmatrix} -f_1 & -g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Aceste ecuații se rezolvă, prima cu o nomogramă de genul al doilea, iar a doua cu o nomogramă de genul al treilea.

Ecuația de ordinul al cincelea nomografic

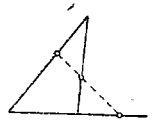
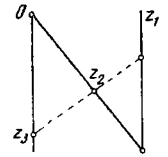
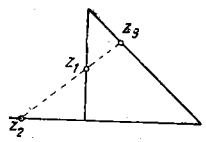
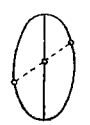
$$f_3=f_1f_2+g_1g_2,$$

deși foarte simplă nu este anamorfozabilă.

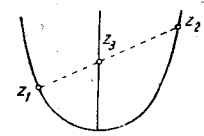
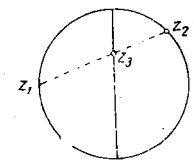
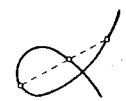
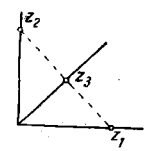
Ecuațiile de ordin nomografic mai mare decît șase nu sînt anamorfozabile și deci pentru ele nu se pot construi nomograme cu puncte aliniate.

In tabela următoare rezumăm rezultatele acestui capitol. Pe lîngă nomogramele generale dăm și cazurile particulare mai importante însoțite de ecuațiile lui Soreau corespunzătoare.

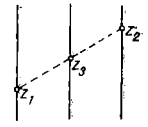
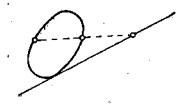
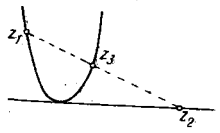
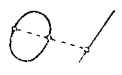
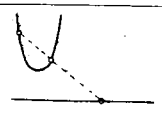
7. TABELA ECUAȚIILOR CU TREI VARIABILE, REZOLVABILE PRIN NOMOGRAME CU PUNCTE ALINIATE

Ordinul nomografic	Forma canonică	Genul	Nomograma	Ecuația lui Soreau
3	Forma (I) canonică $f_1 f_2 f_3 = 1$	0		
				$\begin{vmatrix} 1 & f_1-1 & 1 \\ \frac{f_2}{1+f_2} & -\frac{f_2}{1+f_2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$
				$\begin{vmatrix} 0 & \frac{f_1}{f_1+1} & 1 \\ \frac{1}{f_2+1} & 0 & 1 \\ \frac{f_3}{f_3-1} & \frac{1}{1-f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$
				

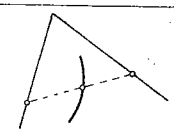
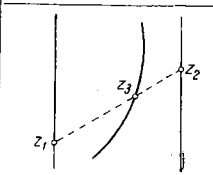
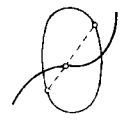
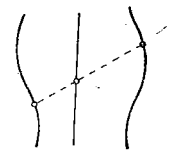
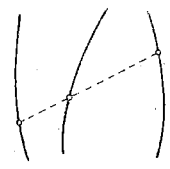
(Continuare)

Ordinul nomografic	Forma canonică	Genul	Nomograma	Ecuația lui Soreau
		2		$\begin{vmatrix} -f_1 & f_1^2 & 1 \\ f_2 & f_2^2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$
				$\begin{vmatrix} -\frac{f_1}{1+f_1^2} & \frac{f_1^2}{1+f^2} & 1 \\ \frac{f_2}{1+f_2^2} & \frac{f_2^2}{1+f_2^2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$
		3		
	Forma (II) canonică $f_1+f_2+f_3=0$			
		0		$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{f_2} & 1 \\ -\frac{1}{f_3} & -\frac{1}{f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$

(Continuare)

Ordinul nomografic	Forma canonică	Genul	Nomograma	Ecuația lui Soreau
3				$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & 1 \\ 2 & f_2 & 1 \\ 1 & -\frac{f_3}{2} & 1 \end{vmatrix}=0$
		2		
				$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1^2} & 1 \\ -\frac{1}{f_2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{f_3} & \frac{1}{f_3^2} & 1 \end{vmatrix}=0$
		3		
	Forma (III) canonică $f_1f_2f_3=f_1+f_2+f_3$	2		
				$\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 & 1 \\ f_2 & f_2^2 & 1 \\ \frac{1}{f_3} & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

(Continuare)

Ordinul nomografic	Forma canonică	Genul	Nomograma	Ecuația lui Soreau
3		3		
4	Ecuația lui Cauchy $f_1f_3+f_2g_3+h_3=0$	1		
				$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & 1 \\ 1 & f_2 & 1 \\ \frac{g_3}{f_3+g_3} & -\frac{h_3}{f_3+g_3} & 1 \end{vmatrix}=0$
	Ecuația lui Clark $f_1f_2f_3+(f_1+f_2)g_3+ +h_3=0$	3		
5	$f_3=\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$	2		$\begin{vmatrix} -\frac{1}{g_1} & \frac{f_1}{g_1} & 1 \\ \frac{1}{g_2} & \frac{f_2}{g_2} & 1 \\ 0 & f_3 & 1 \end{vmatrix}=0$
6	$\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\frac{f_1+f_3}{g_1+g_3}$	3		$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ -f_2 & -g_2 & 1 \\ -f_3 & -g_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

CAPITOLUL VI

NOMOGRAME PENTRU ECUAŢII CU MAI MULTE VARIABILE

1. NOMOGRAME CU PUNCTE ALINIATE, AVÎND CÎMPURI BINARE

Pornind de la principiul nomogramelor cu puncte aliniate putem construi nomograme pentru anumite ecuaţii cu patru, cinci şi şase variabile. In adevăr, înlocuind în nomograma cu puncte aliniate scările prin cîmpuri binare (cap. I, 5):

$$\left.\begin{aligned} x&=f_{12}(z_1,\ z_2),\\ y&=g_{12}(z_1,\ z_2);\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=f_{34}(z_3,\ z_4),\\ y&=g_{34}(z_3,\ z_4);\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=f_{56}(z_5,\ z_6),\\ y&=g_{56}(z_5,\ z_6),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

obţinem nomograma din fig. 50, care se utilizează în felul următor. Fiind date valorile $z_1, z_2, \ldots, z_5$, determinăm punctele P şi Q din cîmpurile binare (z_1, z_2) şi (z_3, z_4), cum şi linia de cote z_5 din familia z_5 a cîmpului (z_5, z_6). Notăm cu R punctul de intersecţie al dreptei PQ cu linia z_5; cota liniei din familia z_6, care trece prin punctul R, este determinată în funcţie de $z_1, z_2, \ldots, z_5$. Relaţia între variabile $z_1, z_2, \ldots, z_6$, se obţine scriind condiţia de aliniere a punctelor P, Q şi R:

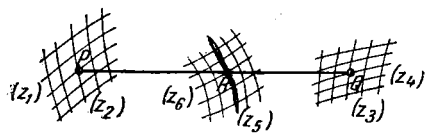


Fig. 50

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1\\ f_{34} & g_{34} & 1\\ f_{56} & g_{56} & 1\end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Ecuaţia (4) se numeşte, ca şi în cazul din cap. IV, 1, ecuaţia lui Soreau.

Dacă o ecuaţie dată

$$F(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6)=0$$

se poate pune sub forma (4), ea se rezolvă printr-o nomogramă cu puncte aliniate.

Dacă în fig. 50 cîmpul (3) este înlocuit cu scara

$$\left.\begin{aligned} x&=f_5(z_5)\\ y&=g_5(z_5)\end{aligned}\right\}$$

nomograma cu puncte aliniate (fig. 51) rezolvă ecuaţia

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1\\ f_{34} & g_{34} & 1\\ f_5 & g_5 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

cu cinci variabile.

Dacă în fig. 50 înlocuim două cîmpuri cu scări, obţinem o

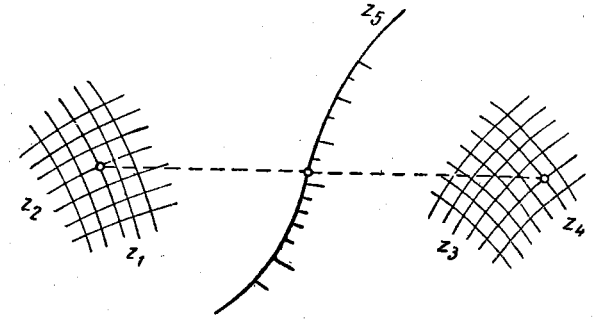


Fig. 51

nomogramă cu puncte aliniate pentru ecuaţii cu patru variabile de forma

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1\\ f_2 & g_2 & 1\\ f_{34} & g_{34} & 1\end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Exemplu. Să se construiască o nomogramă pentru ecuaţia de gradul al treilea

$$z^3+pz^2+qz+r=0.$$

Ecuaţia dată o scriem sub forma (6)

$$\begin{vmatrix} 0 & p & 1\\ 1 & r & 1\\ \dfrac{1}{1+z^2} & -\dfrac{gz+z^3}{1+z^2} & 1\end{vmatrix}=0.$$

Introducînd nişte moduli, scările au ecuaţiile

$$x=0,\quad y=10p,$$
$$x=100,\quad y=5r$$

și cîmpul binar

$$x=\frac{200}{2+z^2},\quad y=-\frac{10(qz+z^3)}{2+z^2}.$$

În nomograma reprezentată (fig. 52) s-au trecut numai valori pozitive

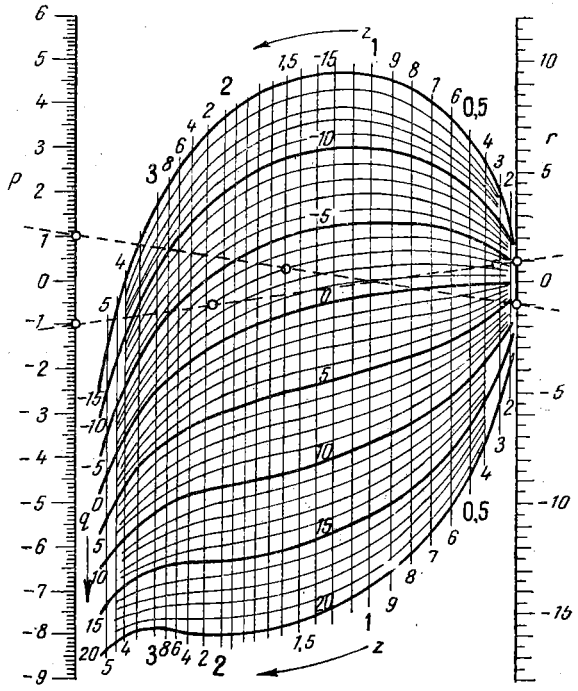


Fig. 52

pentru z. Pentru a afla rădăcinile negative ale ecuației date se formează transformata în $-z$. De exemplu, pentru $p=1$, $q=-3$, $r=-1$ se găsesc rădăcinile $z_1\approx 1{,}5$, $z_2\approx -2{,}3$, $z_3\approx -0{,}3$.

2. NOMOGRAME COMPUSE PENTRU ECUAȚII CU PATRU VARIABILE

Să considerăm figura compusă din nomogramele cu rețele ale ecuațiilor

$$\left.\begin{aligned} z&=g_{12}\\ z&=g_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

în care familia variabilei z este comună (fig. 53). Prin eliminarea lui z obținem

$$g_{12}=g_{34}. \qquad (8)$$

Dacă o ecuație cu patru variabile

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4)=0 \qquad (9)$$

se poate pune sub forma (8), atunci ea se poate rezolva cu o nomogramă compusă reprezentată în fig. 53. Utilizarea acestei

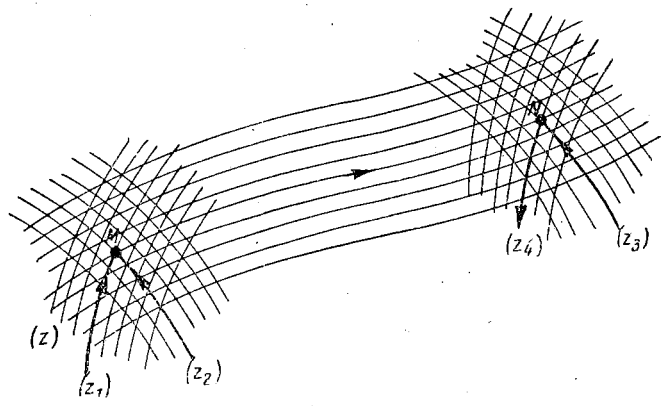


Fig. 53

nomograme este destul de simplă. Pentru a găsi valoarea variabilei z_4, cînd sînt date valorile variabilelor z_1, z_2, z_3, se procedează astfel: se găsește punctul M corespunzător valorilor variabilelor z_1 și z_2, iar la intersecția N a liniei z, care trece prin M, cu linia z_3 de cotă dată, trece linia z_4 de cotă căutată. Din utilizarea nomogramei rezultă că familia z nu este necesar să fie cotată.

Se pune întrebarea, cînd o ecuație dată de forma (9) se poate pune sub forma (8) sau sub formă echivalentă (rezolvată în raport cu z_4)

$$z_4=\Phi[g_{12}, z_3]. \qquad (8')$$

Răspunsul a fost dat de E. Goursat[1]).

[1]) *E. Goursat*, Bull. de la Soc. Math. de France, t. 27 (1899), p. 27.

Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația (9) *să se poată scrie sub forma* (8) *sau* (8′) *este*

$$\frac{\partial F}{\partial z_4}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} \\ \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z_3}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_4} \\ \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_4} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Condiția este necesară. Presupunînd că ecuația (9) este echivalentă cu (8′), găsim prin derivare parțială

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial g_{12}}\frac{\partial g_{12}}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial g_{12}}\frac{\partial g_{12}}{\partial z_2}.$$

Împărțind aceste relații

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_1} : \frac{\partial z_4}{\partial z_2} = \frac{\partial g_{12}}{\partial z_1} : \frac{\partial g_{12}}{\partial z_2},$$

obținem o funcție de z_1 și z_2, deci:

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{\partial z_4}{\partial z_1} : \frac{\partial z_4}{\partial z_2}\right) = 0. \tag{11}$$

Din (9) avem:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} + \frac{\partial F}{\partial z_4}\cdot\frac{\partial z_4}{\partial z_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

din care

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_1} : \frac{\partial z_4}{\partial z_2} = \frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2}.$$

Inlocuind în (11) și ținînd seamă că z_4 este o funcție de z_1, z_2, z_3, găsim:

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z_4}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} : \frac{\partial F}{\partial z_2}\right)\frac{\partial z_4}{\partial z_3} = 0,$$

care dezvoltat dă forma (10).

Condiția este suficientă. Ultimul calcul arată echivalența condițiilor (10) și (11). Condiția (11) fiind îndeplinită, rezultă că $\frac{\partial z_4}{\partial z_1} : \frac{\partial z_4}{\partial z_2}$ nu depinde de z_3, deci

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_1} : \frac{\partial z_4}{\partial z_2} = h(z_1, z_2),$$

sau

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_1} - h(z_1, z_2)\frac{\partial z_4}{\partial z_2} + 0\cdot\frac{\partial z_4}{\partial z_3} = 0. \tag{12}$$

Ecuația cu derivate parțiale liniară, omogenă și de ordinul întîi (12), are sistemul asociat

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{-h(z_1, z_2)} = \frac{dz_3}{0}.$$

Luînd prima egalitate, care nu conține variabila z_3, găsim o integrală primă de forma

$$\varphi(z_1, z_2) = C_1$$

și din ultima egalitate

$$z_3 = C_2.$$

Integrala generală a ecuației (12) este

$$z_4 = \Phi[\varphi(z_1, z_2), z_3],$$

deci z_4 se exprimă sub forma (8′).

Un caz particular foarte important este acela cînd cele două nomograme componente sînt alcătuite din familii de drepte. Atunci ecuațiile (7) au formele (cap. III, 3):

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f(z) & g(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

și

$$\begin{vmatrix} f_3 & g_3 & 1 \\ f_4 & g_4 & 1 \\ f^*(z) & g^*(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce arată că, în acest caz, ecuația (9) se poate rezolva și cu ajutorul a două nomograme cu puncte aliniate. Dacă scările variabile auxiliare sînt identice $[f(z) \equiv f^*(z),\ g(z) \equiv g^*(z)]$, cele două nomograme componente se pot alătura astfel ca scările variabilei să coincidă (fig. 54). Scara intermediară z nu este necesar să fie gradată. Ea permite trecerea de la o aliniere la cealaltă și se numește scara pirot sau scară mută. Nomograma compusă, astfel formată, se numește *nomogramă cu dublă aliniere.*

De multe ori numai una din ecuațiile (7) este anamorfozabilă. Pentru a folosi și în acest caz principiul punctelor aliniate

se face următorul artificiu. Se construiește nomograma cu puncte aliniate pentru prima ecuație, iar pentru a doua $z=g_{34}(z_3, z_4)$ se construiește o nomogramă cu linii concurente, a cărei familie z, putînd fi aleasă arbitrar, se determină astfel ca linia

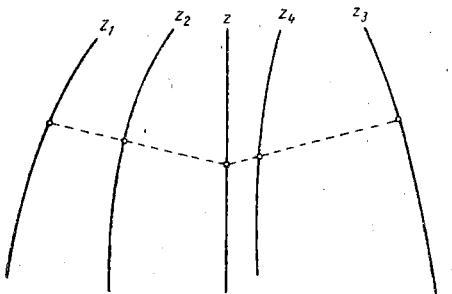


Fig. 54

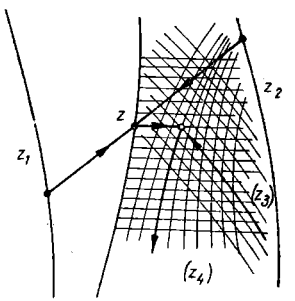


Fig. 55

de cotă z să treacă prin punctul de cotă z al scării z din prima nomogramă componentă (fig. 55). O astfel de nomogramă este numită *nomogramă cu scară binară.*

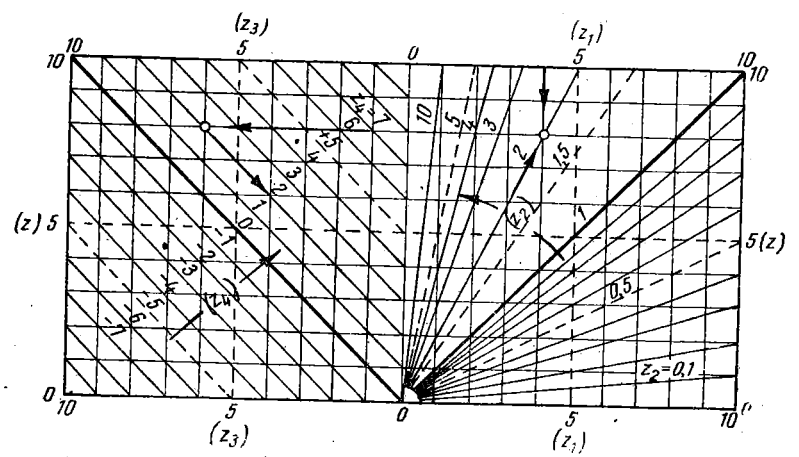


Fig. 56

Exemplu. Pentru ecuația

$$z_1z_2-z_3-z_4=0$$

vom da trei nomograme de tipuri diferite:

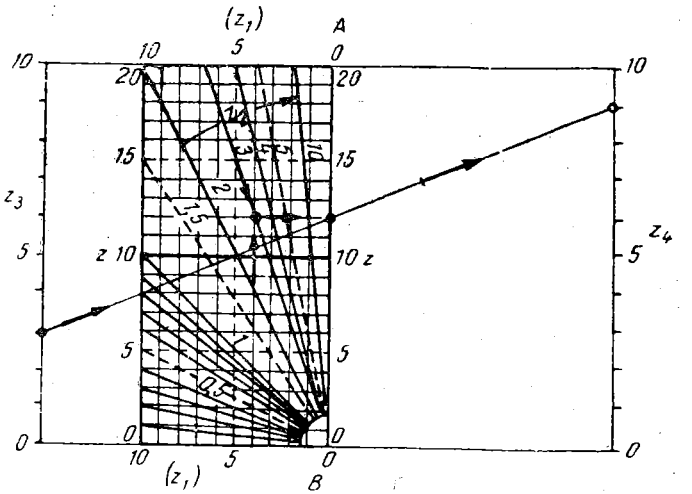


Fig. 57

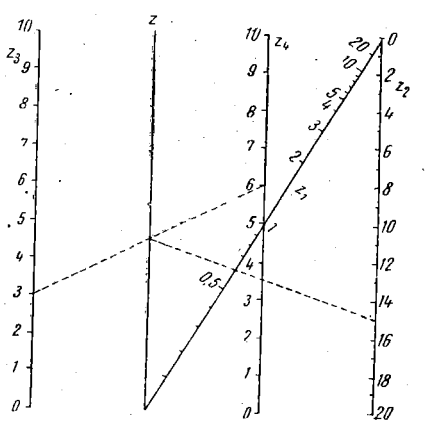


Fig. 58

a) Nomograma compusă din două nomograme cu linii cotate. Notăm

$$\left.\begin{aligned} z_3+z_4&=z\\ z_1z_2&=z \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

şi construim pentru prima ecuaţie o nomogramă cartezianã cu familii de linii cotate

$$\left.\begin{aligned} x=-\mu z_4,\quad y&=\mu z,\\ \mu z_3-x&=y, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

iar pentru a doua ecuaţie o nomogramă cu liniile cotate

$$\left.\begin{aligned} x=\mu z_1,\quad y&=\mu z,\\ xz_2&=y. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Familia z fiind comună prin alăturarea celor două nomograme, obţinem nomograma din fig. 56. De exemplu, pentru $z_1=4$, $z_2=2$, $z_3=6$, găsim $z_4=2$.

b) Nomograma cu scară binară. Prima ecuaţie (13) conduce la o nomogramă cu trei scări paralele, iar pentru a doua ecuaţie putem construi o nomogramă cu linii concurente avînd familiile de linii cotate (15) (fig. 57). De exemplu, pentru $z_1=4$, $z_2=3$, $z_3=3$, găsim $z_4=9$.

c) Nomograma cu dublă aliniere. Construim pentru prima ecuaţie (13) o nomogramă cu trei scări paralele, iar pentru a doua ecuaţie o nomogramă „N" (fig. 58). De exemplu, pentru $z_1=0{,}6$, $z_2=15$, $z_3=3$, găsim $z_4=6$.

3. NOMOGRAME COMPUSE PENTRU ECUAŢII CU UN NUMĂR MARE DE VARIABILE

Nomograme compuse pentru ecuaţiile de mai multe variabile se pot concepe în diferite feluri. Dăm un singur mod de a construi nomograme compuse.

Elementele componente fiind nomograme cu reţele, considerăm o nomogramă pentru variabilele z_1, z_2 şi α_1 (fig. 59), căreia îi corespunde o relaţie

$$F_1(z_1,\ z_2,\ \alpha_1)=0,$$

apoi o nomogramă pentru variabilele z_3, α_1 şi α_2, care corespund la relaţia

$$F_2(z_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2)=0$$

etc., apoi ultima nomogramă pentru variabilele z_{n-2}, α_{n-4}, α_{n-3} cu relaţia

$$F_{n-3}(z_{n-2},\ \alpha_{n-4},\ \alpha_{n-3})=0$$

şi ultima nomogramă pentru variabilele z_{n-1}, z_n şi α_{n-3}, căreia îi corespunde

$$F_{n-2}(z_{n-1},\ z_n,\ \alpha_{n-3})=0.$$

Eliminînd variabilele auxiliare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$ din cele $n-2$ relaţii scrise, obţinem o ecuaţie cu n variabile:

$$\Phi(z_1,\ z_2, \ldots, z_n)=0.$$

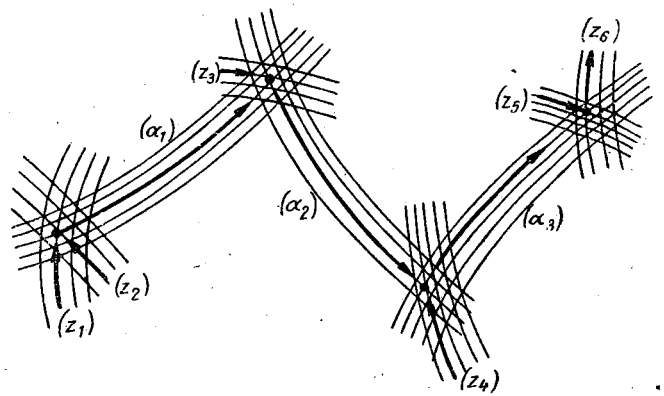


Fig. 59

Dacă ecuaţia $\Phi=0$ se poate înlocui cu sistemul $F_i=0$ ($i=1, 2, \ldots, n-2$) prin introducerea unor variabile auxiliare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$, atunci pentru această ecuaţie se poate construi o nomogramă compusă. Stabilirea condiţiilor pentru ca să fie

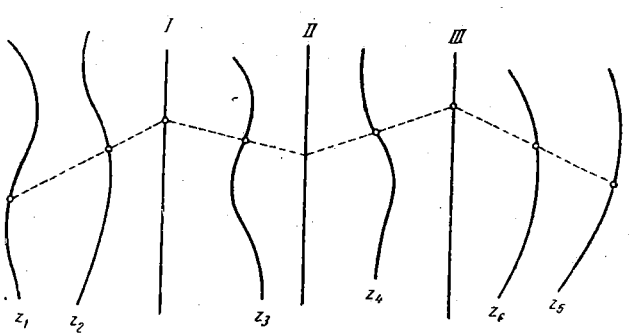


Fig. 60

osibilă această descompunere, sau descompuneri similare, deăşeşte cadrul acestui curs[1]).

[1]) *L. Bal.* şi *P. Radó*, Comunicările Academiei R. P. R., t. 5, nr. 2, pp. 280–291; 303–307.

Dacă ecuaţiile $F_i=0\,(i=1, 2, \ldots, n-2)$ sînt anamorfozabile, atunci nomogramele componente pot fi înlocuite cu nomograme cu puncte aliniate (fig. 60).

CAPITOLUL VII

PRECIZIA LA NOMOGRAMA CU PUNCTE ALINIATE

1. EROAREA GEOMETRICĂ

Rezultatul citit pe nomogramă are o eroare, care provine atît din construcţia nomogramei cît şi din executarea operaţiilor necesare pentru aflarea rezultatului. Erorile provenite din construcţie sînt mult mai mici decît cele provenite din utilizarea nomogramei, pentru că la construire se lucrează cu o precizie mult mai mare decît la întrebuinţare. Tehnica desenului permite ca nomograma să fie construită cu mare precizie, pe cînd utilizarea ei se face rapid, cu precauţie mai mică. Deci, erorile provenite din construcţie pot fi neglijate faţă de erorile de utilizare şi din acest motiv ne mărginim la studiul acestora din urmă.

In utilizarea nomogramei intervin erori la fixarea punctelor de cote date, la plasarea dreptei de aliniere, la fixarea punctului de intersecţie al scării rezultatului cu dreapta de aliniere şi la citirea cotei acestui punct de intersecţie. Fiecare din aceste erori influenţează erorile următoare. Distanţa dintre punctul citit şi cel corect este *eroarea geometrică*. Să evaluăm această eroare.

La fixarea punctelor de cote date pe scări se comite o eroare de interpolare vizuală, care nu depăşeşte 0,2 mm (la o scară cu subdiviziuni în conformitate cu normele arătate în cap. I, 2). In cazul riglei de calcul sau al altor instrumente de precizie, această margine a erorilor scade sub 0,1 mm.

Aşezarea dreptei de aliniere prin cele două puncte fixate introduce erori, care iarăşi nu depăşesc 0,2 mm pentru fiecare punct fixat. Deci, punctele de intersecţie ale acestei drepte cu scările datelor se află la o distanţă de cel mult 0,4 mm de punctele corecte ale acestor scări. Dacă fixarea punctelor pe scări şi aşezarea dreptei se fac simultan, atunci eroarea în

această operaţie dublă (numaia parent unică) este de obicei mai mare. Se recomandă a se fixa întîi cu ace punctele de cote date pe scări şi numai după aceea a se aşeza dreapta de aliniere.

Eroarea punctului de intersecţie al dreptei de aliniere cu scara rezultatului depinde atît de unghiul lor cît şi de poziţia relativă a scărilor. In studiul acestei erori ne interesează numai o porţiune mică din fiecare scară, şi din acest motiv putem considera scări rectilinii.

In cazul cel mai simplu, cînd dreapta de aliniere este perpendiculară pe cele trei scări, influenţa poziţiei relative a scărilor asupra erorilor se vede în fig. 61. Distanţa dintre scările datelor s-a notat cu h_1, scara rezultatului se află în afara lor

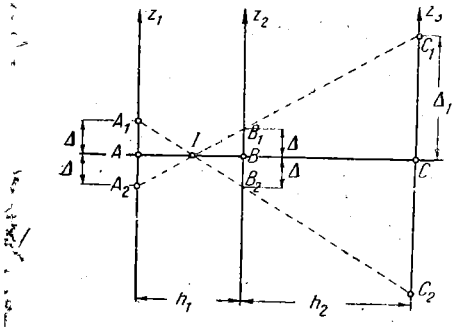


Fig. 61

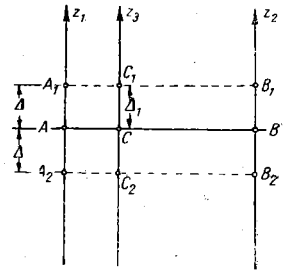


Fig. 62

la distanţa h_2 de scara cea mai apropiată, A şi B sînt punctele corecte corespunzătoare datelor numerice. Dreapta de aliniere, aşezată cu eroare, intersectează scara z_1 între A_1 şi A_2, iar scara z_2 între B_1 şi B_2. $AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=\Delta\leqslant 0{,}4$ mm. Dreapta de aliniere intersectează scara z_3 între C_1 şi C_2. Notăm cu Δ_1 eroarea maximă a punctului de intersecţie cu scara $z_3\,(\Delta_1=CC_1)$. Din triunghiurile asemenea IBB_1 şi ICC_1 avem:

$$\Delta_1=\left(2\,\frac{h_2}{h_1}+1\right)\Delta. \qquad (1)$$

Dacă $\frac{h_2}{h_1}=1$, $\Delta_1=3\Delta$; dacă $\frac{h_2}{h_1}=2$, $\Delta_1=5\Delta$; un raport mai mare nu este admisibil. In cazul cînd scara z_3 a rezultatului se află între scările z_1 si z_2, atunci

$$\Delta_1=\Delta, \qquad (2)$$

cum se vede în fig. 62.

Să considerăm acum cazul cînd dreapta de aliniere intersectează sub un unghi oarecare scările z_1 și z_2 și este perpendiculară pe scara z_3.

Fie iarăși A și B punctele corecte ale scărilor z_1 și z_2, care corespund datelor numerice (fig. 63). Construim cercurile cu centrele în A și B de rază Δ. Oricare ar fi direcția scărilor z_1 și z_2, punctele fixate pe scările datelor, avînd o eroare mai mică decît Δ, se vor găsi în interiorul cercurilor construite; deci porțiunea dreptei de aliniere din afara cercurilor se află între cele două tangente comune interioare. Avînd în vedere că razele cercurilor sînt mici în comparație cu distanța centrelor, razele AA' și BB' ale punctelor de contact sînt aproximativ perpendiculare pe AB și de aceea putem aplica rezultatul cazului precedent. *Formula* (1) *este valabilă.* Dacă scara z_3 se află între scările z_1 și z_2 trebuie să considerăm acea porțiune a dreptei de aliniere, care se află între cercurile A și B (fig. 64). Ea se găsește între cele două tangente comune exterioare. Razele punctelor de contact fiind perpendiculare pe AB, formula (2), se aplică de asemenea și pentru acest caz.

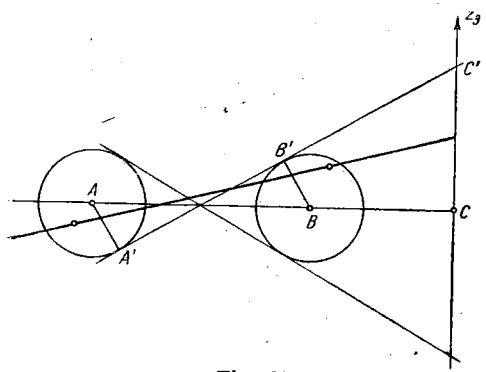


Fig. 63

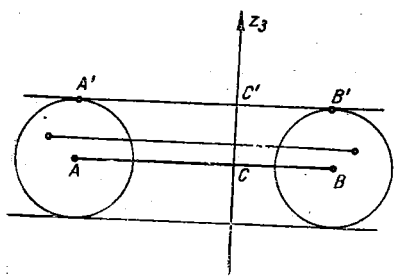


Fig. 64

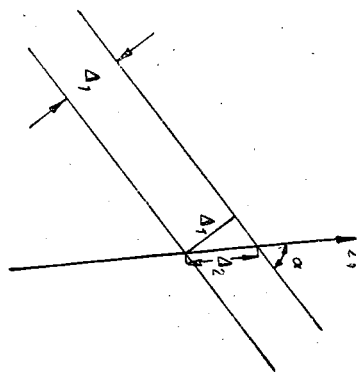


Fig. 65

Rămîne de studiat cazul cînd dreapta de aliniere intersectează oblic scara z_3. Cele două drepte de aliniere, cea corectă și cea efectivă (cu eroare), formează un unghi mic, deci în vecinătatea punctului de intersecție cu scara z_3 pot fi considerate paralele, avînd distanța între ele egală cu Δ_1 cel mult (Δ_1 este eroarea maximă pe o scară perpendiculară pe direcția dreptei de aliniere). Dacă notăm cu α unghiul format de scara rezultatului cu dreapta de aliniere avem pentru eroarea de intersecție (fig. 65):

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{\sin \alpha}. \qquad (3)$$

Dacă unghiul α este mic, putem avea erori considerabile. Pentru 20°, $\sin \alpha \approx 0{,}34$ și deci Δ_2 este de trei ori mai mare decît Δ_1. De aceea, nu se admit unghiuri α mai mici decît 20°.

Fixarea punctului de intersecție dintre scara z_3 și dreapta de aliniere introduce noi erori, care iarăși cresc cînd α descrește. Fie g grosimea suportului scării z_3 și δ lungimea porțiunii de scară corespunzătoare bucății pătrunse de dreapta de aliniere în scară (fig. 66). Avem

$$\delta = g \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (4)$$

Pentru intersecții apropiate de cea normală, această eroare se poate neglija.

În sfîrșit, citirea cotei punctului determinat pe scara z_3 se face cu o eroare cel mult egală cu 0,2 mm (ca și în cazul fixării punctului de cotă dată).

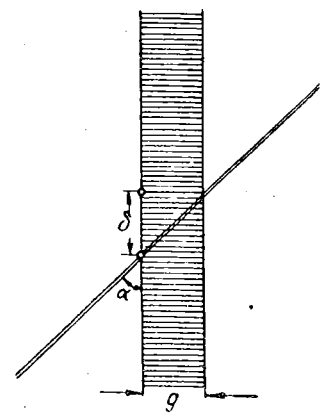


Fig. 66

Din această analiză rezultă că o nomogramă trebuie să satisfacă următoarele condiții geometrice:

1) *Scările datelor să nu se intersecteze în intervalul de variație.* Această condiție este necesară, căci în caz contrar pentru anumite date nu se poate duce dreapta de aliniere.

2) *Dreapta de aliniere să formeze cu scara rezultatului unghiuri mai mari de 20°.* Unghiurile formate cu scările datelor nu au importanță.

3) *Scara rezultatului să fie între scările datelor,* iar dacă acest lucru nu este posibil, distanța ei la scara cea mai apropiată *să nu întreacă dublul distanței dintre scările datelor.*

La o nomogramă care satisface aceste condiții eroarea geometrică nu trece de 1 mm. In cele ce urmează eroarea geometrică se va nota cu δ și se va presupune că este constantă ($\delta \leq 1$ mm).

2. EROAREA REZULTATULUI

Să vedem care este ercarea rezultatului dacă eroarea geometrică este δ. Notăm, pentru simplificare, variabila z_3 cu z și fie s lungimea arcului de pe suportul scării z de la originea O pînă la un punct oarecare de cotă z (fig. 67):

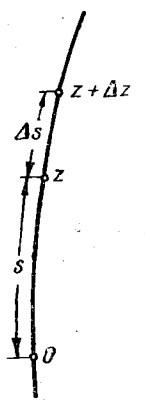


Fig. 67

$$s = \mu f(z), \tag{5}$$

μ fiind un modul. Inlocuind creșterile finite cu diferențialele respective, găsim:

$$\Delta s \approx \mu f'(z)\,\Delta z$$

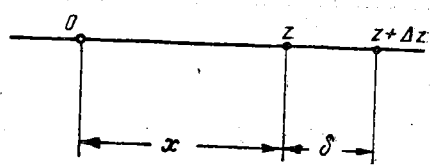


Fig. 68

și luînd $\Delta s = \delta$, avem următoarea expresie pentru eroarea rezultatului:

$$\Delta z \approx \frac{1}{\mu f'(z)} \cdot \delta. \tag{6}$$

In cazul suportului rectiliniu (fig. 68), ecuația (5) se înlocuiește cu ecuația scării

$$x = \mu f(z).$$

O primă concluzie din formula (6) (și completare la condițiile 1, 2, 3 de la pct. 2, cap. VI):

1) *Dacă $f'(z)$ se anulează între limitele de variație α și β, nomograma nu este utilizabilă. Dacă $f'(z)$ s-ar anula, eroarea ar deveni infinită. Eroarea Δz depinde de z; maximul modulului ei se numește eroare absolută a nomogramei* și se notează cu E_a. Notînd

$$m = \min_{\alpha \leq z \leq \beta} |f'(z)|,$$

avem din (6)

$$E_a \approx \frac{\delta}{\mu m}. \tag{7}$$

Numărul m se poate afla fie prin derivare, fie grafic, construind scara z cu un pas suficient de mic și căutînd cel mai mic interval grafic corespunzător (intervalul grafic este aproximativ egal cu produsul dintre derivată într-un punct interior și pas).

Eroarea relativă a nomogramei se exprimă astfel:

$$E_r = \max_{\alpha \leq z \leq \beta} \left| \frac{\Delta z}{z} \right|.$$

Notînd

$$m_1 = \min_{\alpha \leq z \leq \beta} |z f'(z)|,$$

avem

$$E_r \approx \frac{\delta}{\mu m_1}. \tag{8}$$

De aici concluziile:

2) *Locul disponibil pe hîrtia cu dimensiunile cerute trebuie* utilizat la maxim. In adevăr, formulele (7) și (8) arată că erorile sînt invers proporționale cu modulele.

3) *Eroarea absolută a nomogramei este invers proporțională cu m și eroarea relativă este invers proporțională cu m_1*

3. TRANSFORMAREA NOMOGRAMELOR

O nomogramă cu puncte aliniate poate fi supusă la anumite transformări, Aceste transformări se aplică pentru a micșora eroarea nomogramei. De obicei, după ce ecuația dată s-a pus sub forma ecuației lui Soreau și după ce s-au găsit ecuațiile scărilor, nomograma construită pe baza acestor ecuații nu este satisfăcătoare din punct de vedere al erorilor. In general, cele șase condiții arătate nu vor fi îndeplinite. Nomograma sub această formă nu poate fi utilizată; ea este o primă variantă și servește doar ca punct de plecare pentru transformări ulterioare.

Care sînt acele transformări, la care poate fi supusă o nomogramă cu puncte aliniate? Pentru a avea o intuiție clară și o tratare mai simplă, vom transforma întregul plan în care se află nomograma. Dacă transformarea planului este: 1) biunivocă și 2) dreptele se transformă în drepte, atunci imaginea nomogramei va fi tot o nomogramă, cu puncte aliniate pentru aceeași ecuație.

Transformările care satisfac proprietăţile 1) şi 2) se numesc transformări proiective sau omografii şi vor fi studiate în capitolul următor.

Vom vedea că *condiţiile* 1) *şi* 4) *de la punctul precedent trebuie să fie satisfăcute chiar de prima variantă* (cap. IX, 2). Celelalte condiţii pot fi satisfăcute printr-o alegere convenabilă a transformării proiective. Această alegere este una din problemele noastre de bază.

Am văzut că pentru o ecuaţie de ordinul al treilea nomografic există mai multe tipuri de nomograme cu puncte aliniate (cap. IV şi V). Vom vedea că ele nu pot fi deduse una din alta prin transformări proiective, ele sînt proiectiv distincte. Problema, dacă şi pentru alte tipuri de ecuaţii (care nu au ordinul nomografic trei) există mai multe nomograme cu puncte aliniate proiectiv distincte sau, cu alte cuvinte, dacă există anumite transformări neproiective admisibile pentru o nomogramă, este încă o problemă deschisă, este problema unicităţii nomogramei cu puncte aliniate.

Pînă în prezent, pentru nici o ecuaţie cu ordinul nomografic mai mare decît trei nu s-au găsit nomograme proiectiv distincte.

CAPITOLUL VIII

NOŢIUNI DE GEOMETRIE PROIECTIVĂ CU APLICAŢII LA NOMOGRAFIE

1. TRANSFORMAREA AFINĂ

Fie (P) şi (P') două plane euclidiene distincte sau suprapuse. Dacă fiecărui punct M din planul (P) îi facem să-i corespundă un punct M' din planul (P'), am definit o transformare a planului (P) în planul (P'). Punctul M' este *imaginea* lui M, iar M este *contraimaginea* lui M'. In timp ce M descrie planul (P), M' poate să descrie întregul plan (P') sau numai o parte a acestuia; în primul caz avem o transformare a planului (P) *pe* planul (P') iar în al doilea caz, a planului (P) *în* planul (P'). Dacă la două puncte distincte din (P) corespund totdeauna două imagini distincte, atunci corespondenţa se zice *biunivocă* (un punct din (P') are o singură contraimagine).

Transformarea inversă a unei transformări biunivoce a planului (P) pe (P') face să corespundă fiecărui punct din (P') contraimaginea sa.

Corespondenţa biunivocă între două plane distincte sau suprapuse, care transformă dreptele în drepte, se numeşte transformare afină.

Exemple: a) **Deplasări** (translaţii şi rotaţii). Intr-un sistem de coordonate rectangulare deplasările se definesc prin

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

unde (x, y) sînt coordonatele unui punct oarecare din plan, iar (x', y') coordonatele imaginii acestuia.

b) **Simetria în raport cu o axă**. Simetria în raport cu axa Ox se scrie astfel:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

c) **Omotetia**. Dacă centrul omotetiei este în origine:

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay. \end{cases}$$

d) **Afinitatea omologică**. Se dă axa Ox, direcţia δ şi $k>0$ (fig. 69). Prin punctul M din plan se duce o paralelă cu direcţia δ, care intersectează axa Ox în N. Imaginea M' a punctului M se ia pe dreapta NM astfel ca $\overline{NM'} = k\overline{NM}$. Avem două cazuri particulare remarcabile:

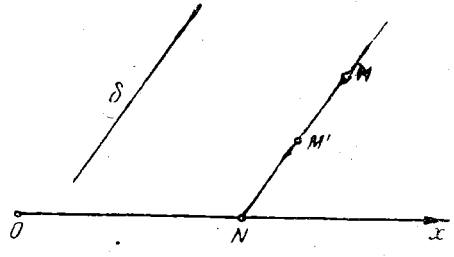


Fig. 69

e) **Comprimare—dilatare**, dacă $\delta \perp Ox$. Ecuaţiile transformării sînt:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases}$$

Dacă $0<k<1$ avem comprimare, dacă $k>1$ dilatare.

f) **Afinitate specială**, dacă $\delta \parallel Ox$:

$$\begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = y. \end{cases}$$

Putem verifica ușor că toate aceste exemple sînt transformări afine, fie analitic (ecuațiile de gradul întîi se transformă în ecuații de gradul întîi), fie prin considerații geometrice simple. In exemplele enumerate am considerat planele suprapuse. Să vedem un exemplu, cînd planele (P) și (P') sînt distincte.

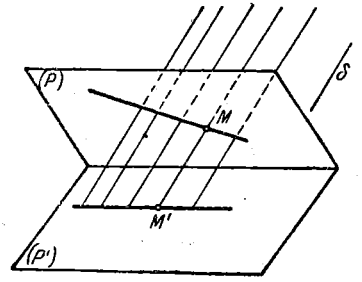


Fig. 70

g) **Proiecție cilindrică** (paralelă cu direcția δ). Prin punctul M al planului (P) ducem o dreaptă paralelă cu δ (fig. 70), care intersectează planul (P') în M'. Punctului M îi facem astfel să-i corespundă M'. Dacă $\delta \perp (P')$, avem proiecție ortogonală. Să rabatem în acest caz planul (P) peste (P') în jurul dreptei lor de intersecție; se obține o comprimare.

2. PROPRIETĂȚILE TRANSFORMĂRILOR AFINE

(I). *Produsul a două transformări afine este o transformare afină* (prin *produsul* a două transformări ale planului pe el însuși se înțelege transformarea obținută prin aplicarea succesivă a celor două transformări date). Cele două proprietăți, biunivocitatea și invarianța dreptelor, fiind presupuse la transformările date, ele rezultă imediat pentru produsul lor.

(II). *Inversa unei transformări afine este tot o transformare afină.* Din cauza, biunivocității, transformarea inversă este definită. Să presupunem că ea nu este afină. Atunci există punctele A, B, C din (P), necoliniare, ale căror imagini A', B', C' sînt coliniare. Fie M un punct oarecare din (P). Dreapta MC intersectează pe AB în N. Imaginea N' se găsește pe $A'B'$, tot așa și C', deci imaginea fiecărui punct al dreptei NC se află tot pe $A'B'$ deci M' este pe $A'B'$. M fiind un punct oarecare din (P), fiecare punct din (P) își are corespondentul său pe dreapta $A'B'$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza că transformarea afină transformă (P) pe (P'). Rezultă proprietatea (II).

(III). *Dreptele paralele se transformă în drepte paralele.* Dacă imaginile dreptelor paralele (D_1) și (D_2) s-ar intersecta într-un punct M', contraimaginea acestuia ar trebui să se afle și pe (D_1) și pe (D_2), ceea ce este imposibil.

(IV). *Mijlocul C al unui segment AB se transformă în mijlocul segmentului imagine $A'B'$.* Construim un paralelogram avînd două vîrfuri opuse în A și B; diagonalele lui se întîlnesc în C. Pe baza proprietății (III), imaginea paralelogramului este tot un paralelogram, avînd două vîrfuri opuse în A' și B'. Avînd în vedere că punctele de intersecție ale diagonalelor se corespund și că diagonalele se intersectează în părți egale, imaginea lui C se află la mijlocul segmentului $A'B'$.

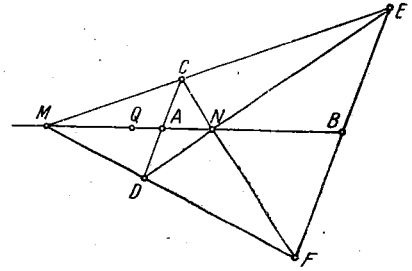


Fig. 71

(V). *Exteriorul segmentului AB se transformă în exteriorul segmentului $A'B'$.* Ducem prin A și B două drepte paralele și luăm pe ele $AC=AD$, $BE=BF$ (fig. 71). Dreptele CE și DF se întîlnesc în punctul M situat pe dreapta AB și dreptele CF și DE în N, situat tot pe AB. Avem:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NB}. \tag{1}$$

Deoarece $MB>NB$, avem $MA>AN$; deci, mijlocul Q al segmentului MN se află în exteriorul lui AB. Notînd $MQ=QN=r$, proporția (1) se mai scrie astfel:

$$\frac{QA+r}{QB+r} = \frac{r-QA}{QB-r}$$

sau

$$QN^2 = QA \cdot QB \tag{2}$$

[atît (1) cît și (2) caracterizează faptul că A, B și M, N formează o diviziune armonică]. Avînd în vedere proprietățile (III) și (IV), fig. 71 se transformă într-o figură cu aceeași structură, nu știm însă dacă imaginea dreptei CE, de exemplu, are o poziție analogă cu CE sau CF. In orice caz, M' și N' vor avea poziții analoge cu M și N sau N și M, deci Q' va avea o poziție analogă cu Q, deci imaginea lui Q va fi exterioară segmentului $A'B'$. Din (2) rezultă că A și B fiind fixate, fig. 71 se poate alege astfel ca punctul Q să fie oricare punct din exteriorul segmentului AB. Deci, orice punct din exteriorul segmentului AB are imagniea în exteriorul segmentului $A'B'$.

(VI). *Punctele segmentului AB se transformă în punctele segmentului A'B'.* Dacă un punct M interior segmentului AB ar avea imaginea M' în exteriorul lui $A'B'$, atunci aplicînd proprietatea (V) transformării inverse (care este afină), ar rezulta că imaginea lui M' la transformarea inversă, adică M, este situată în exteriorul lui AB, ceea ce este o contradicție.

(VII). *Raportul simplu este invariant în transformarea afină.* Fie M un punct al dreptei AB. Raportul

$$\mu = \frac{AM}{MB}$$

se numește *raport simplu* (segmentele AM și MB sînt orientate). Să considerăm întîi cazul cînd raportul simplu este un număr rațional și pozitiv, $\mu = \frac{p}{q}$, p și q fiind numere naturale. Împărțind AB, respectiv $A'B'$, în $p+q$ părți egale, punctele de diviziune se corespund [rezultă din (IV)], deci

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}.$$

Fie acum μ un număr irațional pozitiv. Împărțim segmentul AB în n părți egale și notăm cu K_n și L_n punctele de diviziune succesive între care se află M. Cînd $n \to \infty$, punctele K_n și L_n tind către M. Din (VI) rezultă că punctul M' se află între K'_n și L'_n, deci

$$\frac{A'K'_n}{K'_nB'} < \frac{A'M'}{M'B'} < \frac{A'L'_n}{L'_nB'}. \qquad (3)$$

Din invarianța raportului simplu, cînd acesta este rațional, avem:

$$\frac{A'K'_n}{K'_nB'} = \frac{AK_n}{K_nB} \quad \text{și} \quad \frac{A'L'_n}{L'_nB'} = \frac{AL_n}{L_nB}.$$

Fiecare din aceste rapoarte tinde către μ, cînd $n \to \infty$, pentru că $K_n \to M$ și $L_n \to M$; deci, termenii extremi ai inegalității (3) tind către μ, prin urmare

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \mu$$

și cu aceasta proprietatea este demonstrată pentru $\mu > 0$. Cazul $\mu < 0$ rezultă prin permutarea punctelor A, B, M.

3. EXPRESIA ANALITICĂ A TRANSFORMĂRII AFINE

In studiul analitic al transformărilor afine sistemul de coordonate cel mai potrivit este cel cartezian general, în care axele de coordonate formează un unghi oarecare și unitățile de măsură pe cele două axe sînt în general diferite. Reperul cartezian este determinat prin originea O și prin cei doi vectori fundamentali $\vec{u}$ și $\vec{v}$, lungimile cărora servesc ca unități de măsură pe cele două axe (fig. 72). M_1 și M_2 fiind punctele de intersecție ale axelor cu paralelele duse prin M la cele două axe, coordonatele x și y ale punctului M sînt determinate prin

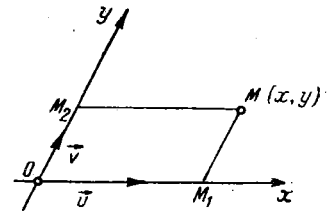


Fig. 72

$$\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{v}.$$

Dacă avem în plan două repere (fig. 73), poziția lui O' fiind fixată prin coordonatele lui față de celălalt reper $O'(x_0, y_0)$ și $\vec{u'}$ și $\vec{v'}$ prin componentele $\vec{u'}(\alpha_1, \beta_1)$ și $\vec{v'}(\alpha_2, \beta_2)$, atunci între

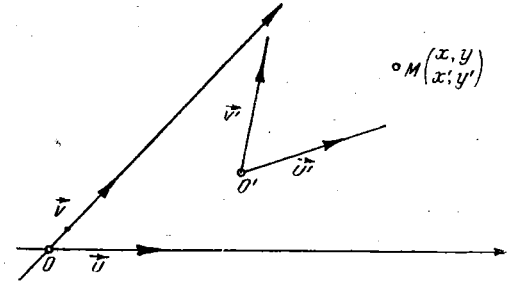


Fig. 73

coordonatele (x, y) și (x', y') ale punctului oarecare M din plan față de cele două repere avem următoarele formule de schimbare ale coordonatelor:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ nu pot avea aceeași direcție, deci

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

de altfel cei șase parametri α_1, β_1, α_2, β_2, x_0, y_0 pot fi aleși arbitrar.

Să considerăm o transformare afină a planului (P) pe planul (P') și să fixăm în (P) punctele A, B și C necoliniare. Imaginile lor, A', B', C', nu sînt coliniare. În planul (P) alegem reperul cartezian cu originea în A și cu vectorii fundamentali $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ și $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; în planul (P') reperul cu originea în A' și vectorii fundamentali $\vec{u}'=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{v}'=\overrightarrow{A'C'}$ (fig. 74). Raportînd coordonatele punctelor din cele două plane la reperele astfel alese, să notăm cu $M(x, y)$ un punct oarecare din (P) și cu $M'(x', y')$ imaginea sa prin transformarea dată. Paralelogramele avînd două laturi pe axele de coordonate și un vîrf în M, respectiv în M', se corespund la transformarea afină, deci M_1 se transformă în M_1' și M_2 în M_2'. Ținînd seamă că raportul simplu nu se schimbă prin transformarea noastră, raportul segmentelor AM_1 și AB este egal cu cel al segmentelor $A'M_1'$ și $A'B'$ și la fel pentru segmentele formate pe cealaltă axă de coordonate, deci

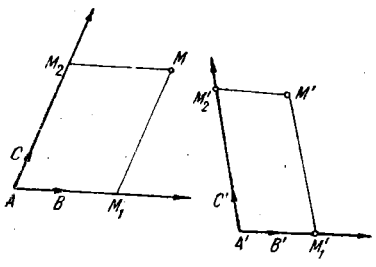


Fig. 74

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\\ y'&=y. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Reciproc, dacă o transformare a planului (P) pe (P') este definită prin formulele (5) (x, y și x', y' fiind coordonate raportate la cîte un sistem cartezian general ales în fiecare plan), atunci ea este afină. În adevăr, luînd o dreaptă oarecare (D) în (P), ecuația ei $ax+by+c=0$ se transformă în $ax'+by'+c=0$, deci (D) se transformă în dreaptă. Prin urmare,

Transformările afine sînt caracterizate analitic prin formulele (5), *dacă reperele din cele două plane se corespund în transformare.*

Fiind date punctele A, B, C în (P) și A', B', C' în (P'), necoliniare, alegînd reperele din fig. 74, formulele (5) definesc o transformare afină care transformă pe A în A', B în B' și C în C'. Pe de altă parte, nu există o altă transformare afină la care aceste trei perechi de puncte să corespundă, pentru că

am văzut că o transformare afină, la care punctelor A, B, C le corespund A', B', C', se exprimă prin formulele (5). Deci,

O transformare afină este determinată prin trei perechi de puncte corespondente (necoliniare).

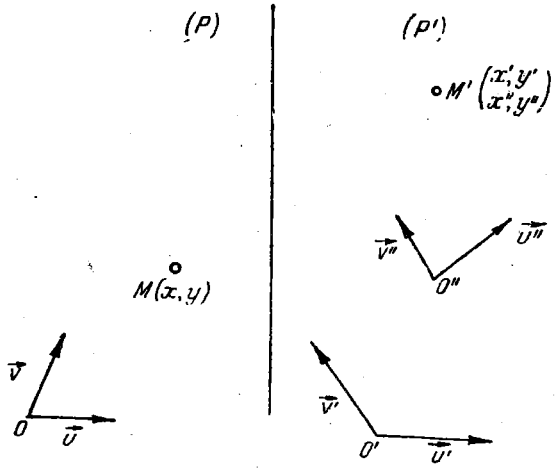


Fig. 75

Fiind dată o transformare afină a planului (P) pe (P'), să alegem în cele două plane cîte un reper cartezian arbitrar (care nu se corespund); $O, \vec{u}, \vec{v}$ și $O', \vec{u}', \vec{v}'$ (fig. 75). Să notăm imaginea reperului $O, \vec{u}, \vec{v}$ prin O'', $\vec{u}''$, $\vec{v}''$. În (P') avem două sisteme de coordonate; astfel, imaginea M' a punctului $M(x, y)$ are două feluri de coordonate: x', y' și x'', y''. Aplicînd formulele (5)

$$x''=x,$$
$$y''=y$$

și formulele de schimbare de coordonate (4)

$$x'=\alpha_1 x''+\alpha_2 y''+x_0$$
$$y'=\beta_1 x''+\beta_2 y''+y_0,$$

avem

$$\left\{\begin{aligned} x'&=\alpha_1 x+\alpha_2 y+x_0,\\ y'&=\beta_1 x+\beta_2 y+y_0, \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{matrix}\right| \neq 0. \qquad (6)$$

Reciproc, formulele (6) definesc o transformare afină pentru că ecuaţia de gradul întîi a dreptei se transformă într-o ecuaţie tot de gradul întîi şi este o transformare biunivocă.

Transformările afine se exprimă prin formulele (6).
Transformările afine depind de şase parametri.

Transformarea afină devine intuitiv clară prin formulele (5). Reţeaua de drepte $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ se transformă în $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$. In fig. 76 reperul cartezian din planul (P) este ales rectangular. Dacă cele două reţele de drepte sînt desenate, construcţia imaginii unei figuri se face prin simple însemnări a punctelor corespunzătoare pe reţea.

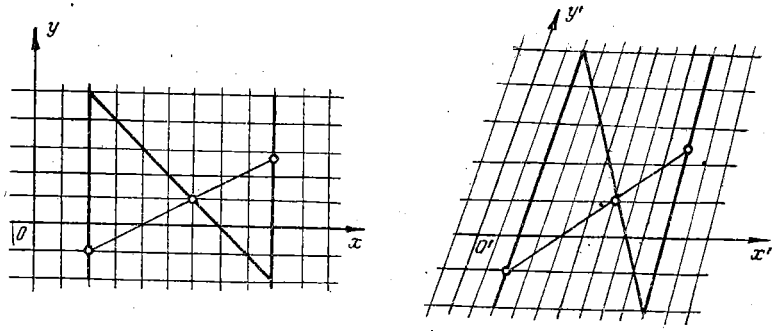


Fig. 76

Să observăm că transformarea afină se descompune totdeauna în două comprimări-dilatări şi o afinitate specială (facem abstracţie de deplasări) [1]. In adevăr, o transformare afină oarecare poate fi caracterizată prin acel paralelogram în care se transformă pătratul de latură 1. Să presupunem că pătratul $ABCD$ se transformă în paralelogramul $AB'C'D'$ (fig. 77). Printr-o comprimare în direcţia axei Ax transformăm pătratul $ABCD$ în dreptunghiul $AB'C''D$, care printr-o dilatare în direcţia Ay se transformă în dreptunghiul $AB'C'''D'''$. In sfîrşit, printr-o afinitate specială

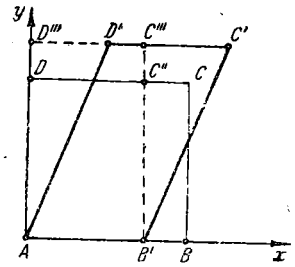


Fig. 77

[1]) Se demonstrează că totdeauna există două direcţii perpendiculare astfel, ca o transformare afină oarecare se descompune în două comprimări-dilatări de-a lungul acestor direcţii. Aflarea acestor direcţii fiind anevoioasă nu facem uz de această descompunere.

cădem peste paralelogramul $AB'C'D'$. Transformarea pătratului $ABCD$ în dreptunghiul $AB'C'''D'''$ revine la schimbarea unităţilor de măsură pe cele două axe rectangulare.

4. APLICAŢII LA CONSTRUIREA NOMOGRAMELOR

Printr-o transformare afină convenabilă putem îmbunătăţi nomograma. Avînd în vedere că unghiurile se schimbă transformarea afină se utilizează pentru evitarea unghiurilor mici dintre scara rezultatului şi dreapta de aliniere. Mai departe, se utilizează pentru folosirea raţională a locului disponibil pentru nomogramă. Prin transformare afină, m şi m_1 (cap. VII 2) rămîn neschimbate, la fel poziţia relativă a scărilor (dacă scara z_1, de exemplu, se află între scările z_2 şi z_3, atunci şi după transformarea afină scara z_1 se va găsi între celelalte două scări).

Pentru a ilustra aplicarea transformării afine la nomograme, presupunem că am construit nomograma din fig. 78. Locul disponibil nu este bine utilizat. Pentru a avea scări cît mai lungi, dorim să aşezăm nomograma de-a lungul diagonalei cadrului. Punctul A se transformă în A', D în D' şi dacă fixăm imaginea C' a punctului C transformarea afină este perfect determinată. Locul lui C' se fixează prin încercări: dacă C' este prea aproape de A' scările vor fi foarte apropiate şi vom avea unghiuri mici; dacă C' este prea departe de A' scările pierd din lungime. C' fiind fixat potrivit, B' se poate afla, ţinînd seamă că $B'D' : BD = A'C' : AC$. Construim imaginea cîtorva puncte (ducem, de exemplu, cîteva paralele la AC, imaginile lor sînt paralele cu $A'C'$, şi deoarece raportul simplu se păstrează, putem construi imaginea acestor paralele şi a punctelor de intersecţie cu scara curbilinie) şi cu ajutorul punctelor construite schiţăm nomograma (fig. 78).

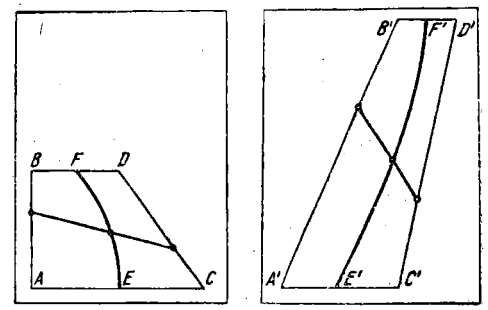


Fig. 78

Dacă schiţa corespunde din toate punctele de vedere, trecem la construcţia nomogramei. Putem proceda în două feluri:

1) Determinăm expresia analitică (6) a transformării afine aplicate şi transformăm prin ea ecuaţiile iniţiale ale scărilor, cu ajutorul cărora construim scările definitive.

2) Construim imaginea reperului cartezian, în raport cu care sînt deja calculate ecuaţiile scărilor şi considerăm ecuaţiile neschimbate ale scărilor faţă de reperul transformat.

5. DREAPTA PROIECTIVĂ. BIRAPORT

Între punctele unei drepte şi dreptele unui fascicul există o relaţie strînsă. Fie d o dreaptă dată şi O un punct dat nesituat pe d (fig. 79). Fiecărui punct al dreptei d îi facem să-i corespundă dreapta care-l uneşte cu O. În acest fel am stabilit o corespondenţă între punctele dreptei d şi dreptele fasciculului cu centrul în O. Această corespondenţă este biunivocă cu o singură excepţie: dreptei din fascicul, paralelă cu d, nu-i corespunde nici un punct. Ca să evităm această excepţie completăm dreapta d cu un punct nou: *punct impropriu* sau *punctul de la infinit*. Dreapta completată se va numi *dreaptă proiectivă*, spre a arăta deosebirea faţă de dreapta obişnuită, euclidiană. Dreapta proiectivă este o noţiune abstractă, punctul ei de la infinit nu are o imagine geometrică nemijlocită, totuşi această noţiune este foarte utilă, pentru că cu ajutorul ei relaţiile geometrice se exprimă mai simplu, devine posibil un studiu geometric profund. Corespondenţa între punctele dreptei d şi dreptele fasciculului O este şi *continuă*. Prin aceasta exprimăm faptul că, dacă punctul mobil M tinde către un punct fix, de exemplu către C, atunci dreapta corespunzătoare m tinde către c (fig. 79). Corespondenţa extinsă la dreapta proiectivă rămîne continuă, dacă convenim să spunem, pentru îndepărtarea indefinită a punctului M pe dreapta d, „*M tinde către punctul de la infinit*".

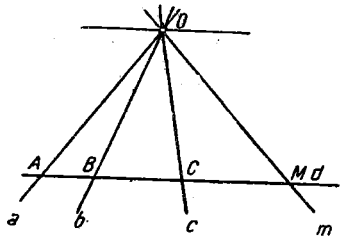


Fig. 79

Pentru a arăta care este deosebirea esenţială între dreapta obişnuită şi cea proiectivă, să facem următoarea corespondenţă între punctele unei drepte d şi ale unui cerc tangent la dreaptă în A (fig. 80). Punctului M al dreptei îi facem să-i corespundă punctul M' de pe cerc. Avem o corespondenţă biunivocă şi continuă între punctele dreptei euclidiene şi punctele cercului,

din care am scos punctul O. De asemenea, există o corespondenţă biunivocă şi continuă între punctele dreptei proiective şi cele ale cercului complet. Prin urmare, în privinţa proprietăţilor geometrice, care nu se schimbă prin transformări biunivoce şi continue (proprietăţi topologice), dreapta obişnuită se compară cu cercul deschis, iar dreapta proiectivă cu cercul închis.

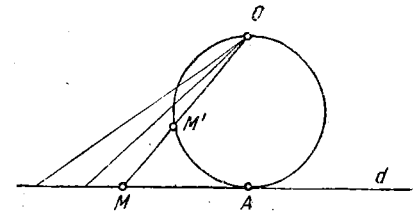


Fig. 80

Mulţimea punctelor unei drepte proiective *(punctuala)* şi mulţimea dreptelor unui fascicul *(fasciculul de raze)* sînt noţiuni înrudite, pentru că se poate stabili o corespondenţă biunivocă şi continuă între ele. Ele se numesc *forme de speţa întîi*. Punctele punctualei şi dreptele fasciculului de raze se numesc *elementele formei de speţa întîi*. Poziţia unui element în forma de speţa întîi se determină cu un singur parametru sau coordonată. În punctuală putem lua drept coordonată abscisa punctului (punctul de la infinit are abscisa ∞), iar în fascicul coeficientul unghiular (raza perpendiculară pe Ox are coordonata ∞). Se pot alege şi alte coordonate după cum arătăm în cele ce urmează.

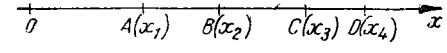


Fig. 81

Biraportul a patru puncte A, B, C, D, situate pe o dreaptă (fig. 81), este

$$(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}. \tag{7}$$

Dacă $(ABCD)=-1$, atunci zicem că cele patru puncte formează un *biraport armonic* (diviziune armonică). Luînd pe dreapta dată o origine O şi o unitate şi notînd abscisele punctelor A, B, C, D respectiv cu x_1, x_2, x_3, x_4, avem:

$$(ABCD)=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}. \tag{8}$$

Expresia din membrul al doilea formată cu numerele x_1, x_2, x_3, x_4, se numeşte *biraportul numerelor* x_1, x_2, x_3, x_4 şi se notează (x_1, x_2, x_3, x_4). Deci,

$$(ABCD)=(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{9}$$

BIBLIOTECA
Nr.

Relația

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad-bc \neq 0 \tag{10}$$

între variabilele x și x' este *funcție omografică* sau *transformare liniară*. Ipoteza $ad-bc \neq 0$ nu permite ca membrul al doilea să se reducă la o constantă. Funcția (10) stabilește o corespondență biunivocă între variabilele x și x', cînd aceste variabile iau toate valorile reale și ∞. Pentru $x = -\frac{d}{c}$ avem $x' = \infty$, pentru $x = \infty$ avem $x' = \frac{a}{c}$. Faptul că oricărui x' îi corespunde un singur x, se poate vedea rezolvînd (10) în raport cu x:

$$x = \frac{-dx'+b}{cx'-a}. \tag{11}$$

Se verifică ușor că *biraportul a patru numere nu se schimbă prin transformarea liniară* (10). Dacă

$$x_i' = \frac{ax_i+b}{cx_i+d} \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

atunci un calcul direct arată că

$$(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Să luăm pe o dreaptă punctele fixe A, B și E și punctul mobil M. Biraportul

$$\lambda = (ABME)$$

variază monoton și ia toate valorile reale (inclusiv ∞), cînd M descrie dreapta. Acestea se verifică ușor, dacă notăm abscisele punctelor A, B, E, M respectiv cu a, b, e, x și folosim (8):

$$\lambda = \frac{x-a}{x-b} : \frac{e-b}{e-a} = k \cdot \frac{x-a}{x-b}. \tag{12}$$

Avem o corespondență biunivocă și continuă între punctele dreptei și numerele reale λ (inclusiv ∞), deci λ poate fi folosit pentru determinarea unui punct pe dreaptă, adică este o coordonată; se numește *coordonată proiectivă*. Coordonata proiectivă a punctului A este 0, a punctului B este ∞ și a lui E este 1. Dacă E se află în exteriorul segmentului AB, atunci punctele situate între A și B au coordonate proiective negative, cele din exteriorul segmentului AB au coordonate proiective pozitive.

Abscisa intră ca un caz particular al coordonatei proiective. Luînd punctul A ca origine, B punctul de la infinit și E punctul-unitate, atunci din (7) avem:

$$(AB_\infty ME) = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{B_\infty E}{B_\infty M}.$$

Raportul $\frac{BE}{BM}$ tinde către 1, cînd B tinde către punctul de la infinit și deci

$$(AB_\infty ME) = \frac{AM}{AE} = x.$$

Care este expresia biraportului în coordonate proiective? Fie M_1, M_2, M_3, M_4 patru puncte oarecare pe o dreaptă; notăm abscisele lor cu x_1, x_2, x_3, x_4 și coordonatele lor proiective cu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Avem din (9) $(M_1M_2M_3M_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Deoarece între variabilele x și λ avem relația (12) care este de forma (10), rezultă că biraportul numerelor x_1, x_2, x_3, x_4 este egal cu cel al numerelor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Deci,

$$(M_1M_2M_3M_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

și, prin urmare, *biraportul a patru puncte se exprimă la fel în coordonate proiective ca și în coordonate carteziene.*

Dacă λ este o coordonată proiectivă, atunci

$$\mu = \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$$

este de asemenea o coordonată proiectivă. In adevăr, să notăm cu λ_0, λ_∞ și λ_1 valorile lui λ corespunzătoare lui $\mu=0$, $\mu=\infty$, $\mu=1$ și cu A_0, A_∞, A_1 punctele care au coordonatele proiective λ_0, λ_∞, λ_1. Atunci

$$\mu = (0, \infty, \mu, 1) = (\lambda_0, \lambda_\infty, \lambda, \lambda_1) = (A_0A_\infty MA_1).$$

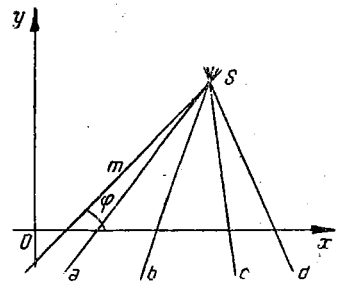


Fig. 82

Prin *biraportul a patru raze* dintr-un fascicul înțelegem biraportul coeficienților unghiulari corespunzători. Dacă notăm coeficienții unghiulari ai razelor a, b, c, d cu m_1, m_2, m_3, m_4 (fig. 82), atunci

$$(abcd) = (m_1, m_2, m_3, m_4).$$

Raportul razelor nu depinde de alegerea axei Ox. In adevăr,

prin schimbarea axelor, coeficientul unghiular m al unei raze oarecare din fascicul se schimbă în

$$m' = \operatorname{tg}(\varphi+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \frac{m+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot m}$$

(α este unghiul celor două axe ale absciselor și $m=\operatorname{tg}\varphi$). Relația dintre m și m' fiind liniară, biraportul nu se schimbă dacă schimbăm sistemul de referință.

Fie a, b și c trei drepte fixe dintr-un fascicul de raze și r o rază variabilă;

$$\lambda = (abre)$$

se numește *coordonata proiectivă a razei r din fascicul.* Coeficientul unghiular este un caz particular al coordonatelor proiective, pentru că

$$m = (0,\ \infty,\ m,\ 1).$$

Dacă razele r_1, r_2, r_3, r_4 au coordonatele proiective egale respectiv cu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, atunci $(r_1r_2r_3r_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ (se arată analog ca și în cazul punctualei). Ecuația fasciculului de drepte care trece prin intersecția dreptelor

$$D_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1=0$$

și

$$D_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2=0$$

se scrie:

$$D_1+\lambda D_2=0. \tag{13}$$

Aici λ este o coordonată proiectivă în fascicul. In adevăr, coeficientul unghiular al dreptei (13) este

$$m = -\frac{A_1+A_2\lambda}{B_1+B_2\lambda},$$

deci între m și λ avem o relație liniară; m fiind o coordonată proiectivă, rezultă că și λ, care se deduce din m prin transformare liniară, este de asemenea o coordonată proiectivă.

6. PROIECTIVITATE ÎNTRE DOUĂ FORME DE SPEȚA ÎNTÎI

Transformarea proiectivă sau proiectivitatea între două forme de speța întîi este o corespondență între elementele acestor forme, astfel că biraportul a patru elemente oarecare din prima formă

este egal cu biraportul imaginilor lor. In acest fel am definit proiectivitatea între două punctuale, între două fascicule de raze și între o punctuală și un fascicul de raze.

Fie λ coordonata proiectivă a unui element oarecare din prima formă și λ' coordonata elementului corespunzător din a doua formă; avem:

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda) = (\lambda_1',\ \lambda_2',\ \lambda_3',\ \lambda') \tag{14}$$

unde λ_1, λ_2, λ_3 sînt coordonatele a trei elemente fixe și λ_1', λ_2', λ_3' coordonatele imaginilor lor. Relația (14) se scrie

$$\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)} = \frac{(\lambda_3'-\lambda_1')(\lambda'-\lambda_2')}{(\lambda_3'-\lambda_2')(\lambda'-\lambda_1')}$$

sau

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0. \tag{15}$$

Avem o relație *biliniară* între coordonatele elementelor corespondente. Relația biliniară (15), rezolvată în raport cu λ', se scrie

$$\lambda' = \frac{b\lambda+d}{a\lambda+c},$$

deci λ' este o funcție omografică de λ. Invers, dacă

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

atunci transformarea conservă biraportul, deci este proiectivă. Deci, analitic, *proiectivitatea între două forme de speța întîi se caracterizează printr-o transformare liniară a coordonatelor.*

Produsul a două proiectivități este o proiectivitate. Avînd în vedere că fiecare din cele două proiectivități date nu schimbă biraportul, nici transformarea care se compune prin aplicarea succesivă a proiectivităților date nu schimbă biraportul.

Trei perechi de elemente corespondente determină transformarea proiectivă. In adevăr, să presupunem că elementele A, B, C se transformă în A', B', C'. Din $(ABCM) = (A'B'C'M')$, imaginea M' este perfect determinată, dacă se fixează M.

Exemple: a) Razei r din fasciculul cu centrul în S îi facem să-i corespundă punctul de intersecție M al razei r cu dreapta fixă d (fig. 83). Alegînd un sistem de axe rectangulare, axa Ox fiind dreapta d, notăm $S(x_0, y_0)$ și cu m coeficientul unghiular al razei r; ecuația dreptei r este

$$y-y_0 = m(x-x_0);$$

de aici abscisa x a punctului M:

$$x = \frac{mx_0 - y_0}{m}.$$

De la ordonata m din fascicul se trece la coordonata x din punctuală printr-o relaţie liniară; deci, corespondenţa noastră este o proiectivitate.

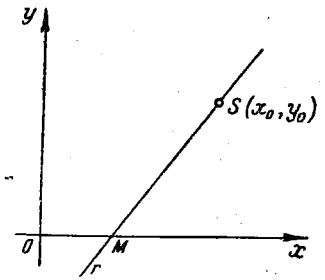


Fig. 83

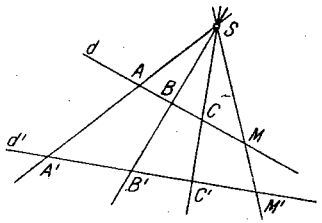


Fig. 84

b) Fie date punctul S şi dreptele d şi d'. Unui punct oarecare M de pe d îi facem să-i corespundă punctul M', intersecţia dreptei SM cu d' (proiectăm din S dreapta d pe d') (fig. 84). Această corespondenţă este o proiectivitate, deoarece, ţinînd seamă de exemplul a), avem:

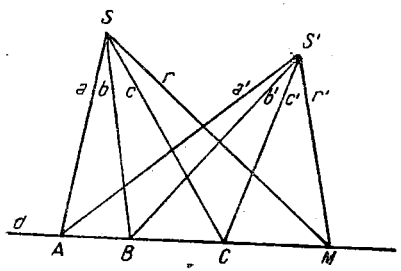


Fig. 85

$$(ABCM) = (abcr) = (A'B'C'M'),$$

deci biraportul este invariant.

c) Se dau punctele S, S' şi dreapta d (fig. 85). Razei r din fasciculul cu centrul S îi facem să-i corespundă raza r' din fasciculul S', care uneşte S' cu punctul de intersecţie M al razei r cu dreapta d. Corespondenţa astfel definită între cele două fascicule de raze este o proiectivitate, căci

$$(abcr) = (ABCM) = (a'b'c'r').$$

Proiectivităţile particulare definite în exemplele a), b), c) se numesc *perspectivităţi*. Proiectivitatea între două drepte este deci perspectivitate, dacă dreapta care uneşte două puncte co-

respondente trece mereu printr-un punct fix. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o proiectivitate între două drepte să fie o perspectivitate este ca punctul lor de intersecţie să fie propria lor imagine.*

Construcţia geometrică a proiectivităţii între două drepte se poate efectua prin două perspectivităţi. O proiectivitate între dreptele d şi d' este definită prin imaginile A', B', C' ale punctelor A, B, C. Cum putem construi imaginea unui punct oarecare M de pe d? Pe dreapta AA' luăm două puncte S şi S', notăm cu B'', respectiv C'', punctele de intersecţie ale dreptelor SB, $S'B'$, respectiv SC, $S'C'$, şi notăm cu d'' dreapta $B''C''$ (fig. 86). Dacă proiectăm din S dreapta d pe d'', apoi din S' dreapta d'' pe d, punctele A, B, C trec în A', B', C'; deci produsul celor două perspectivităţi (proiectarea din S şi S') este o proiectivitate, care transformă punctele A, B, C în A', B', C', exact ca şi proiectivitatea dată. Avînd în vedere că trei perechi de puncte corespondente determină în mod unic transformarea proiectivă, proiectivitatea dată este egală cu produsul celor două perspectivităţi. Pentru a construi imaginea M' a punctului M, fie M'' intersecţia dreptei SM cu d''; atunci intersecţia dreptei $S'M''$ cu d' este M'. Există o construcţie analogă şi pentru proiectivitatea între două fascicule de raze.

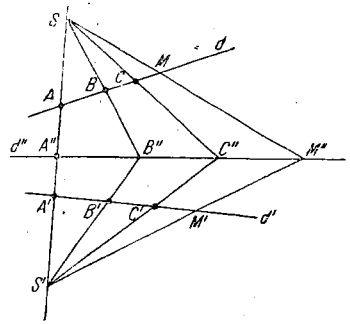


Fig. 86

7. SCARA PROIECTIVĂ

In cap. I, 2 am definit scara proiectivă prin ecuaţia

$$x = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (16)$$

[ecuaţia (7) din cap. I, 2]. Coeficienţii a, b, c şi d fiind daţi, scara (16) poate fi construită în următoarele două moduri:

Să presupunem $c \neq 0$ (cazul $c=0$ se reduce la o scară regulată). Notînd

$$\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \beta = \frac{bc-ad}{c^2}, \qquad \gamma = \frac{d}{c},$$

(16) devine

$$x=\alpha+\frac{\beta}{z+\gamma}. \qquad (17)$$

Luăm o scară regulată Oz (fig. 87) și prin punctul A, de cotă z_0, ducem o dreaptă oarecare d. Pe scara z luăm punctul B astfel ca $BA=z_0+\gamma$ și ducem prin acest punct segmentul $BS=-\frac{\beta}{z_0+\gamma}$ paralel cu dreapta d. Pe dreapta d luăm segmentul $CA=\alpha+\frac{\beta}{z_0+\gamma}=x_0$. Proiectînd din S scara regulată z pe dreapta d, obținem scara proiectivă de ecuație (16) cu originea în C.

In adevăr, din

$$AP : BS=AM : BM$$

rezultă

$$AP=-\frac{\beta(z-z_0)}{(z_0+\gamma)(z+\gamma)}$$

și

$$x=CP=CA+AP=\alpha+\frac{\beta}{z_0+\gamma}-\frac{\beta(z-z_0)}{(z_0+\gamma)(z+\gamma)}=\alpha+\frac{\beta}{z+\gamma}.$$

In fig. 88 este construită scara proiectivă

$$x=\frac{3z}{z+2}.$$

In acest caz, $\alpha=3$, $\beta=-6$, $\gamma=2$; s-a luat $z_0=1$, deci $BA=3$, $BS=2$, $CA=1$.

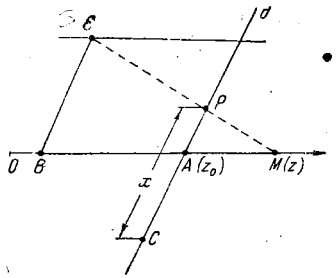


Fig. 87

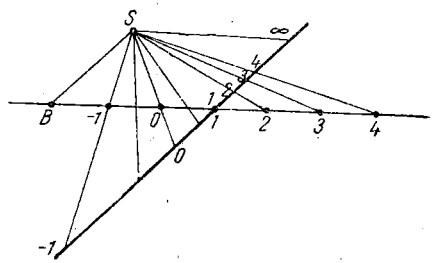


Fig. 88

Al doilea mod de construcție se bazează pe observația că între abscisele punctelor de aceeași cotă de pe cele două drepte Oz și d există relația liniară (16), deci punctele de aceeași cotă

sînt în corespondență proiectivă. Făcînd ca în A să coincidă două puncte de aceeași cotă, ca în fig. 87, rezultă că proiectivitatea se reduce la o perspectivitate. Dacă cunoaștem deci încă cîte două puncte corespondente ajunge să le unim și intersecția dreptelor obținute ne dă centrul S de perspectivitate. Acest procedeu a fost descris în cap. I, 2.

In realitate, primul procedeu este un caz particular al celui de al doilea, cînd pentru cele două perechi de puncte corespondente s-au luat

$$\begin{cases} z=-\gamma, \\ x=\infty, \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\infty, \\ x=\alpha. \end{cases}$$

Dacă scara regulată Oz se înlocuiește cu o scară funcțională de ecuație

$$\xi=f(z), \qquad (18)$$

atunci pe dreapta d din fig. 87 se formează scara

$$x=\frac{af(z)+b}{cf(z)+d}. \qquad (19)$$

scara (19) este *transformata proiectivă a scării* (18). Studiul acestor scări se va face în cap. IX.

8. PLANUL PROIECTIV. COORDONATE OMOGENE. COORDONATE PROIECTIVE

Prin *plan proiectiv* se înțelege următoarea extindere a planului obișnuit euclidian. Pe fiecare dreaptă din plan am definit cîte un punct impropriu (punctul de la infinit al dreptei). *Adăugăm punctelor planului euclidian punctele de la infinit ale tuturor dreptelor din plan și identificăm (facem să coincidă) punctele de la infinit ale dreptelor paralele.* Prin urmare, două sau mai multe drepte paralele trec prin același punct de la infinit al planului, două drepte concurente într-un punct obișnuit au punctele lor de la infinit diferite. Mulțimea punctelor de la infinit se numește *dreapta de la infinit a planului* (această denumire se justifică prin faptul că printr-o proiecție centrală ansamblul punctelor de la infinit se transformă într-o dreaptă obișnuită și prin analogiile frapante cu dreptele obișnuite sub aspect geometric și analitic, precum vom vedea în cele ce urmează).

In planul proiectiv, două drepte se intersectează totdeauna într-un punct (două drepte paralele se intersectează în punctul lor de la infinit). Deci, relaţiile geometrice s-au simplificat în planul proiectiv (a dispărut deosebirea dintre dreptele concurente şi paralele). Afară de aceasta, o parte însemnată din teoreme se grupează cîte două. Pentru a uşura exprimarea, în loc de a spune „punctul P se află pe dreapta d“ sau, ceea ce este acelaşi lucru „dreapta d trece prin punctul P“ vom spune „punctul P şi dreapta d se aparţin“. In planul proiectiv sînt adevărate următoarele afirmaţii:

1) la două puncte aparţine o dreaptă şi numai una;

2) la două drepte aparţine un punct şi numai unul.

Propoziţiile 1) şi 2) se pot deduce una din alta schimbînd între ele cuvintele „punct“ şi „dreaptă“. Două propoziţii care pot fi deduse una din alta prin această schimbare a punctelor şi dreptelor se zic *duale*. Avînd în vedere că afirmaţiile 1) şi 2) sînt fundamentale, un şir de teoreme deduse din ele se vor grupa două cîte două în teoreme duale.

Pentru a aplica metodele geometriei analitice şi planului proiectiv, trebuie să atribuim coordonate şi punctelor de la infinit. In cazul dreptei am reuşit cu un nou simbol, simbolul ∞. Acest simbol nu ne ajută în cazul planului, deoarece pentru o infinitate de puncte de la infinit, amîndouă coordonatele sînt ∞ şi deci coordonatele (∞, ∞) nu determină un anumit punct. Vom reuşi să atribuim coordonate tuturor punctelor din planul proiectiv prin întroducerea unei a treia coordonate. Să considerăm întîi un punct obişnuit M, avînd coordonatele carteziene x şi y. Alegem $Z \neq 0$, de altfel arbitrar. Numerele X, Y, Z se numesc *coordonate omogene* ale punctului M, dacă

$$x = \frac{X}{Z} \quad \text{şi} \quad y = \frac{Y}{Z}. \tag{20}$$

Coordonatele unui punct se pot scrie acum în mai multe feluri, de exemplu $(x, y, 1)$ sau (kx, ky, k). Numerele (X, Y, Z) şi (X', Y', Z') sînt coordonatele aceluiaşi punct atunci şi numai atunci dacă

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}.$$

Considerînd egale acele triplete de numere care se deosebesc printr-un factor constant, putem spune că avem o corespondenţă biunivocă între punctele planului euclidian şi tripletele de

numere reale în care al treilea număr este diferit de zero. Au rămas neutilizate acele triplete, la care al treilea număr este zero; ele vor putea fi întrebuinţate pentru coordonatele punctelor de la infinit. In adevăr, fie

$$x = x_0 + pt,$$

$$y = y_0 + qt$$

ecuaţiile parametrice ale unei drepte date (D) (p şi q sînt parametri directori ai dreptei). Coordonatele omogene ale unui punct oarecare pe (D) sînt $(x_0+pt,\ y_0+qt,\ 1)$ sau $\left(\frac{x_0}{t}+p,\ \frac{y_0}{t}+q,\ \frac{1}{t}\right)$. Făcînd $t \to \infty$, aceste coordonate omogene tind către $(p, q, 0)$. *Prin definiţie, punctul de la infinit ale dreptei* (D) *are coordonatele omogene* $(p, q, 0)$ *sau* $(kp, kq, 0)$, *unde* $k \neq 0$. Acelaşi punct de la infinit se determină ca punctul de la infinit a unei drepte (D'), paralelă cu (D). Se vede că pornind de la (D') ajungem la aceleaşi coordonate, căci parametrii directori ai dreptelor (D) şi (D') sînt proporţionali. Dacă un punct mobil M tinde către M_0, coordonatele omogene ale lui M tind către ale lui M_0, oricare ar fi M_0, la distanţă finită sau infinită (bineînţeles factorul de proporţionalitate la coordonatele omogene ale lui M trebuie ales convenabil). Corespondenţa între punctele planului proiectiv şi tripletele de numere reale din care scoatem $(0, 0, 0)$ este deci continuă. Se vede uşor că această corespondenţă este şi biunivocă. Simbolul $(0, 0, 0)$ nu are nici un sens geometric.

Ecuaţia dreptei $Ax + By + C = 0$ se scrie în coordonate omogene

$$A\frac{X}{Z} + B\frac{Y}{Z} + C = 0$$

sau

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{21}$$

care este o ecuaţie omogenă de gradul întîi. Ecuaţiile scrise în coordonate omogene ale tuturor curbelor algebrice sînt ecuaţii omogene. Punctele de la infinit sînt caracterizate prin $Z = 0$, deci *ecuaţia dreptei de la infinit este*

$$Z = 0.$$

Condiţia ca punctele de coordonate omogene (x_i, y_i, z_i)

($i=1, 2, 3$) să fie situate pe aceeaşi dreaptă se găseşte imediat cu ajutorul formulelor (20).

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă ecuaţia lui Soreau se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

atunci ecuaţiile scărilor z_i în coordonate omogene sînt

$$\rho X = f_i, \quad \rho Y = g_i, \quad \rho Z = h_i.$$

In planul proiectiv se pot utiliza coordonate mai generale decît cele omogene. Să considerăm formulele:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ x_2 &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ x_3 &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z, \end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

Formulele (22) stabilesc o corespondenţă biunivocă şi continuă între tripletele de numere reale (X, Y, Z) şi (x_1, x_2, x_3). Considerînd ca şi mai înainte egale tripletele (x_1, x_2, x_3), care se deosebesc numai printr-un factor de proporţionalitate, şi excluzînd simbolul (0, 0, 0), avem o corespondenţă biunivocă şi continuă între punctele planului proiectiv şi tripletele (x_1, x_2, x_3). Numerele x_1, x_2, x_3 se numesc coordonate proiective. Coordonatele omogene formează un caz particular al lor ($a_1=b_2=c_3=1$, $b_1=c_1=a_2=c_2=a_3=b_3=0$).

Pentru a avea o interpretare geometrică a coordonatelor proiective, să considerăm punctele din plan pentru care $x_1=0$; în coordonate omogene ele sînt caracterizate prin ecuaţia $a_1X+b_1Y+c_1Z=0$, deci ele formează o dreaptă. La fel, punctele pentru care $x_2=0$ sau $x_3=0$ formează de asemenea drepte. Aceste trei drepte nu sînt concurente (23). Am obţinut *triunghiul fundamental* (fig. 89), cu vîrfurile în punctele de coordonate proiective $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$ şi $O_3(0, 0, 1)$ (în cazul coordonatelor omogene latura O_1O_2 este la infinit). Să figurăm şi punctul E, pentru care $x_1=x_2=x_3=1$ (*punctul unitate*). Ecuaţia fasciculului de drepte cu centrul în O_2 este

$$a_1X+b_1Y+c_1Z+\lambda(a_3X+b_3Y+c_3Z)=0$$

sau

$$x_1+\lambda x_3=0. \tag{24}$$

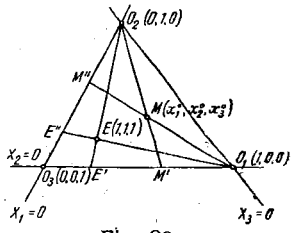


Fig. 89

Să considerăm din acest fascicul dreptele O_2O_3, O_2O_1, O_2M şi O_2E. Biraportul lor este egal, pe de o parte, cu $(O_3O_1M'E')$ şi pe de altă parte cu biraportul valorilor λ corespunzătoare, deci

$$(O_3O_1M'E') = \left(0, \infty, -\frac{x_1^0}{x_3^0}, -1\right) = \frac{x_1^0}{x_3^0}.$$

[Pentru a determina, de exemplu, pentru ce valoare a lui λ obţinem din (24) dreapta O_2M, înlocuim în (24) în loc de coordonatele curente, coordonatele punctului M şi de aici calculăm pe λ].

Raportul a două coordonate proiective este un biraport. Mai precis, raportul $\frac{x_1}{x_3}$ este coordonata proiectivă a punctului M' pe axa $x_2=0$, adică $(O_3O_1M'E')$, iar raportul $\frac{x_2}{x_3}$ este coordonata proiectivă a punctului M'', pe axa $x_1=0$, adică $(O_3O_2M''E'')$. Dacă dreapta O_1O_2 se află la infinit, atunci $\frac{x_1}{x_3}$ şi $\frac{x_2}{x_3}$ devin abscisa şi ordonata punctului M.

9. OMOGRAFIE

Transformarea biunivocă a planului proiectiv prin care dreptele se transformă în drepte, se numeşte omografie.

Transformarea afină are aceeaşi definiţie în planul euclidian; considerînd-o în planul proiectiv, ea schimbă între ele dreptele obişnuite şi conservă dreapta de la infinit. Deci, transformarea afină este un caz particular al omografiei, este o omografie în care dreapta de la infinit este invariantă (un punct de la infinit se schimbă într-un alt punct de la infinit).

Să considerăm omografiile care transformă planul (P) în (P') şi să introducem cîte un sistem de coordonate omogene în planele (P) şi (P'). Vom demonstra că *omografiile se exprimă astfel:*

$$\left.\begin{aligned}\rho X' &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z\\ \rho Y' &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z\\ \rho Z' &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

unde $|a_{ik}| \neq 0$ (ρ factor de proporţionalitate).

Este clar că transformarea definită prin formulele (25) este omografie, căci aceste formule fiind de gradul întîi transformă ecuaţiile de gradul întîi tot în ecuaţii de gradul întîi, deci dreptele în drepte.

Trebuie să mai arătăm şi invers, că orice omografie se exprimă cu formulele (25).

In cazul particular, cînd omografia este o transformare afină, atunci cunoaştem exprimarea ei analitică; ea este dată de formulele (6) din cap. VIII, pct. 3. Aceste formule se scriu în coordonate omogene astfel:

$$\left.\begin{aligned}\rho X' &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + x_0 Z,\\ \rho Y' &= \beta_1 X + \beta_2 Y + y_0 Z,\\ \rho Z' &= Z,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

deci sub forma (25). Prin urmare, o afinitate se exprimă cu formule de tipul (25).

Să considerăm acum o omografie dată T şi fie d acea dreaptă a planului (P), care prin T se transformă în dreapta de la infinit a planului (P'). Fie

$$aX + bY + cZ = 0$$

ecuaţia dreptei d. Să considerăm o transformare particulară de tip (25) T_1:

$$\left.\begin{aligned}\rho X' &= X,\\ \rho Y' &= Y,\\ \rho Z' &= aX + bY + cZ.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Prin T_1 dreptei d îi corespunde $Z' = 0$, adică dreapta de la infinit a planului (P'). Aplicînd planului (P') transformarea inversă a lui T_1, urmată de omografia dată T, obţinem o transformare a planului (P') pe el însuşi, prin care dreptele se transformă în drepte şi dreapta de la infinit se conservă, deci o transformare afină T_2. Transformarea T se poate obţine prin aplicarea succesivă a transformărilor T_1 şi T_2. T_1 s-a exprimat prin formula (27), iar T_2 fiind o transformare afină, se exprimă cu formulele (26), amîndouă fiind de forma (25). Aplicînd de două ori succesiv formulele de tipul (25), obţinem formula de aceeaşi structură şi cu aceasta afirmaţia noastră este demonstrată.

Dacă în planele (P) şi (P') alegem coordonate proiective, atunci omografia se exprimă de asemenea prin formule de gradul întîi, deoarece trecerea de la coordonate omogene la cele proiective se face prin formulele (22) de gradul întîi. Avem:

$$\left.\begin{aligned}\rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,\\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3,\\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

unde $|c_{ik}| \neq 0$ (ρ factor de proporţionalitate).

Printr-o omografie, o formă de speţa întîi a planului (P) se transformă într-o formă de speţa întîi a planului (P') proiectivă cu cea dată. Să considerăm, de exemplu, fasciculul de raze

$$D_1 + \lambda D_2 = 0;$$

el se transformă în

$$D_1' + \lambda D_2' = 0.$$

Biraportul a patru raze fiind biraportul valorilor λ corespunzătoare, se vede că biraportul a patru raze este un invariant.

Patru perechi de puncte corespondente determină o omografie. Fie A, B, C, D punctele date în planul (P) cărora le corespund punctele A', B', C', D' în planul (P'). Alegem în (P) triunghiul fundamental cu vîrfurile în A, B, C şi cu punctul unitate în D, iar în (P') triunghiul fundamental cu vîrfurile în A', B', C' şi punctul unitate în D'. Inlocuind în formulele (28) x_1, x_2, x_3 pe rînd cu $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, respectiv x_1', x_2', x_3' cu aceleaşi coordonate, se obţine $c_{ik} = 0$, dacă $i \neq k$. Scriind că pentru $(1, 1, 1)$ imaginea este $(1, 1, 1)$, obţinem $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, deci coeficienţii din (28) se determină în mod univoc. Transformarea determinată se scrie:

$$\begin{aligned}\rho x_1' &= x_1,\\ \rho x_2' &= x_2,\\ \rho x_3' &= x_3,\end{aligned}$$

adică, în sistemele de coordonate proiective alese, două puncte care se corespund prin omografie au aceleaşi coordonate.

Acest rezultat poate fi folosit pentru a face mai intuitivă noţiunea de coordonată omogenă. Fie ABC triunghiul fundamental şi E punctul unitate. Să considerăm acea omografie care transformă axele rectangulare Ox şi Oy în AB, respectiv AC (fig. 90, *a* şi *b*); B şi C corespunzînd la punctele de la infinit ale axelor, iar punctul U (1, 1) să se transforme în E. Să găsim imaginea dreptelor $x=1$, $x=2, \ldots$, $y=1$, $y=2, \ldots$ Dreptele $x=1$, $y=1$ şi OU se transformă în CE, BE, AEG. Paralela dusă din P_1 la OU se transformă în $P_1'G$; pentru a găsi imaginea dreptei $x=2$ unim cu C punctul de intersecţie al dreptelor $P_1'G$ şi BE etc. In acest fel obţinem un fascicul de drepte cu centrul în C şi unul cu centrul în B, fiecare dreaptă a fasciculelor avînd un număr şi anume o dreaptă din fasciculul C sau B are un număr egal cu abscisa sau ordonata dreptei corespunzătoare din planul xOy. Aceste numere sînt coordonatele proiective neomogene $\frac{x_1}{x_3}$ şi $\frac{x_2}{x_3}$.

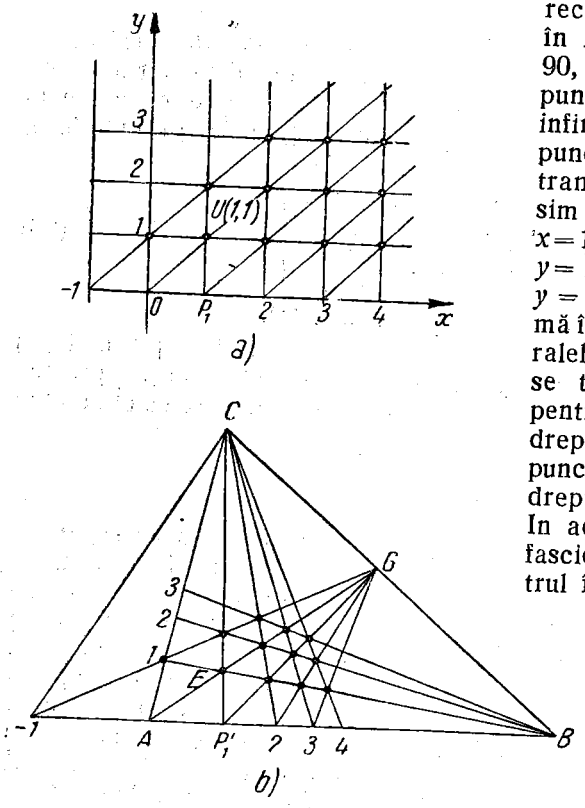


Fig. 90

Omografia depinde de opt parametri, deoarece în (25) unul din cei nouă coeficienţi a_{ik} poate fi ales arbitrar.

Să presupunem acum că planul (P') coincide cu planul (P), dacă considerăm omografiile planului (P) pe el însuşi. Punctele are rămîn neschimbate se numesc *puncte unite* sau *puncte fixe*, iar dreptele care se transformă în ele însele se numesc *drepte unite* sau *fixe* (acestea nu trebuie să rămînă neschimbate punct cu punct; un punct al unei astfel de drepte se transformă într-un alt punct al aceleiaşi drepte). Pentru determinarea punctelor unite punem în (28) $x_1'=x_1$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3$ şi obţinem:

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}-\rho)x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3&=0\\ c_{21}x_1+(c_{22}-\rho)x_2+c_{23}x_3&=0\\ c_{31}x_1+c_{32}x_2+(c_{33}-\rho)x_3&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Pentru ca acest sistem să admită soluţii diferite de cea nulă, trebuie să avem:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0. \qquad (30)$$

Ecuaţia caracteristică (30) are trei rădăcini. Inlocuind în (29) ρ cu una din rădăcinile ecuaţiei (30), obţinem un sistem compatibil care determină un singur punct (dacă o ecuaţie este consecinţa celorlalte două) sau o infinitate de puncte aşezate pe o dreaptă (dacă două ecuaţii sînt consecinţele celei de a treia).

Omografiile planului pe el însuşi se clasifică după poziţia şi natura punctelor fixe:

(I). Trei puncte fixe distincte şi reale. Dreptele care le unesc sînt drepte fixe. Este *omografia cu triunghi fix* (fig. 91, *a*).

(II). Două din cele trei puncte fixe sînt confundate. Atunci două din cele trei drepte fixe se confundă (fig. 91, *b*).

(III). Toate cele trei puncte fixe sînt confundate. In acest caz cele trei drepte fixe sînt şi ele confundate (fig. 91, *c*).

(IV). Două puncte fixe imaginare conjugate, al treilea punct fix real. Atunci dreapta fixă, care uneşte cele două puncte imaginare conjugate este reală, iar celelalte două drepte fixe sînt imaginare (fig. 91, *d*).

(V). *Omologia.* Pentru o rădăcină ρ_1 a ecuaţiei caracteristice, sistemul (29) se reduce la o singură ecuaţie (pentru fixarea ideilor să presupunem că se reduce la prima ecuaţie). Fiecare punct al dreptei

$$(c_{11}-\rho_1)x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3=0$$

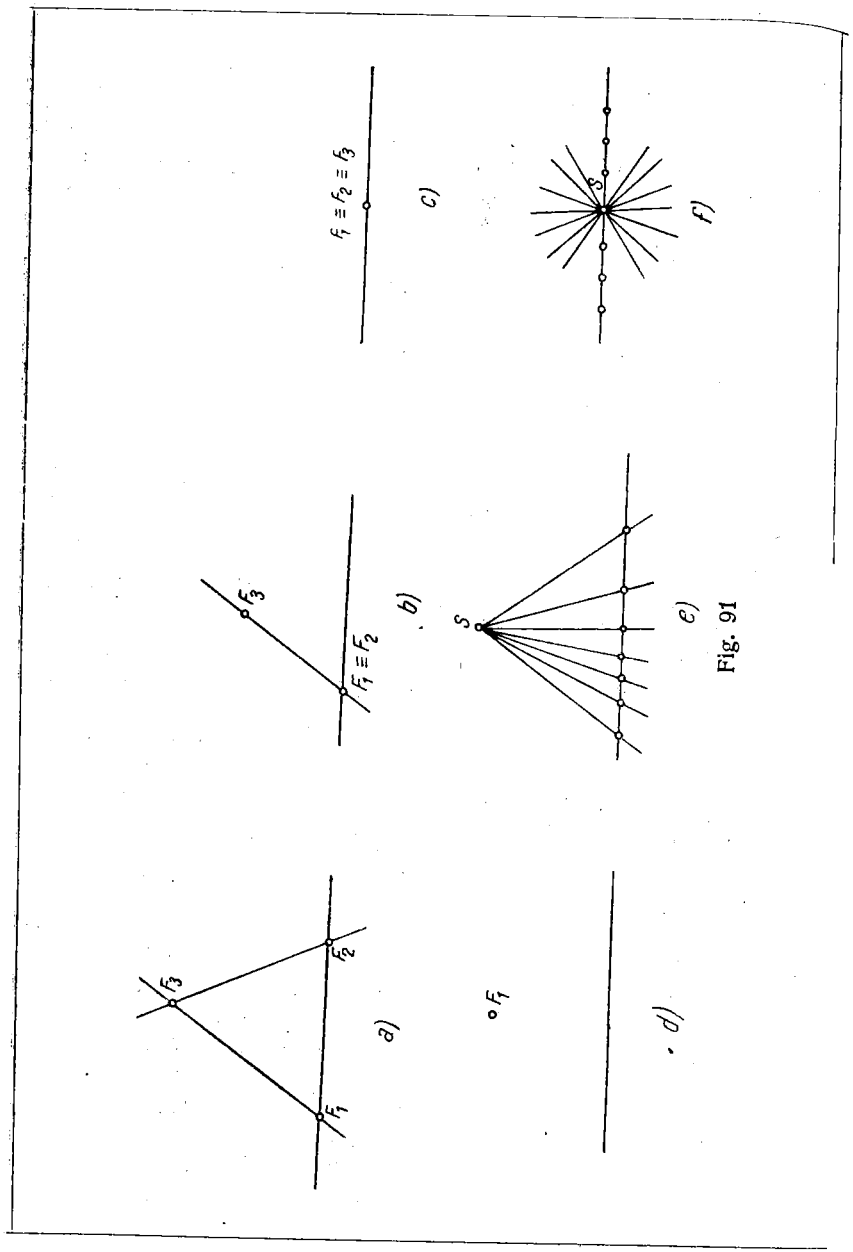


Fig. 91

ste un punct fix; deci, această dreaptă este fixă punct cu unct (*axa de omologie*). Se verifică uşor că ρ_1 este o rădăcină ublă a ecuaţiei (30). Mai avem o rădăcină căreia îi corespun- e încă un punct fix S. Dreptele trecînd prin S sînt fixe (fără fi fixe punct cu punct). Punctul S se numeşte *centrul omolo- iei* (fig. 91, *e*).

(VI). *Omologia specială.* Centrul omologiei se află pe axa ei ig. 91, *f*).

Dacă cunoaştem punctele fixe ale omografiei, o pereche de puncte corespondente determină omografia, punctele fixe repre- entînd trei perechi de puncte corespondente. La fel triunghiul ix, împreună cu o pereche de drepte date, determină omografia.

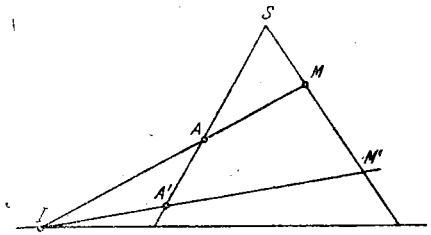


Fig. 92

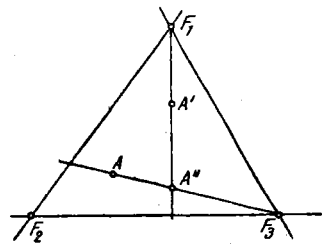


Fig. 93

In cazul omologiei, perechea de puncte corespondente A, A' trebuie să fie coliniare cu centrul S al omologiei (fig. 92). Con- strucţia imaginii unui punct oarecare M este foarte simplă în acest caz. Unim cu A' punctul de intersecţie I al axei de omo- logie cu dreapta AM şi la intersecţia acestei drepte cu SM găsim pe M'.

O omologie de tipul întîi revine la două omologii, aplicate succesiv. In adevăr, fie F_1, F_2, F_3 punctele fixe ale omografiei şi A, A' o pereche de puncte corespondente date (fig. 93). Fie A'' intersecţia dreptelor AF_3 şi $A'F_1$. Aplicăm întîi omologia cu axa F_1F_2 cu centrul în F_3, care transformă pe A în A'', apoi omologia cu axa F_2F_3 şi cu centrul F_1, care transformă pe A'' în A'. Această descompunere a omografiei în două omologii permite construirea imaginei unui punct oarecare folosind cons- trucţia din fig. 92.

Omografiile cu triunghi fix dat urmate de o afinitate con- venabilă ne dau o omografie oarecare. In adevăr, printr-o omografie cu triunghiul fix dat putem să transformăm dreapta

de la infinit în dreapta pe care o transformă omografia dată; rămîne să schimbăm în mod convenabil dreptele obișnuite între ele, deci să aplicăm încă o afinitate convenabilă. Această descompunere este avantajoasă în transformarea nomogramelor, deoarece omografiile cu triunghi dat depind numai de doi parametri, cu care este mai ușor de manevrat decît cu o familie de transformări cu opt parametri.

Un caz particular remarcabil al omologiilor este *omologia armonică*, în care punctele corespondente A și A' formează un biraport armonic împreună cu S și punctul de intersecție Q al axei cu dreapta SA (fig. 94). Atunci orice pereche de puncte corespondente formează un biraport armonic cu centrul S și punctul de intersecție al axei cu dreapta perechii considerate. Să ducem prin S dreapta Δ paralelă cu axa și dreapta Δ' la mijloc între axă și Δ. Semiplanul deasupra lui Δ și fîșia dintre Δ și Δ' se transformă între ele, la fel semiplanul de sub axă și fîșia dintre Δ' și axă.

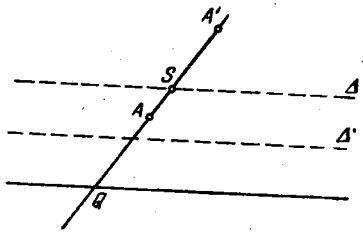


Fig. 94

Prin proiecția centrală a unui plan se obține o omografie. In adevăr, fie (P) și (P') două plane care se intersectează după dreapta d și O un punct exterior lor. Proiectînd un punct M al planului (P) și (P') din centrul O (fig. 95) se obține o corespondență biunivocă între punctele planelor proiective (P) și (P') [punctele planului (P), situate la intersecția lui cu planul ce trece prin O și este paralel cu (P'), au corespondentele lor pe dreapta de la infinit a planului (P') și la fel punctele planului (P'), care se găsesc la intersecția lui (P') cu planul dus prin O paralel cu (P), au corespondente pe dreapta de la infinit a planului (P)]. Această corespondență transformînd dreptele în drepte, este o omografie.

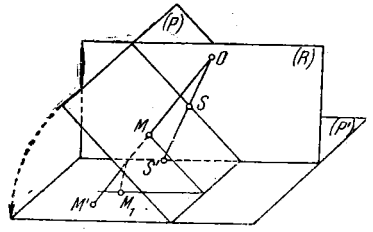


Fig. 95

Să rabatem planul (P) din fig. 95 pe planul (P'); atunci punctul M va ocupa poziția M_1 în planul (P'). Transformarea care face să corespundă punctului M_1 punctul M' este o omografie a planului (P) pe el însuși. Se vede ușor că această omografie se reduce la o omologie cu axa de omologie d și cu centrul de omologie S'. Centrul S' se găsește la intersecția planului (P') cu perpendiculara dusă din O pe planul bisector al unghiului diedru format de (P) și (P').

Transformarea proiectivă a nomogramelor se poate face proiectînd nomograma construită pe un ecran și, variind fie ecranul, fie planul nomogramei, putem urmări pe ecran diferite transformate ale nomogramei și a alege prin încercări aceea care corespunde din punct de vedere al erorilor. Metoda are dezavantajul că se lucrează prin încercări și se cere aparatură specială. In cap. X vom da o metodă sistematică pentru transformarea proiectivă a nomogramelor.

Omografiile fiind transformări liniare între coordonate, *conservă gradul unei curbe algebrice*. Astfel, o *conică* care se definește prin ecuația de gradul al doilea

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \alpha_{ik} x_i x_k = 0 \quad , \quad \alpha_{ki} = \alpha_{ik} \tag{31}$$

se transformă prin omografie tot într-o conică.

Conica depinde de cinci parametri, unul din cei șase coeficienți ai ecuației (31) putînd fi ales arbitrar. Cinci puncte din care patru nu sînt situate pe aceeași dreaptă, determină complet o conică. La fel există o singură conică care trece prin trei puncte date și este tangentă la două drepte în două din aceste puncte (și aici avem cinci puncte date, din care două perechi sînt confundate).

Aplicăm membrului întîi al ecuației (31) rezultatul clasic din teoria formelor pătratice, conform căreia o formă pătratică poate fi adusă prin transformări liniare la una din următoarele cinci forme canonice:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \tag{I}$$

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \tag{II}$$

$$x_1^2+x_2^2=0, \tag{III}$$

$$x_1^2-x_2^2=0, \tag{IV}$$

$$x_1^2=0. \tag{V}$$

Transformările liniare ale coordonatelor proiective x_1, x_2, x_3 fiind omografii, rezultă că orice conică poate fi transformată

printr-o omografie într-una din cele cinci conice arătate mai sus. Acest rezultat se exprimă astfel: *din punct de vedere proiectiv există în total cinci conice distincte* (două curbe care se pot transforma una în alta printr-o omografie se consideră egale din punct de vedere proiectiv). Conicele (III), (IV) și (V) degenerează într-o pereche de drepte (imaginare, reale distincte, respectiv reale confundate), iar conica (I) este o linie imaginară. *Conicele propriu-zise (elipsa, hiperbola și parabola)* au ecuații ce se pot aduce la forma (II), deci ele *sînt egale din punct de vedere proiectiv.*

10. APLICAȚII LA TRANSFORMAREA NOMOGRAMELOR

Aplicînd nomogramei unei ecuații date o omografie obținem o altă nomogramă pentru aceeași ecuație. Acest fapt evident l-am remarcat în cap. VII, 3.

In cap. IV, pct. 2, 3, 4, am construit diferite nomograme pentru cele trei forme canonice ale ecuațiilor de ordinul al treilea nomografic. Vom cerceta acum pentru fiecare din formele canonice, dacă diferitele nomograme obținute pot fi deduse una din alta prin omografie. Cu alte cuvinte, care din ele sînt egale și care sînt diferite din punct de vedere proiectiv?

Pentru forma canonică $f_1 = f_2 f_3$ am găsit o nomogramă în forma „N", o nomogramă în formă de triunghi, o nomogramă cu două scări pe o conică și una pe o coardă a conicei și o nomogramă cu toate scările pe o cubică cu un punct dublu. O nomogramă cu scările pe laturile unui triunghi poate fi transformată, chiar printr-o afinitate, într-o nomogramă cu scările pe laturile unui triunghi oarecare (trei perechi de puncte determină o afinitate, deci putem alege acea afinitate pentru care vîrfurile triunghiurilor se corespund). Printr-o omografie putem transforma un triunghi astfel, ca un vîrf să-i corespundă unui punct de la infinit (fig. 96), deci *toate nomogramele în formă de triunghi sau „N" sînt egale din punct de vedere proiectiv.*

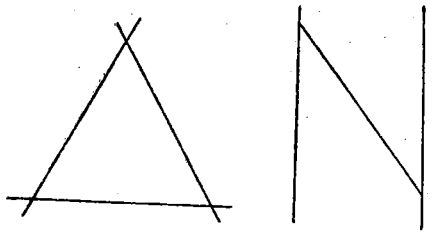


Fig. 97

In cap. IV, 2, am dat o nomogramă pentru ecuația $f_1 = f_2 f_3$ cu două scări pe un cerc și una pe diametru, cum și o nomogramă cu două scări pe o parabolă și una pe axa ei.

Vom arăta că fiind date două conice oarecare și cîte o coardă oarecare a lor, se pot găsi omografii care le transformă una într-alta (chiar o infinitate de omografii). In adevăr, fie Γ și Γ' cele două conice cu AB și $A'B'$ coardele lor date (fig. 97). Notăm cu C punctul comun al tangentelor duse în punctele A

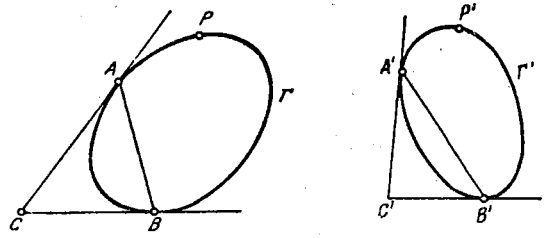


Fig. 97

și B la conica Γ și C' cel al tangentelor similare la conica Γ'. Fie P și P' cîte un punct pe conicele Γ și Γ'. Să considerăm omografia determinată de perechile de puncte A, A'; B, B'; C, C'; P, P'. Prin această omografie conica Γ se transformă într-o conică care trece prin A', B', P' și este tangentă dreptelor $A'C'$ și $B'C'$. Avînd în vedere că aceste cinci condiții determină în mod unic o conică, transformata conicei Γ este Γ'. Deoarece punctul P' poate fi ales ori unde pe conica Γ', rezultă că există o infinitate de omografii care transformă conica Γ în Γ'.

Aplicînd acest rezultat pentru nomograma cu două scări pe un cerc și a treia pe un diametru, obținem *nomograme cu două scări pe o conică arbitrară și a treia pe o coardă arbitrară a ei.*

Se arată că toate cubicele cu punct dublu (propriu-zise) sînt proiectiv egale[1]). Fig. 96 și 97 sînt evident distincte din punct de vedere proiectiv, de asemenea se deosebesc și de o cubică. Deci, pentru forma (I) canonică am găsit trei nomograme distincte din punct de vedere proiectiv.

La fel, *toate cele opt tipuri de nomograme găsite pentru ecuațiile de ordinul al treilea nomografic, arătate în cap, V, 4, sînt proiectiv distincte, iar nomogramele din același tip sînt proiectiv egale.*

---

[1]) *G. Vrănceanu*: Geometrie analitică și proiectivă. Editura Tehnică, București, 1954, p. 250.

In cap. IV am utilizat de repetate ori operaţii asupra elementelor determinantului din ecuaţia lui Soreau, pentru a o pune sub altă formă, obţinînd în felul acesta diferite variante de nomograme pentru aceeaşi ecuaţie. Aceste variante decurg una din alta prin omografii. In adevăr, operaţiile executate asupra elementelor determinantului din ecuaţia

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (32)$$

sînt cazuri particulare ale înmulţirii ecuaţiei lui Soreau cu determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

unde a_{ik} sînt numere oarecare. Ecuaţia lui Soreau devine:

$$\begin{vmatrix} a_{11}f_1+a_{12}g_1+a_{13}h_1 & a_{21}f_1+a_{22}g_1+a_{23}h_1 & a_{31}f_1+a_{32}g_1+a_{33}h_1 \\ a_{11}f_2+a_{12}g_2+a_{13}h_2 & a_{21}f_2+a_{22}g_2+a_{23}h_2 & a_{31}f_2+a_{32}g_2+a_{33}h_2 \\ a_{11}f_3+a_{12}g_3+a_{13}h_3 & a_{21}f_3+a_{22}g_3+a_{23}h_3 & a_{31}f_3+a_{32}g_3+a_{33}h_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (33)$$

Ecuaţiile scărilor z_i în coordonate omogene ale nomogramei corespunzătoare ecuaţiei (32) sînt:

$$\rho X = f_i, \quad \rho Y = g_i, \quad \rho Z = h_i,$$

iar cele corespunzătoare ecuaţiei (33) sînt:

$$\rho X = a_{11}f_i + a_{12}g_i + a_{13}h_i,$$
$$\rho Y = a_{21}f_i + a_{22}g_i + a_{23}h_i,$$
$$\rho Z = a_{31}f_i + a_{32}f_i + a_{33}h_i.$$

Comparînd aceste formule cu formulele (25) din cap. VIII, 9, vedem că varianta nouă se obţine din cea veche printr-o omografie.

Operaţiile executate asupra elementelor determinantului lui Massau corespund deci la omografii particulare.

11. CORELAŢIA

Corelaţia este transformarea unui plan (P) într-un plan (P'), prin care punctele din (P) le face să le corespundă dreptele din (P') în aşa fel, ca la puncte situate pe o dreaptă Δ să le corespundă drepte ce trec printr-un punct M'. Dreptei Δ îi putem face să-i corespundă punctul M'. Atunci punctelor şi dreptelor din (P) le corespund drepte şi puncte din (P') în aşa fel ca, dacă un punct şi o dreaptă din (P) se aparţin, atunci imaginile lor de asemenea se aparţin. In particular, trei drepte concurente se transformă în trei puncte coliniare.

O formă de speţa întîi din (P) se transformă într-o formă de speţa întîi în (P'), proiectivă cu cea dată (punctualele se transformă în fascicule de drepte, iar fasciculele de drepte în punctuale).

Polaritatea, adică transformarea prin care fiecărui punct îi facem să-i corespundă polara sa în raport cu o conică dată, este un exemplu de corelaţie. La puncte situate pe o dreaptă le corespund polare ce trec prin polul dreptei considerate.

Dacă aplicăm succesiv două corelaţii obţinem o omografie.

Omografiile şi corelaţiile la un loc se numesc *transformările proiective ale planului.*

Să considerăm o nomogramă cu reţele formată din trei familii de *drepte* cotate şi fie

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 0 \qquad (34)$$

ecuaţia corespunzătoare. Supunem planul acestei nomograme la o corelaţie (fig. 98). Unei drepte cotate din familia $z_i (i = 1, 2, 3)$ îi corespunde un punct cu aceeaşi cotă, iar mulţimii dreptelor familiei z_i îi corespunde o mulţime de puncte cotate, care formează o scară z_i. In acest fel, celor trei familii de drepte cotate le corespund trei scări. Valorilor z_1, z_2, z_3, care verifică ecuaţia (34), le corespund în nomograma cu reţele trei drepte concurente. Aceste drepte se transformă în trei puncte coliniare, avînd aceleaşi cote ca şi dreptele. Deci, punctele corespunzătoare valorilor z_1, z_2, z_3 pe cele trei scări sînt coliniare. Avem rezultatul fundamental:

Printr-o corelaţie, o nomogramă cu familii de drepte cotate se transformă într-o nomogramă cu puncte aliniate pentru aceeaşi ecuaţie.

Rezultă că ecuaţiile rezolvabile prin nomograme cu puncte aliniate sînt aceleaşi ca şi cele rezolvabile prin nomograme cu

drepte cotate, fapt pe care l-am recunoscut pe altă cale în cap. IV, 1.

In cazul particular, cînd familia de drepte cotate z_i este un fascicul ce trece printr-un punct fix (la distanţă finită sau

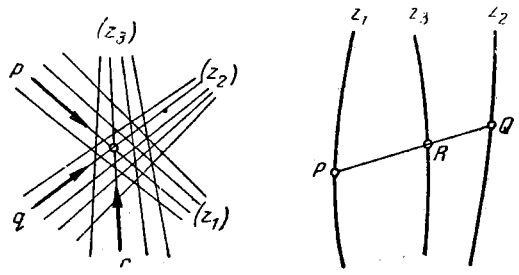


Fig. 98

infinită) scara z_i corespunzătoare este rectilinie. Dacă toate trei familiile de drepte cotate sînt fascicule, atunci nomograma cu puncte aliniate are toate scările rectilinii. In felul acesta se vede legătura dintre rezultatele găsite, pe de o parte, în cap. III, 2 şi pe de altă parte în cap. IV, 2, 3.

CAPITOLUL IX

CONSTRUCŢIA SCĂRILOR

1. INTERPOLARE PROIECTIVĂ

Construcţia efectivă a scării rectilinii, cînd se cunoaşte ecuaţia ei

$$x=\mu f(z)=F(z), \qquad (1)$$

intervalul de variaţie fiind $\alpha \leqq z \leqq \beta$, cere calcularea unui număr mare de puncte, muncă de obicei foarte anevoioasă, cînd $f(z)$ este o expresie complicată. Plasarea multor puncte calculate pe scară după abscisele lor prezintă de asemenea dificultăţi.

In cap. I, 2 am remarcat deja că este suficient să construim un număr restrîns de puncte după ecuaţia (1) şi punctele intermediare să le obţinem cu operaţia următoare, numită *interpolare grafică proiectivă.*

Fie z_1, z_0, z_2[1]) cotele punctelor M, N, P (fig. 99) construite

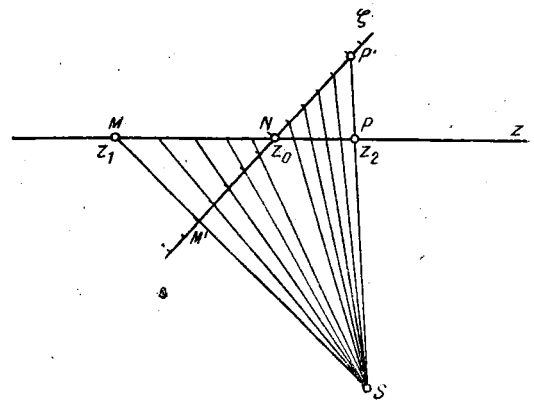


Fig. 99

după formula (1). Aşezăm prin punctul N o scară regulată ξ astfel încît cota lui N pe scara ξ să fie $\xi=z_0$. Luăm punctele M' şi P' pe scara ξ de cote z_1, respectiv z_2, apoi construim punctul S de intersecţie al dreptelor MM' şi PP'. Proiectînd scara ξ pe scara z, obţinem pe porţiunea MP o scară proiectivă, care aproximează scara z pe această porţiune.

Pentru a determina ecuaţia

$$x=\varphi(z)=\frac{az+c}{z+b} \qquad (2)$$

a scării proiective, cu care am aproximat scara dată (1), trebuie să scriem că

$$\varphi(z_i)=F(z_i), \quad (i=0,\ 1,\ 2). \qquad (3)$$

Din sistemul de ecuaţii (3) putem determina coeficienţii a, b şi c.

[1]) In acest capitol fiind studiată numai scara, intervine o singură variabilă, pe care o notăm cu z şi, spre deosebire de cazul din celelalte capitole, z_i nu va nota o variabilă ci o valoare dată lui z.

Inlocuind coeficienţii astfel determinaţi în (2), obţinem

$$\varphi(z)=\frac{\begin{vmatrix} F_0 & z_0-z & F_0(z_0-z) \\ F_1 & z_1-z & F_1(z_1-z) \\ F_2 & z_2-z & F_2(z_2-z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0-z & F_0(z_0-z) \\ 1 & z_1-z & F_1(z_1-z) \\ 1 & z_2-z & F_2(z_2-z) \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

unde am notat pentru prescurtare $F_i=F(z_i)$ $(i=0, 1, 2)$.

Putem verifica şi direct că în membrul al doilea din formula (4) avem o funcţie omografică, care coincide cu $F(z)$ în punctele z_0, z_1, z_2. In adevăr, înlocuind z cu z_i se obţine imediat F_i. Observăm că (4) se mai poate scrie sub forma

$$\varphi(z)=\frac{\begin{vmatrix} F_0 & z-z_0 & F_0z_0 \\ F_1 & z-z_1 & F_1z_1 \\ F_2 & z-z_2 & F_2z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & F_0(z-z_0) \\ 1 & z_1 & F_1(z-z_1) \\ 1 & z_2 & F_2(z-z_2) \end{vmatrix}}, \tag{4'}$$

deci numărătorul şi numitorul sînt polinoame de gradul întîi în z.

Comparînd (4') cu (2), avem:

$$b=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & F_0z_0 \\ 1 & z_1 & F_1z_1 \\ 1 & z_2 & F_2z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & F_0 \\ 1 & z_1 & F_1 \\ 1 & z_2 & F_2 \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Pentru a da o altă formă expresiei lui b, introducem funcţia auxiliară

$$\Phi(z)=\begin{vmatrix} 1 & z_0 & F_0(z_0+b) \\ 1 & z_1 & F_1(z_1+b) \\ 1 & z & F(z)(z+b) \end{vmatrix},$$

care se anulează pentru z_0 şi z_1, deoarece prin înlocuire obţinem determinanţi cu două linii egale. Pentru $z=z_2$ din (5) rezultă şi $\Phi(z_2)=0$. Deoarece $\Phi(z)$ are trei rădăcini în intervalul I, determinat de cea mai mică şi cea mai mare din valorile z_0, z_1, z_2, pe baza teoremei lui Rolle $\Phi'(z)$ are cel puţin două rădăcini şi $\Phi''(z)$ cel puţin o rădăcină ξ_1 în acest interval.

Deci,

$$\Phi''(\xi_1)=\begin{vmatrix} 1 & z_0 & F_0(z_0+b) \\ 1 & z_1 & F_1(z_1+b) \\ 0 & 0 & F''(\xi_1)(\xi_1+b)+2F'(\xi_1) \end{vmatrix}=0,$$

în care

$$b=-\xi_1-2\frac{F'(\xi_1)}{F''(\xi_1)},\ \xi_1\in I. \tag{6}$$

Pentru a evalua eroarea provenită din înlocuirea scării iniţiale (1) cu scara proiectivă (2), vom calcula restul

$$R(z)=F(z)-\varphi(z). \tag{7}$$

Notăm

$$\frac{F(z)(z+b)-(az+c)}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}=K \tag{8}$$

şi considerăm funcţia auxiliară

$$\Psi(u)=F(u)(u+b)-(au+c)-K(u-z_0)(u-z_1)(u-z_2).$$

Avem, din (8), $\Psi(z)=0$ şi din (3), $\Psi(z_0)=\Psi(z_1)=\Psi(z_2)=0$. Aplicînd raţionamentul de mai sus, se găseşte pentru $z\in I$,

$$\Psi'''(\xi)=\frac{d^3}{du^3}\Big[F(u)(u+b)\Big]_{z=\xi}-3!\ K=0,$$

unde ξ este o valoare din intervalul I. Deci,

$$K=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\Big[F(z)(z+b)\Big]_{z=\xi}.$$

Din (8) rezultă pentru rest expresia

$$R(z)=\frac{1}{3!}\frac{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}{z+b}\frac{d^3}{dz^3}\Big[F(z)(z+b)\Big]_{z=\xi},\ \xi\in I. \tag{9}$$

Să punem expresia (9) a restului sub o formă mai convenabilă. Pentru aceasta notăm

$$L(z)=Az^2+Bz+C,$$

polinomul de interpolare al lui Lagrange a funţiei $F(z)$, pentru

care $L(z_i)=F_i (i=0,\ 1,\ 2)$. Coeficientul A se poate evalua folosind funcţia auxiliară

$$\chi(z)=F(z)-L(z),$$

care se anulează pentru $z_0,\ z_1,\ z_2$. Deci,

$$\chi(\xi_2)=F''(\xi_2)-2A=0, \quad \xi_2 \in I,$$

de unde

$$A=\frac{1}{2}F''(\xi_2), \quad \xi_2 \in I. \tag{10}$$

Aplicînd (9) pentru funcţia $L(z)$ în loc de $F(z)$ şi observînd că derivata a treia a funcţiei $L(z)(z+b)$ este egală cu $6A$, obţinem

$$L(z)-\varphi(z)=\frac{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}{z+b}\cdot A$$

şi, ţinînd seama de (5) şi (10),

$$L(z)-\varphi(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\cdot\frac{\frac{1}{2}F''(\xi_2)}{z-\xi_1-2\frac{F'(\xi_1)}{F''(\xi_1)}} \tag{11}$$

Din (7) şi (11) se obţine:

$$R(z)=[F(z)-L(z)]+[L(z)-\varphi(z)]=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\frac{F'''(\xi_3)}{6}-$$

$$-\frac{1}{2}(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\frac{F''(\xi_1)F''(\xi_2)}{2F'(\xi_1)-(2-\xi_1)F''(\xi_1)}.$$

Am aplicat pentru prima diferenţă restul formulei lui Lagrange (care de altfel se poate obţine printr-un raţionament analog cu cel folosit mai înainte de repetate ori).

Avem, în definitiv,

$$R(z)=\frac{1}{6}(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\left[F'''(\xi_3)-\frac{3F''(\xi_1)F''(\xi_2)}{2F'(\xi_1)+(\xi_1-z)F''(\xi_1)}\right], \tag{12}$$

unde $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$, sînt trei valori din intervalul I.

Presupunînd că $z_1<z_0<z_2$ şi $z_2-z_0=z_0-z_1=h$, produsul $|(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)|$ devine

$$|t|(h^2-t^2),$$

unde am notat $t=z-z_0$. Acest produs este maxim, cînd $t=\frac{h}{\sqrt{3}}$ şi valoarea lui maximă este $\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3$. Obţinem următoarea majorare a restului

$$|R|\leq\frac{h^3}{9\sqrt{3}}M, \tag{13}$$

unde

$$M=\max\left|F'''(\xi_3)-\frac{3F''(\xi_1)F''(\xi_2)}{2F'(\xi_1)+(\xi_1-z)F''(\xi_1)}\right|, \tag{14}$$

cu $z_0-h\leq\xi_i\leq z_0+h$, $z_0-h\leq z\leq z_0+h$.

In cazul cînd h este mic în comparaţie cu $\left|\frac{F'(z_0)}{F''(z_0)}\right|$, atunci

$$M\approx\left|F'''(z_0)-\frac{3[F''(z_0)]^2}{2F'(z_0)}\right|. \tag{15}$$

Exemplu. Să se construiască scara

$$x=\mu z^3$$

în intervalul $10\leq z\leq 20$, lungimea scării fiind $L=280$ mm şi admiţînd erori de construcţie mai mici decît 0,1 mm.

Modulul scării este

$$\mu=\frac{L}{f(20)-f(10)}=\frac{280}{7\,000}=0{,}04\text{ mm},$$

iar

$$M=\max\left|6-\frac{18\xi_2}{2\xi_1-z}\right|, \quad \text{pentru } z_0-h\leq\xi_1,\ \xi_2,\ z\leq z_0+h.$$

Avem:

$$\frac{z_0-h}{z_0+3h}<\frac{\xi_2}{2\xi_1-z}<\frac{z_0+h}{z_0-3h};$$

membrul întîi fiind crescător şi membrul al treilea descrescător şi luînd $h<1{,}5$, obţinem:

$$0{,}5<\frac{10-1{,}5}{10+4{,}5}<\frac{\xi_2}{2\xi_1-z}<\frac{10+1{,}5}{10-4{,}5}<2{,}1,$$

Aplicînd (13), avem:

$$|R|<\frac{h^3}{9\sqrt{3}}1{,}272$$

şi determinăm pe h astfel ca să avem

$$\frac{1{,}272}{9\sqrt{3}}h^3<0{,}1.$$

Găsim

$$h < 1{,}07,$$

deci ajunge să calculăm 11 puncte cotate (inclusiv extremităţile), iar restul punctelor se construiesc prin interpolare proiectivă.

Dacă intervalele grafice obţinute cu un pas anumit diferă puţin între ele, atunci putem folosi o simplă *interpolare liniară* pentru a găsi subdiviziunile (intervalele grafice se subdivid în părţi egale).

2. OBŢINEREA ERORILOR MINIME PRIN TRANSFORMAREA PROIECTIVĂ A SCĂRILOR

Să considerăm o nomogramă cu puncte aliniate, care are scara rezultatului rectilinie cu ecuaţia

$$x=\mu f(z), \quad \alpha \leqq z \leqq \beta.$$

Am văzut în cap. VII, 2 că eroarea absolută a rezultatului este invers proporţională cu m şi eroarea relativă este invers proporţională cu m_1, unde

$$m=\min_{\alpha \leqq z \leqq \beta} |f'(z)| \quad \text{şi} \quad m_1=\min_{\alpha \leqq z \leqq \beta} |z f'(z)|. \tag{16}$$

Aplicînd planului nomogramei o omografie, scara z se transformă într-o altă scară rectilinie proiectivă cu cea iniţială. Neputînd mări dimensiunile desenului, vom presupune că scara transformată are aceeaşi lungime, deci μ nu se schimbă; se schimbă însă $f(z)$ şi cu aceasta m şi m_1. Pentru a asigura erorile cele mai mici posibile trebuie să alegem transformarea proiectivă a scării z, în aşa fel, ca m respectiv m_1 să fie cel mai mare posibil.

Printr-o transformare liniară convenabilă, capetele scării z vor avea abscisele $x=0$ şi $x=1$, iar ecuaţia scării se va scrie astfel

$$x=\varphi(z), \tag{17}$$

unde

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}. \tag{18}$$

Funcţia (17) transformă intervalul (α, β) în intervalul $(0, 1)$ al axei x.

Vom considera proiectivităţile axei x, care conservă segmentul $(0, 1)$. Acestea se scriu cu un singur parametru

$$\xi=\frac{(k+1)x}{kx+1}, \tag{19}$$

unde $k>-1$. In adevăr, pentru $x=0$ avem $\xi=0$ şi pentru $x=1$ avem $\xi=1$. Punînd condiţia ca interiorul segmentului $(0, 1)$ să se transforme în interiorul aceluiaşi segment, obţinem $k+1>0$.

Prin proiectivitatea (19) ecuaţia (17) a scării devine

$$\xi=\frac{(k+1)\varphi(z)}{k\varphi(z)+1}=\psi_k(z). \tag{20}$$

Pentru ca scara (20) să aibă cea mai mică eroare absolută posibilă, trebuie să *determinăm parametrul k astfel încît*

$$m(k)=\min_{\alpha \leqq z \leqq \beta} |\psi_k'(z)| \tag{21}$$

să fie cel mai mare posibil. Am notat $\psi_k'(z)=\frac{d}{dz}\psi_k(z)$.

Pentru ca eroarea relativă a scării (20) să fie cea mai mică posibilă *trebuie ca*

$$\overline{m}(k)=\min_{\alpha \leqq z \leqq \beta} |z\psi_k'(z)| \tag{22}$$

să fie maxim. Expresiile $m(k)$ şi $\overline{m}(k)$ s-au format din formulele (16) aplicate la funcţia $\psi_k(z)$. Calculînd derivata

$$\psi_k'(z)=\frac{k+1}{[k\varphi(z)+1]^2}\cdot\varphi'(z), \tag{23}$$

se observă că ea se anulează în aceleaşi puncte ca şi $\varphi'(z)$, Stim că dacă $\varphi'(z)$ se anulează într-un punct de pe segmentul $(0, 1)$, atunci eroarea devine infinită pentru scara iniţială şi, prin urmare, acest neajuns se păstrează la toate scările transformate (20). In cele ce urmează, *vom presupune că* $\varphi'(z)$ *nu se anulează pe* (α, β) şi, pentru a simplifica scrierea, admitem

$$\varphi'(z)>0, \quad \alpha \leqq z \leqq \beta.$$

Atunci $\psi_k'(z)>0$. In cazul formulei (22) vom admite şi $z>0$.

Pentru a enunţa rezultatul general referitor la determinarea lui k astfel ca (21), respectiv (22), să fie maxime, introducem următoarele notaţii: în (21) $m(k)$ este minimul lui $\psi_k'(z)$ cînd z

descrie intervalul (α, β) sau, ceea ce este același lucru, cînd $\xi=\psi_k(z)$ descrie intervalul $(0, 1)$. Făcînd pe $\xi=\psi_k(z)$ să descrie numai jumătatea din stînga a acestui interval, respectiv cea din dreapta, scriem:

$$m_s(k)=\min_{0\le\psi_k(z)\le\frac{1}{2}}\psi_k'(z),\quad \overline{m}_s(k)=\min_{0\le\psi_k\le\frac{1}{2}} z\cdot\psi_k'(z),$$

$$m_d(k)=\min_{\frac{1}{2}\le\psi_k(z)\le 1}\psi_k'(z),\quad \overline{m}_d(k)=\min_{\frac{1}{2}\le\psi_k\le 1} z\cdot\psi_k'(z).$$

Numărul $m(k)$ este evident cel mai mic dintre $m_s(k)$ și $m_d(k)$, iar $\overline{m}(k)$ este cel mai mic dintre $\overline{m}_s(k)$ și $\overline{m}_d(k)$.

Se demonstrează[1]) *proprietățile*: funcția $m_s(k)$ crește monoton cînd k crește de la -1 la ∞ și $\lim_{k\to\infty} m_s(k)=+\infty$, iar funcția $m_d(k)$ descrește monoton cînd k crește de la -1 la ∞ și $\lim_{k\to -1} m_d(k)=+\infty$. Aceste proprietăți sînt valabile și pentru funcțiile $\overline{m}_s(k)$, respectiv $\overline{m}_d(k)$. Din aceste proprietăți rezultă că există o singură valoare k_0 pentru care $m_s(k_0)=m_d(k_0)$ și o singură valoare k_1 pentru care $\overline{m}_s(k_1)=\overline{m}_d(k_1)$. Pentru $k\neq k_0$, una din valorile $m_s(k)$ sau $m_d(k)$ este mai mică decît $m_d(k_0)$, deci $m(k)<m_s(k_0)=m_d(k_0)$. La fel, $\overline{m}(k)<\overline{m}_s(k_1)=\overline{m}_d(k_1)$. Putem deci enunța teoremele.

(21) *Există o singură valoare k_0 a parametrului k pentru care este maxim. Această valoare se obține din condiția*

$$m_s(k_0)=m_d(k_0).$$

(22) *Există o singură valoare k_1 a parametrului k pentru care este maxim, care se obține din condiția*

$$\overline{m}_s(k_1)=\overline{m}_d k_1).$$

Rezultă următoarea construcție grafică pentru determinarea aproximativă a valorilor k_0 și k_1. Calculăm $m_s(0)$, $m_d(0)$, $m_s(k')$ și $m_d(k')$, unde k' este un număr arbitrar, și figurăm punctele $A[0, m_s(0)]$, $B[0, m_d(0)]$, $C[k', m_s(k')]$ și $D[k', m_d(k')]$ (fig. 100). Fie k'' abscisa punctului de intersecție al dreptelor AC și BD. În aplicații, de obicei, k'' este o aproximație suficient de bună pentru k_0. Avînd în vedere că $m(k_0)$ este cuprins între valorile $m_s(k'')$ și $m_d(k'')$, diferența $|m_s(k'')-m_d(k'')|$ ne dă o măsură a preciziei cu care $m(k'')$ aproximează pe $m(k_0)$. La nevoie, procedeul din fig. 100 se repetă luînd în loc de k pe k''.

Valoarea k_1 se determină prin aceeași metodă.

În practică se întîlnesc foarte frecvent următoarele două cazuri particulare studiate de M. V. Pentkovski[1]):

1) oricare ar fi k, funcția $\psi_k'(z)$ (respectiv $z\psi_k'(z)$) nu admite nici un minim relativ în intervalul (α, β);

2) oricare ar fi k, funcția $\psi_k'(z)$ (respectiv $z\psi_k'(z)$) nu admite nici un maxim relativ în intervalul (α, β).

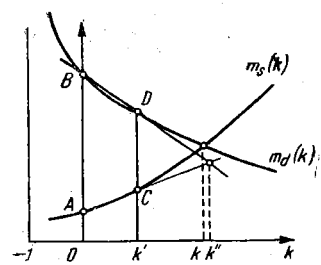


Fig. 100

În cazul 1), $\psi_k'(z)$ are cel mult un maxim relativ—și deci $\min_{\alpha\le z\le\beta}\psi_k'(z)$ este atins într-unul din capetele intervalului (α, β). Pentru ca $m_s(k)$ să fie egal cu $m_d(k)$ trebuie ca $\psi_k'(z)$ să ia aceeași valoare în capetele intervalului, deci

$$\psi_k'(\alpha)=\psi_k'(\beta),$$

sau ținînd seama de (23)

$$\frac{k+1}{[k\varphi(\alpha)+1]^2}\varphi'(\alpha)=\frac{k+1}{[k\varphi(\beta)+1]^2}\varphi'(\beta);$$

dar $\varphi(\alpha)=0$ și $\varphi(\beta)=1$, deci

$$k_0=\sqrt{\frac{\varphi'(\beta)}{\varphi'(\alpha)}}-1. \tag{24}$$

Trecînd la funcția inițială $f(z)$ prin intermediul formulei (18), avem

$$k_0=\sqrt{\frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}}-1. \tag{25}$$

[1]) *F. Radó*. Cea mai bună transformare proiectivă a scărilor, Studii și Cercetări, seria mat., Cluj, 1956.

[1]) *M. V. Pentkovski*, Nomografia, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, București, 1952.

M. V. Pentkovski, Transformarea proiectivă a nomogramelor, GTTI, 1937.

Dacă în cazul 1) căutăm cea mai mică eroare relativă, atunci $z\psi_k'(z)$ trebuie să ia aceeaşi valoare în capetele intervalului (α, β), deci

$$\alpha\psi_k'(\alpha) = \beta\psi_k'(\beta),$$

din care găsim

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta\varphi'(\beta)}{\alpha\varphi'(\alpha)}} - 1 \tag{26}$$

sau

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta f'(\beta)}{\alpha f'(\alpha)}} - 1. \tag{27}$$

In cazul 2), $\psi_k'(z)$ sau are un minim relativ sau variază monoton. Numărul $m_s(k)$, atunci este egal cu $m_d(k)$, dacă aceste minime sînt atinse în mijlocul segmentului $(0, 1)$; iar minimul lui $\psi_k'(z)$ pentru $\alpha \leqq z \leqq \beta$ este atins tot acolo. Să notăm cu z' valoarea lui z pentru care $\psi_k(z) = \frac{1}{2}$. Pentru determinarea lui k_0 formăm două ecuaţii, care conţin ca necunoscută pe k_0 şi z'. Scriem că $\psi_k'(z)$ admite un minim în punctul $z = z'$; din (23) se obţine

$$\frac{d}{dz}\psi_k'(z) = (k+1)\frac{\varphi''(z)[k\varphi(z)+1] - 2k\varphi'^2(z)}{[k\varphi(z)+1]^3}, \tag{28}$$

deci avem

$$\varphi''(z')[k\varphi(z')+1] - 2k\varphi'^2(z) = 0. \tag{29}$$

Pe de altă parte, $\psi_k(z') = \frac{1}{2}$ sau, ţinînd seama de (20),

$$(k+2)\varphi(z') = 1. \tag{30}$$

Parametrul k_0 se determină rezolvînd sistemul format din ecuaţiile (29) şi (30). In loc de ecuaţia (29) putem utiliza ecuaţia

$$\varphi(z')[1-\varphi(z')]\varphi''(z') - [1-2\varphi(z')]\varphi'^2(z') = 0, \tag{31}$$

obţinută prin eliminarea lui k dintre (28) şi (29).

Dacă căutăm în cazul 2) cea mai mică eroare relativă, atunci pentru a determina pe k_1 trebuie să scriem că funcţia $z\psi_k'(z)$ admite un minim pentru $z = z'$. Se obţine sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} [z\varphi''(z) + \varphi'(z)][k\varphi(z)+1] - 2kz\varphi'^2(z) &= 0 \\ (k+2)\varphi(z) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

cu necunoscutele k şi z. Soluţia ne dă pe k_1 şi z'.

Să stabilim acum condiţii necesare şi suficiente pentru $\varphi(z)$ care să ne asigure cazul 1) sau 2).

Cazul 1) are loc atunci şi numai atunci cînd fiecare z ce anulează derivata (28) îndeplineşte şi condiţia

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi_k'(z) \leqq 0,$$

k fiind oarecare; adică valorile lui z, care verifică

$$\varphi''(z)[k\varphi(z)+1] - 2k\varphi'^2(z) = 0 \tag{33}$$

satisfac şi

$$\frac{-3k\varphi'(z)\varphi''(z) + [k\varphi(z)+1]\varphi'''(z)}{[k\varphi(z)+1]^2} \leqq 0. \tag{34}$$

Rezolvînd (33) în raport cu k:

$$k = \frac{\varphi''(z)}{2\varphi'^2(z) - \varphi(z)\varphi''(z)},$$

şi ţinînd seama de $k > -1$, avem pentru valorile z în care există extrem pentru un anumit k.

$$\frac{\varphi''(z)}{2\varphi'^2(z) - \varphi(z)\varphi''(z)} \geqq -1. \tag{35}$$

Inlocuind k în (34) obţinem

$$2\varphi'(z)\varphi'''(z) - 3\varphi''^2(z) \leqq 0 \tag{36}$$

(s-a avut în vedere ipoteza făcută $\varphi'(z) > 0$).

Prin urmare, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca să avem cazul* 1) *este ca valoarea lui z care verifică* (35) *să verifice şi* (36).

In mod analog obţinem şi *condiţia pentru cazul* 2): *orice valoare a lui z care satisface* (35) *trebuie să satisfacă şi*

$$2\varphi'(z)\varphi'''(z) - 3\varphi''^2(z) \geqq 0. \tag{37}$$

Dacă cerem verificarea condiţiei (36) respectiv (37) pentru $\alpha \leqq z \leqq \beta$, obţinem evident o condiţie suficientă pentru cazul 1) respectiv 2), care de multe ori ajunge în aplicaţii.

Dacă se pune problema erorii relative, atunci pentru cazul 1) şi 2) avem următoarele *condiţii suficiente:*

$$z^2[2\varphi'(z)\varphi'''(z) - 3\varphi''^2(z)] - \varphi'^2(z) \begin{cases} \leqq 0, & \text{cazul 1)} \\ \geqq 0, & \text{cazul 2),} \end{cases}$$

pentru $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$. Aceste condiții se stabilesc în baza unui calcul analog cu cel de sus.

In multe cazuri problema celei mai bune transformări proiective apare sub următoarea formă: să se determine parametrul m, astfel ca scara

$$x = \frac{mf(z)}{1+mf(z)}, \quad (\alpha_1 \leqslant z \leqslant \alpha_2), \quad f(\alpha_1)=0 \tag{38}$$

să aibă eroarea absolută sau relativă cea mai mică posibilă.

Pentru diferite valori ale lui m avem scări proiective între ele, dar lungimea lor nu mai este aceeași, ci $\frac{mf(\alpha_2)}{1+mf(\alpha_2)}$. Dilatînd scara în raportul $\frac{1+mf(\alpha_2)}{mf(\alpha_2)}$ am redus problema la forma tratată mai sus. Ecuația ei devine

$$\xi = \frac{[1+mf(\alpha_2)]f(z)}{f(\alpha_2)[mf(z)+1]} = \frac{[1+mf(\alpha_2)]\frac{f(z)}{f(\alpha_2)}}{mf(\alpha_2)\frac{f(z)}{f(\alpha_2)}+1}.$$

Comparînd această ecuație cu (20), vedem că

$$k = mf(\alpha_2) \quad \text{și} \quad \varphi(z) = \frac{f(z)}{f(\alpha_2)}. \tag{39}$$

Determinăm parametrul k cu metodele de mai sus și revenim la parametrul

$$m = \frac{k}{f(\alpha_2)}. \tag{40}$$

Metodele arătate nu se pot aplica pentru scările curbilinii, deoarece printr-o omografie suportul scării curbilinii se schimbă. In acest caz, se procedează prin tatonări.

Exemple. 1. Ecuația scării este $f(x)=z^2$, limitele de variație pentru z sînt $\alpha=1$, $\beta=4$. Să se transforme scara printr-o proiectivitate în așa fel, ca eroarea absolută să fie cea mai mică posibilă.

Avem

$$x=\varphi(z)=\frac{z^2-1}{15}, \quad \varphi'(z)=\frac{2z}{15}>0, \quad \varphi''(z)=\frac{2}{15};$$

formăm expresia

$$2\varphi'(z)\varphi'''(z)-3\varphi''^2(z)=-\frac{12}{225}<0,$$

deci condiția (36) este verificată; sîntem în cazul 1). Formula (24) ne dă

$$k_0=\sqrt{\frac{\varphi'(\beta)}{\varphi'(\alpha)}}-1=1.$$

Ecuația scării transformate [formula (20)] este

$$\xi=\frac{2\varphi(z)}{\varphi(z)+1}=\frac{2(z^2-1)}{z^2+14}.$$

2. $f(z)=\sqrt{z}$; $\alpha=1$, $\beta=4$. Să se transforme scara în așa fel ca eroarea absolută să fie cea mai mică posibilă.

Avem

$$\varphi(z)=\sqrt{z}-1, \quad \varphi'(z)=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi''(z)=-\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}, \quad \varphi'''(z)=\frac{3}{8}z^{-\frac{5}{2}},$$

$$2\varphi'(z)\varphi'''(z)-3\varphi''^2(z)=\frac{3}{16}z^{-3}>0,$$

deci condiția (37) este satisfăcută și, prin urmare, sîntem în cazul 2). Valoarea k_0 se determină rezolvînd sistemul format din ecuațiile (30) și (31)

$$-(\sqrt{z}-1)(2-\sqrt{z})\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}+(2\sqrt{z}-3)\frac{1}{4}z^{-1}=0$$

$$k(\sqrt{z}-1)-1=0.$$

Se găsește

$$k_0=\sqrt{3}.$$

3. Să se găsească pentru scara din exemplul 2 acea transformare care conduce la cea mai mică eroare relativă.

Avem

$$z^2[2\varphi'(z)\varphi'''(z)-3\varphi''^2(z)]-\varphi'^2(z)=-\frac{1}{16}z^{-1}<0,$$

deci sîntem în cazul 1). Aplicînd formula (26), avem

$$k_1=\sqrt{2}-1.$$

CAPITOLUL X

TRANSFORMAREA NOMOGRAMELOR PRIN OMOGRAFII

1. TEORIA GENERALĂ

Omografia planului depinde de opt parametri. Alegerea celei mai convenabile omografii pentru o nomogramă dată comportă dificultăți serioase. Am văzut că omografia generală poate fi redusă la o omografie cu trei puncte fixe date și la o trans-

formare afină (cap. VIII, 9). Vom alege omografia cea mai convenabilă dintre omografiile cu cele trei puncte fixe date şi transformarea afină o vom executa ulterior. Deci, alegerea omografiei se face dintr-o familie de omografii care depind numai de doi parametri.

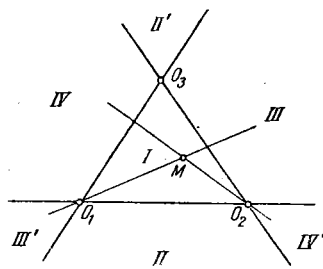


Fig. 101

Fie $O_1O_2O_3$ un triunghi fix (fig. 101). Intrebuinţînd coordonate proiective, avînd $O_1O_2O_3$ ca triunghi fundamental şi punctul unitate în interiorul triunghiului, omografiile care lasă invariant triunghiul $O_1O_2O_3$ se scriu astfel:

$$x_1'=a_{11}x_1, \quad x_2'=a_{22}x_2, \quad x_3'=a_{33}x_3. \quad (1)$$

Să utilizăm pentru determinarea punctului în plan rapoartele

$$\lambda=\frac{x_3}{x_1} \quad \text{şi} \quad \mu=\frac{x_3}{x_2};$$

λ şi μ sînt coordonate proiective neomogene, iar semnificaţia lor geometrică este un biraport (cap. VIII, 8). Dacă punctul are coordonatele proiective neomogene λ şi μ, atunci dreapta O_2M are ecuaţia

$$x_3-\lambda x_1=0$$

şi dreapta O_1M, ecuaţia

$$x_3-\mu x_2=0.$$

De-a lungul unei drepte trecînd prin O_2 valoarea lui λ este constantă; cînd dreapta ce trece prin O_2 se roteşte în interiorul triunghiului $O_1O_2O_3$ de la poziţia O_1O_2 la poziţia O_3O_2, λ creşte de la 0 la ∞, iar dacă se roteşte de la O_1O_2 în sens contrar, trecînd prin domeniile *II* şi *III*, λ descreşte de la 0 la $-\infty$. Deci, în domeniile *I*, *IV*, *IV'*, λ are valori pozitive, în domeniile *II*, *II'*, *III*, *III'* are valori negative, De-a lungul unei drepte ce trece prin O_1, μ are o valoare constantă, care creşte de la 0 la ∞, cînd dreapta se roteşte în sens direct în domeniile *I* şi *III*, respectiv *III'*, şi descreşte de la 0 la $-\infty$, cînd dreapta se roteşte în sens retrograd în domeniile *II*, *IV'* respectiv *IV* şi *II'*. In domeniile *I*, *III*, *III'* μ are valori pozitive, în domeniile *II*, *II'*, *IV* şi *IV'* valori negative.

Transformarea (1) se scrie astfel

$$\begin{cases} \lambda'=m\lambda, \\ \mu'=n\mu, \end{cases} \quad (2)$$

unde am notat

$$m=\frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad n=\frac{a_{33}}{a_{22}}.$$

Aplicînd logaritmii, relaţiile (2) devin mai simple. Notăm

$$\xi=\lg|\lambda|, \quad \eta=\lg|\mu| \quad (3)$$

şi

$$\alpha=\lg|m|, \quad \beta=\lg|n|. \quad (4)$$

Atunci transformarea (2) ia forma

$$\begin{cases} \xi'=\xi+\alpha, \\ \eta'=\eta+\beta. \end{cases} \quad (5)$$

Utilizînd coordonatele (ξ, η) pentru determinarea unui punct din plan, transformările considerate din punct de vedere analitic coincid cu translaţiile. Se înţelege că nu avem translaţii obişnuite, deoarece coordonatele (ξ, η) nu sînt coordonate carteziene, însă la transformările (1) coordonatele (ξ, η) se comportă ca şi coordonatele carteziene la translaţii (la o anumită transformare, la fiecare din coordonatele ξ şi η se adaugă cîte o cantitate fixă). Trasînd în plan, pe de o parte, liniile pentru care $\xi=\text{const}$ şi pe de altă parte, liniile pentru care $\eta=\text{const}$, omografia poate fi executată ca o translaţie în această reţea de linii. Am cîştigat prin aceasta nu numai intuiţia clară a unei omografii date, ci şi o imagine asupra felului în care variază o figură (nomograma noastră) la diferitele omografii ale familiei şi astfel vom putea alege omografia convenabilă.

Avem o mică dificultate la trecerea de la coordonatele λ şi μ la ξ, η. Relaţiile de trecere (3) ataşează fiecărui perechi λ şi μ o pereche ξ şi η bine determinată, deci unui punct din plan îi corespunde cîte un ξ şi η determinat. Dar invers, fiind dată o valoare pentru ξ, numai $|\lambda|$ este determinat ($|\lambda|=10^{\xi}$) şi λ poate lua două valori $+\lambda$ şi $-\lambda$; aceeaşi situaţie este şi pentru μ, deci coordonatele (ξ, η) nu determină perfect punctul din plan. Corespondenţa între $|\lambda|$ şi ξ este biunivocă, dar corespondenţa între λ şi ξ nu este biunivocă. Pentru a înlătura această dificultate vom nota cu $\bar{\xi}$ coordonata ξ a punctelor pentru care $\lambda<0$, deci a punctelor care se află în domeniile *II*, *II'*, *III*, *III'*, şi la fel o bară deasupra lui η va indica că valoarea μ corespunzătoare este mai mică decît zero, că punctul se află în domeniile

II, II' IV, sau *IV'*. Următoarea tabelă arată notarea noilor coordonate în diferitele domenii ale planului:

I	ξ, η
II, II'	$\bar{\xi}, \bar{\eta}$
III, III'	$\bar{\xi}, \eta$
IV, IV'	$\zeta, \bar{\eta}$

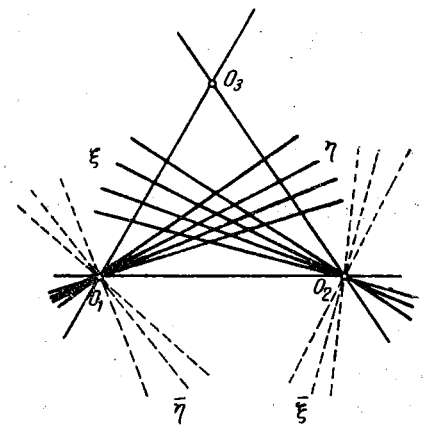


Fig. 102

Trecerea de la coordonatele (λ, μ) la (ξ, η) revine la recotarea dreptelor din fasciculele cu centrele în O_2 şi O_1 cu ajutorul formulelor (3) şi a convenţiei făcute asupra notării cu bară sau fără bară,

Omografia nu este perfect determinată prin formulele (5). In adevăr, nu ştim dacă trebuie sau nu aplicată bara asupra lui ξ' şi η'. Printr-o analiză simplă ajungem însă la un rezultat precis. Dacă $m>0$ şi $n>0$, atunci λ' are acelaşi semn cu λ, μ' cu μ, deci în acest caz imaginea fiecărui punct se află în acelaşi domeniu ca şi punctul iniţial (*II*, şi *II'* la fel *III* şi *III'*, *IV* şi *IV'* sînt privite ca un singur domeniu) şi formulele (5) se utilizează astfel: dacă în loc de ξ sau η punem coordonate nebarate, atunci ξ' şi η' care rezultă din (15) vor fi de asemenea nebarate; dacă în locul lui ξ sau η punem coordonate barate, atunci ξ' respectiv η' vor fi de asemenea barate. Dacă $m<0$ şi $n>0$, atunci λ îşi schimbă semnul prin transformarea considerată şi μ îşi păstrează semnul; formulele (5) se utilizează astfel; dacă ξ se înlocuieşte cu o coordonată nebarată, atunci ξ' va fi barat şi invers, η' este barat sau nebarat. Celelalte două cazuri ($m>0$, $n<0$ şi $m<0$, $n<0$) se discută în mod analog.

Această discuţie poate fi ocolită, dacă observăm că transformarea (2), în care cel puţin unul din parametrii m şi n este

negativ, se descompune într-o transformare (2) cu m şi n pozitivi, urmată de transformarea

$$\left.\begin{aligned}\lambda' &= -\lambda \\ \mu' &= \mu\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

sau

$$\left.\begin{aligned}\lambda' &= \lambda \\ \mu' &= -\mu\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

sau de amîndouă. In coordonatele (ξ, η), transformarea (6) revine la schimbarea barei deasupra lui ξ, iar (7) la schimbarea barei lui η. Transformarea (6) este o omologie armonică cu axa O_2O_3 şi centrul O_1, iar (7) o omologie armonică cu axa O_1O_3 şi centrul O_2. In adevăr, prin transformarea (6) punctele axei O_2O_3 rămîn invariabile, la fel dreptele care trec prin O_1. Fie M un punct oarecare de coordonate (λ, μ), imaginea sa prin (6) fiind $M'(-\lambda, \mu)$; să notăm cu Q intersecţia dreptelor O_1M şi O_2O_3. Biraportul (O_1QMM') este egal cu biraportul razelor O_2O_1, O_2Q, O_2M, O_2M', care la rîndul său este egal cu biraportul numeric

$$(0, \infty, \lambda, -\lambda) = \frac{\lambda}{-\lambda} = -1.$$

Deci avem o omologie armonică.

Omografiile care se obţin din formulele (5) astfel ca perechile ξ, ξ' şi η, η' să fie deodată barate sau nebarate, le numim *translaţii*. O omografie oarecare a familiei cu triunghi fix este sau o translaţie sau o translaţie urmată de una sau două omologii armonice (care constau în schimbarea coordonatelor barate în cele nebarate şi invers, la ξ sau la η sau la ξ şi η).

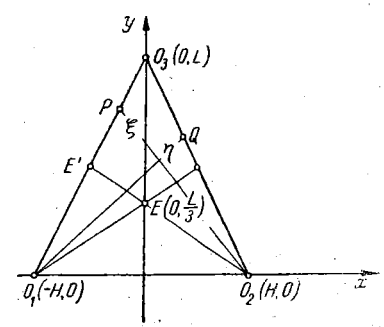


Fig. 103

Reţeaua $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$ se construieşte o dată pentru totdeauna cu mare precizie, iar nomogramele le construim pe hîrtie de calc aşezată deasupra reţelei. Se obişnuieşte a lua ca triunghi fundamental un triunghi isoscel cu baza $2H$ şi înălţimea L, iar ca punct unitate punctul de intersecţie al medianelor triunghiului $O_1O_2O_3$ (fig. 103). Luînd ca axe de coordonate rec-

tangulare baza și înălțimea triunghiului, trecerea de la coordonatele ξ și η la x și y se stabilește astfel:

Relația între coordonatele proiective (x_1, x_2, x_3) și coordonatele carteziene (x, y) este

$$x = \frac{c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3},$$

$$y = \frac{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3}.$$

Scriind că pentru $(1,0,0), (0,1,0,) (0,0,1), (1,1,1)$ corespund $(-H,0)$, $(H,0), (0,L), \left(0, \frac{L}{3}\right)$ și luînd $c_{31}=1$, putem determina toți coeficienții printr-un sistem de opt ecuații cu opt necunoscute. Se găsește

$$\left.\begin{aligned} x &= H\,\frac{-x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3}, \\ y &= L\,\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Impărțind numărătorii și numitorii cu x_1 și trecînd la coordonatele λ și μ înlocuind $\frac{x_3}{x_1}=\lambda$ și $\frac{x_2}{x_1}=\frac{\lambda}{\mu}$, avem

$$\left.\begin{aligned} x &= H\,\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+\lambda\mu}, \\ y &= L\,\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\lambda\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Din relațiile (3) avem

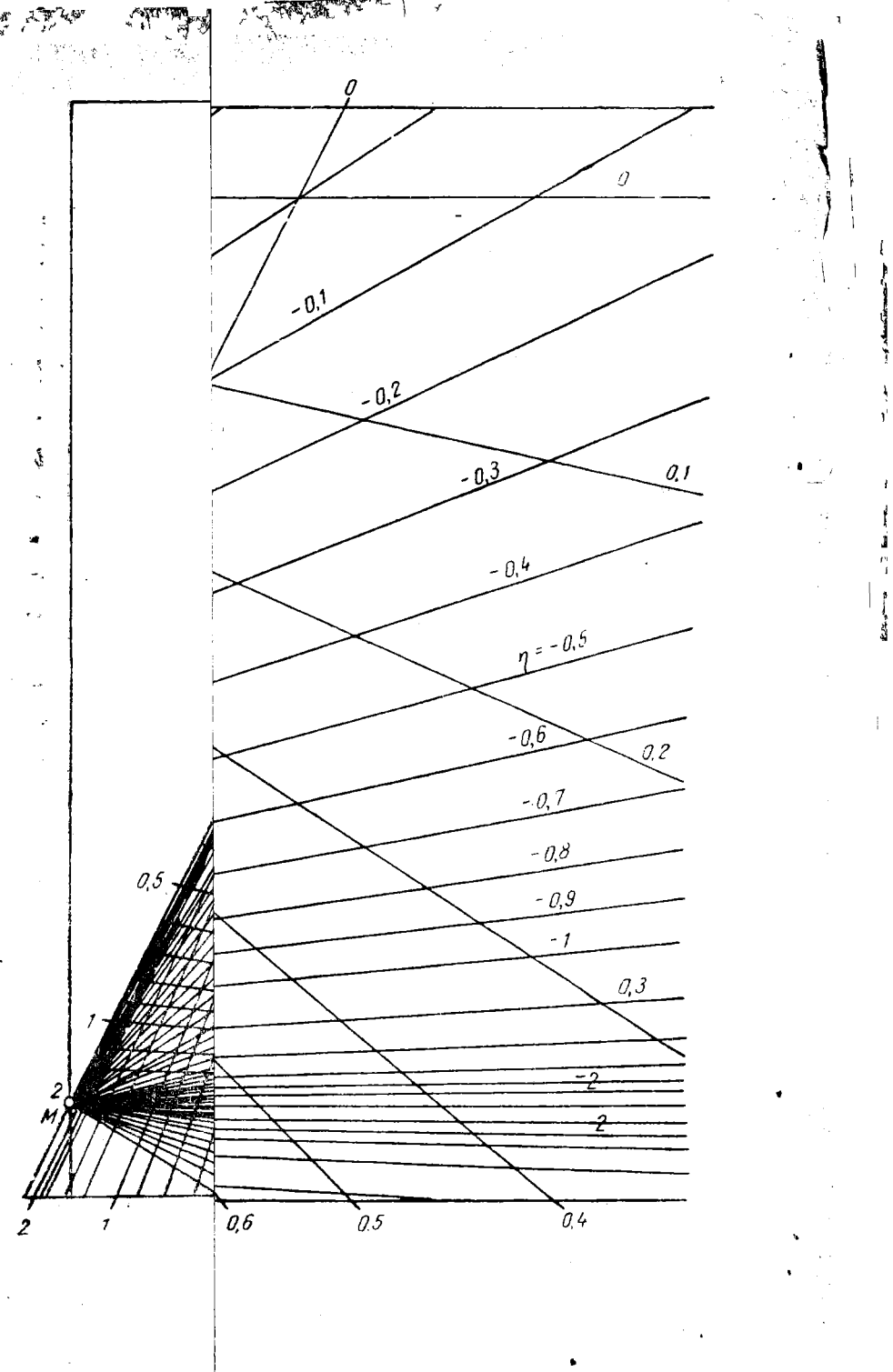
$$|\lambda| = 10^{\xi}, \quad |\mu| = 10^{\eta}$$

sau

$$\lambda = \varepsilon_1 10^{\xi}, \quad \mu = \varepsilon_2 10^{\eta},$$

unde $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i=1, 2)$ și anume: dacă ξ este o coordonată nebarată, atunci $\varepsilon_1 = 1$, dacă ξ este barat, $\varepsilon_1 = -1$; la fel pentru η nebarat avem $\varepsilon_2 = 1$, și pentru $\overline{\eta}$, $\varepsilon_2 = -1$. Obținem în definitiv:

$$\left.\begin{aligned} x &= H\,\frac{\varepsilon_1 10^{\xi} - \varepsilon_2 10^{\eta}}{\varepsilon_1 10^{\xi} + \varepsilon_2 10^{\eta} + \varepsilon_1\varepsilon_2 10^{\xi+\eta}}, \\ y &= L\,\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 10^{\xi+\eta}}{\varepsilon_1 10^{\xi} + \varepsilon_2 10^{\eta} + \varepsilon_1\varepsilon_2 10^{\xi+\eta}}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$



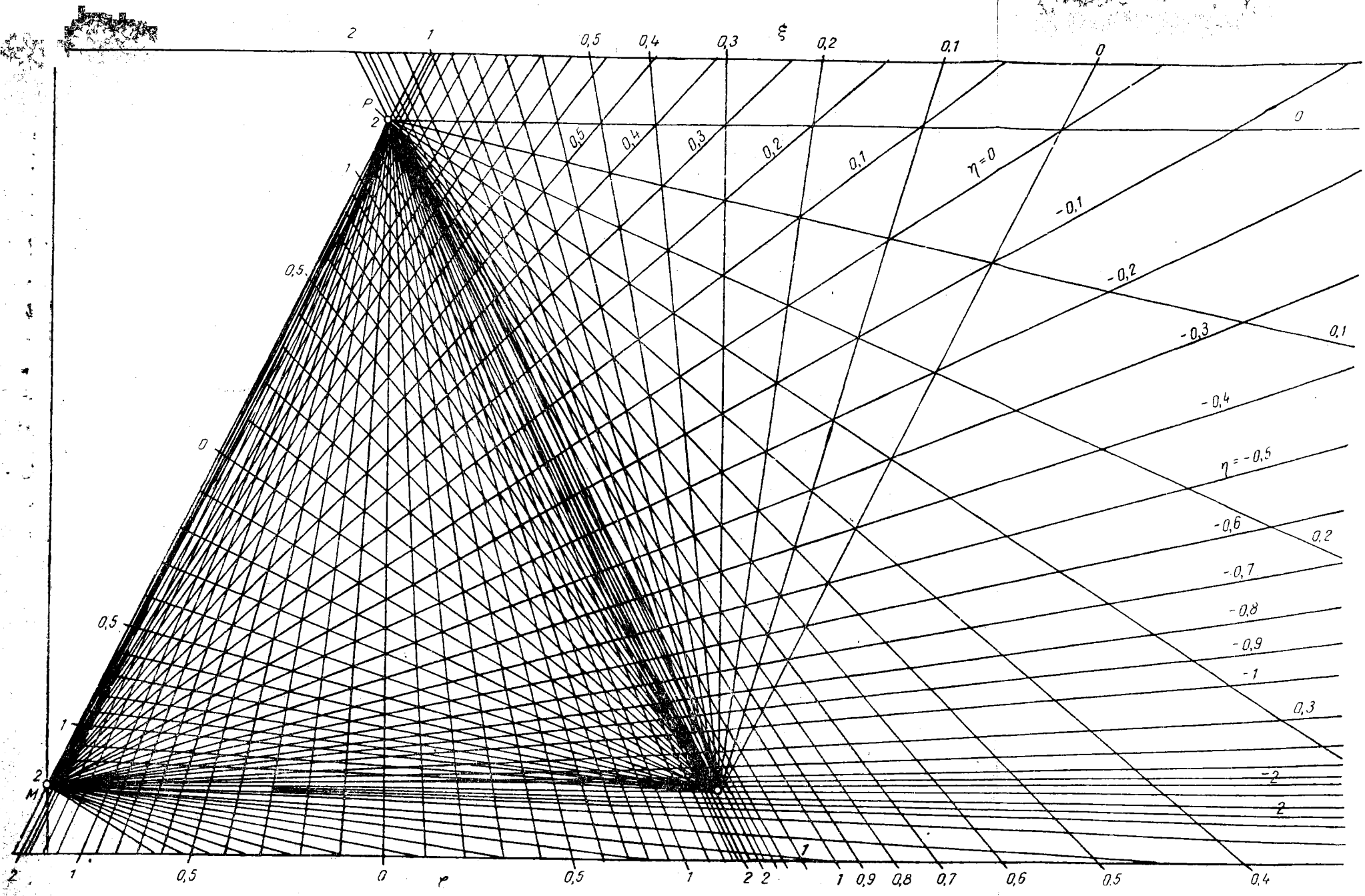

ξ
2
1
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
P
2
1
0,5
0
0,5
1
2
M
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
η = 0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
η = -0,5
-0,6
-0,7
-0,8
-0,9
-1
0,3
-2
-2
0
0,1
0,2
2
1
0,5
0
ρ
0,5
1
2
2
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4

Fig. 104

Rețeaua se construiește în modul următor: pentru a cunoaște raza din fasciculul cu centrul O_2, care corespunde unei valori date ξ, trebuie să construim punctul P, unde această rază intersectează pe O_1O_3 (fig. 103). Am văzut că ecuația dreptei O_2P în coordonate proiective este

$$x_3 - \varepsilon_1 10^{\xi} x_1 = 0.$$

Birapoртul (O_1O_3PE') este egal cu $\varepsilon_1 10^{\xi}$ (adică 10^{ξ} sau -10^{ξ}). Deci,

$$\frac{O_1P}{O_3P} : \frac{O_1E'}{O_3E'} = \varepsilon_1 10^{\xi},$$

dar E' fiind mijlocul segmentului O_1O_3,

$$\frac{O_1P}{PO_3} = \varepsilon_1 10^{\xi},$$

sau

$$\frac{O_1P}{O_1O_3} = \frac{\varepsilon_1 10^{\xi}}{1+\varepsilon_1 10^{\xi}} = \frac{10^{\xi}}{\varepsilon_1 + 10^{\xi}} = \frac{1}{1+\varepsilon_1 10^{-\xi}}$$

sau

$$O_1P = \frac{O_1O_3}{1+\varepsilon_1 10^{-\xi}}. \tag{10}$$

Raza O_1Q din fasciculul cu centrul în O_1, corespunzătoare valorii η se determină în mod analog:

$$O_2Q = \frac{O_2O_3}{1+\varepsilon_2 10^{-\eta}}. \tag{10'}$$

Dacă razele $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ sînt aproape de latura O_1O_2 a triunghiului fundamental, intersecția lor nu poate fi găsită în mod practic. Pentru a putea determina și în acest caz punctul (ξ, η) cu o precizie suficientă, introducem încă o a treia coordonată (fig. 104) prin

$$\zeta = \xi - \eta. \tag{11}$$

Liniile $\zeta = \text{const}$ au ecuația

$$\lg|\lambda| - \lg|\mu| = \text{const}$$

sau

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm k$$

sau

$$x_2 \mp k x_1 = 0.$$

Deci, liniile $\zeta = \text{const}$ sînt drepte ce trec prin O_3. Pentru o valoare constantă a lui ζ avem două drepte; le vom distinge iarăşi prin aplicarea barei: coordonata ζ a punctelor în domeniile *I* şi *II* va fi notată cu ζ, a punctelor din domeniile *III* şi *IV* cu $\bar{\zeta}$.

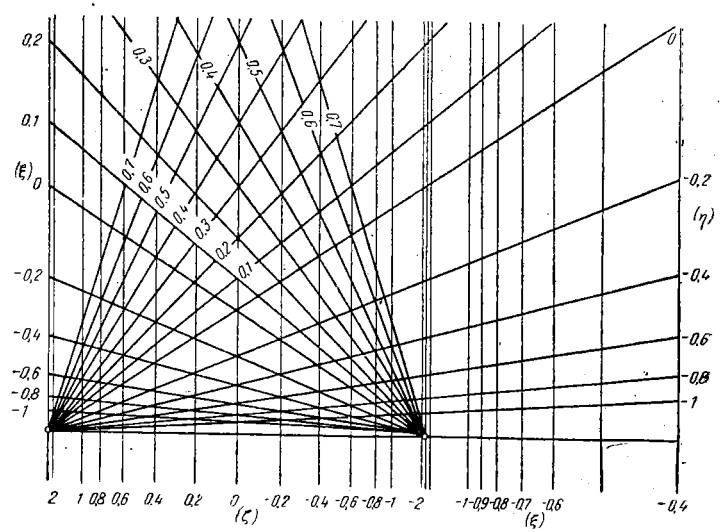


Fig. 105

Uneori este util să considerăm un triunghi fundamental cu vîrful O_3 la infinit (fig. 105). In acest caz, reţeaua cu triunghi fix trece în *reţea cu drepte paralele fixe*. Dreptele $\zeta = \text{const}$ sînt paralele cu laturile O_1O_3 şi O_2O_3 ale triunghiului fundamental degenerat.

2. ECUAŢIA LUI CAUCHY

Pentru a exemplifica întrebuinţarea reţelei cu triunghi fix, să luăm ecuaţia de tip Cauchy

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0, \tag{12}$$

care se scrie sub forma ecuaţiei lui Soreau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ f_3 & g_3 & -h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

[cap. IV, 5, formula (12)] sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 - a \\ 0 & 1 & f_2 - b \\ f_3 & g_3 & -h_3 - a f_3 - b g_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

unde a şi b sînt două constante oarecare, pe care le vom determina ulterior. Ecuaţiile scărilor în coordonate proiective sînt

$$\text{Scara } z_1 \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = f_1 - a. \end{cases} \qquad \text{Scara } z_2 \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = f_2 - b. \end{cases}$$

$$\text{Scara } z_3 \begin{cases} x_1 = f_3, \\ x_2 = g_3, \\ x_3 = h_3 - a f_3 - b g_3. \end{cases}$$

Scara z_1 se află pe dreapta de ecuaţie $x_2 = 0$, deci pe latura O_1O_3 a triunghiului fundamental, scara z_2 pe latura O_2O_3, iar scara z_3 este curbilinie. Pentru a trece la coordonatele (ξ, η) folosim următoarele formule stabilite la punctul precedent

$$\xi = \lg \left| \frac{x_3}{x_1} \right|, \qquad \eta = \lg \left| \frac{x_3}{x_2} \right|. \tag{14}$$

Ecuaţiile scărilor în coordonatele (ξ, η) sînt:

$$\text{Scara } z_1 \begin{cases} \xi = \lg |f_1 - a|, \\ \eta = \infty. \end{cases} \qquad \text{Scara } z_2 \begin{cases} \xi = \infty, \\ \eta = \lg |f_2 - b|. \end{cases}$$

$$\text{Scara } z_3 \begin{cases} \xi = \lg \left| \dfrac{h_3 + a f_3 + b g_3}{-f_3} \right|, \\ \eta = \lg \left| \dfrac{h_3 + a f_3 + b g_3}{-g_3} \right|. \end{cases}$$

(dacă o expresie dintre semnele valorii absolute este negativă, coordonatele ξ, η respective se schimbă în $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$).

Parametrii a şi b se determină în aşa fel ca începutul scărilor z_1 şi z_2 să fie pe latura O_1O_2 a triunghiului fundamental.

Se alcătuiesc tabele pentru fiecare scară conținînd 5—10 puncte și se schițează nomograma. Nomograma va avea inconveniente din punct de vedere al erorilor.

Alegerea omografiei convenabile se face cu ajutorul formulelor de translație (5). Să presupunem pentru fixarea ideilor că scara rezultatului este scara rectilinie z_2. Această scară este independentă de α. Vom determina întîi pe β în așa fel, ca scara z_2 să dea eroarea absolută sau relativă cea mai mică posibilă. Pentru aceasta trebuie să știm ce relație există între parametrul m al celei mai bune proiectivități din cap. IX, 2 (40) și parametrul β. Formula (10′) arată că după aplicarea omografiei cu parametrul β ecuația scării z_2 în coordonată carteziană luată pe dreapta O_2O_3 este (fig. 106)

$$v=\frac{O_2O_3}{1+\varepsilon_2 10^{-(\eta+\beta)}}\cdot$$

sau

$$v=O_2O_3\frac{10^{\beta}(f_2-b)}{1+10^{\beta}(f_2-b)}\cdot$$

Comparînd această ecuație cu (38) (cap. IX, 2), vedem că

$$m=10^{\beta} \quad \text{sau} \quad \beta=\lg m \tag{15}$$

dacă $m<0$, atunci în prealabil trebuie să aplicăm o omologie armonică). Adăugăm această valoare a lui β tuturor coordonatelor η și schițăm din nou nomograma. Prin alegerea convenabilă a lui α vom remedia deficiențele care mai există (lungimea prea scurtă a scărilor rezultatelor în comparație cu lungimea celorlalte scări și intersecții prea oblice).

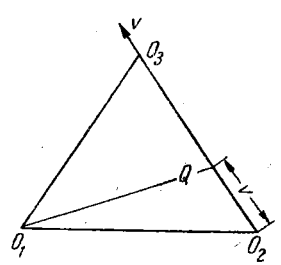


Fig. 106

Parametrii α și β fiind determinați, revenim prin formulele (14) la coordonate proiective, de la care putem trece la coordonate carteziene prin formulele (8).

In sfîrșit, aplicăm o transformare afină (cap. VIII, 4).

Dacă însă scara rezultatului este scară curbilinie z_3, atunci determinarea celei mai bune transformări proiective se poate face numai prin încercări, schițînd pentru cîteva valori α și β transformatele primei schițe de nomogramă și urmărind pe desen variația intervalelor grafice ale scării z_3.

3. EXEMPLU

Să se construiască o nomogramă pentru aria totală a cilindrului

$$S=2\pi R(R+h)$$

cu limitele de variație pentru raza R și înălțimea h: $1\leq R\leq 2$, $1\leq h\leq 10$; eroarea relativă să fie cea mai mică posibilă (pentru S rezultă limitele $12{,}56\leq S\leq 150$, 7).

Ecuația dată se scrie sub forma

$$hR-\frac{1}{2\pi}S+R^2=0;$$

deci, avem o ecuație de tip Cauchy (12), în care

$$f_1=h,\quad f_2=\frac{1}{2\pi}S,\quad \begin{cases} f_3=R,\\ g_3=-1,\\ h_3=R^2.\end{cases}$$

Ecuațiile scărilor în coordonatele ξ și η sînt:

$$\text{Scara } h\begin{cases}\xi=\lg|h-1|,\\ \eta=\infty.\end{cases}\qquad \text{Scara } S\begin{cases}\xi=\infty,\\ \eta=\lg\left|\frac{S}{2\pi}-2\right|.\end{cases}$$

$$\text{Scara } R\begin{cases}\xi=\lg\left|\frac{R^2+R-2}{-R}\right|,\\ \eta=\lg|R^2+R-2|,\\ \zeta=\xi-\eta=-\lg|-R|.\end{cases}$$

Am determinat parametrul a astfel ca punctul scării h cu cota $h=1$ să fie pe latura O_1O_2 a triunghiului fundamental. Pentru aceasta trebuie ca $\lg|1-a|=-\infty$ sau $a=1$. Parametrul b s-a luat în așa fel ca punctul scării S cu cota $S=4\pi$ să fie O_1O_2, $\lg\left(\frac{4\pi}{2\pi}-b\right)=-\infty$, de unde $b=2$.

Ținînd seama de convenția făcută pentru notarea lui $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ și $\bar{\zeta}$ și observînd că între limitele de variație $h-1\geq 0$, $\frac{S}{2\pi}-2\geq 0$, $R^2+R-2\geq 0$, avem:

$$\text{Scara } h\begin{cases}\bar{\xi}=\lg(h-1),\\ \bar{\eta}=\infty.\end{cases}\qquad \text{Scara } S\begin{cases}\bar{\xi}=\infty,\\ \bar{\eta}=\lg\left(\frac{S}{2\pi}-2\right).\end{cases}$$

$$\text{Scara } R\begin{cases}\bar{\xi}=\lg\frac{R^2+R-2}{R},\\ \bar{\eta}=\lg(R^2+R-2),\\ \bar{\zeta}=-\lg R.\end{cases}$$

Calculăm coordonatele cîtorva puncte pe cele trei scări.

h	ξ	η
1	$-\infty$	∞
2	0	∞
4	0,48	∞
6	0,70	∞
8	0,85	∞
10	0,95	∞

S	ξ	η
12,5	∞	$-\infty$
25	∞	0,30
50	∞	0,77
75	∞	1,00
100	∞	1,14
125	∞	1,25
150,7	∞	1,36

R	$\bar{\xi}$	η	$\bar{\zeta}$
1,0	$-\infty$	$-\infty$	0
1,2	−0,27	−0,19	−0,08
1,4	−0,02	0,13	−0,15
1,6	0,13	0,33	−0,20
1,8	0,22	0,48	−0,26
2,0	0,30	0,60	−0,30

Determinăm parametrul β astfel ca scara S să aibă cea mai mică eroare relativă. Cu ajutorul formulelor (40) și (27) (cap. IX), găsim:

$$m=\frac{k}{f(\alpha_2)}=\frac{\sqrt{\frac{\alpha_2 f'(\alpha_2)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)}}-1}{f(\alpha_2)};$$

$$f(z)=f(S)=\frac{S}{2\pi}-2;$$

iar α_1 și α_2 sînt limitele de variație ale lui S, adică $\alpha_1=4\pi\approx 12{,}56$ și $\alpha_2=48\pi\approx$ $\approx 150{,}7$ și

$$m\approx 0{,}112$$

și din (15)

$$\beta=\lg m\approx 0{,}05-1=-0{,}95.$$

Aplicăm omografia

$$\begin{cases}\xi'=\xi,\\ \eta'=\eta-0{,}95;\end{cases}$$

pentru ξ' avem

$$\xi'=\xi+0{,}95.$$

Punctele găsite se transformă în

h	ξ	η
1	$-\infty$	∞
2	0	∞
4	0,48	∞
6	0,70	∞
8	0,85	∞
10	0,95	∞

S	ξ	η
12,5	∞	$-\infty$
25	∞	−0,65
50	∞	−0,18
75	∞	0,05
100	∞	0,19
125	∞	0,30
150,7	∞	0,41

R	$\bar{\xi}$	η	$\bar{\zeta}$
1,0	$-\infty$	$-\infty$	0,95
1,2	−0,27	−1,14	0,87
1,4	−0,02	−0,82	0,80
1,6	0,13	−0,62	0,75
1,8	0,22	−0,47	0,69
2,0	0,30	−0,35	0,65

Cu ajutorul acestor puncte construim varianta I a nomogramei (fig. 107). Se constată următoarele deficiențe: lungimile scărilor diferă mult între ele (din care cauză hîrtia desenului nu este bine utilizată) și scara R este prea apropiată de scara S (ceea ce atrage după sine unghiuri de intersecție mici). Se observă că dacă aplicăm o omografie cu $\alpha<0$, scara cea mai lungă h se scurtează și în același timp scara curbilinie R se îndepărtează de scara S.

Încercăm $\alpha=0{,}41-0{,}95=-0{,}54$, pentru care scările h și R au lungimi egale. Aplicînd omografia

$$\xi'=\xi-0{,}54,\quad \eta'=\eta,\quad \zeta'=\zeta-0{,}54.$$

Obținem valorile

h	ξ	η
1	$-\infty$	∞
2	−0,54	∞
4	−0,06	∞
6	0,16	∞
8	0,31	∞
10	0,41	∞

S	ξ	η
12,5	∞	$-\infty$
25	∞	−0,65
50	∞	−0,18
75	∞	0,05
100	∞	0,19
125	∞	0,30
150,5	∞	0,41

R	$\bar{\xi}$	η	$\bar{\zeta}$
1,0	$-\infty$	$-\infty$	0,41
1,2	−0,81	−1,14	0,33
1,4	−0,56	−0,82	0,26
1,6	−0,41	−0,62	0,21
1,8	−0,32	−0,47	0,15
2,0	−0,24	−0,35	0,11

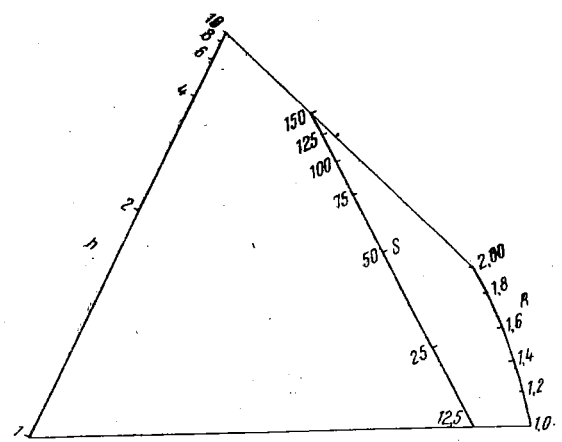


Fig. 107

Pe baza acestor valori construim varianta II (fig. 108), care corespunde din punct de vedere al erorilor. Pentru a obține nomograma definitivă aplicăm încă o transformare afină.

Ecuațiile scărilor variantei găsite în coordonatele (ξ, η) sînt:

$$\text{Scara } h\begin{cases}\xi=\lg(h-1)-0{,}54,\\ \eta=\infty.\end{cases}\qquad \text{Scara } S\begin{cases}\xi=\infty,\\ \eta=\lg\left(\frac{S}{2\pi}-2\right)-0{,}95.\end{cases}$$

$$\text{Scara } R\begin{cases}\bar{\xi}=\lg\frac{R^2+R-2}{R}-0{,}54,\\ \eta=\lg(R^2+R-2)-0{,}95.\end{cases}$$

Aplicînd formulele (9) găsim ecuațiile acestor scări în coordonate carteziene:

$$\text{Scara } h \begin{cases} x=-\dfrac{H}{1+0{,}288\,(h-1)}, \\ y=L\dfrac{0{,}288\,(h-1)}{1+0{,}288\,(h-1)}. \end{cases} \qquad \text{Scara } S \begin{cases} x=\dfrac{H}{0{,}7756+0{,}01789\,S}, \\ y=L\dfrac{0{,}01786\,S-0{,}2244}{0{,}7756+0{,}01786\,S}. \end{cases}$$

$$\text{Scara } R \begin{cases} x=H\dfrac{0{,}1122\,R+0{,}288}{0{,}0324\,R^2-0{,}0798\,R+0{,}223}, \\ y=L\dfrac{0{,}0324\,(R^2+R-2)}{0{,}0324\,R^2-0{,}0798\,R+0{,}023}. \end{cases}$$

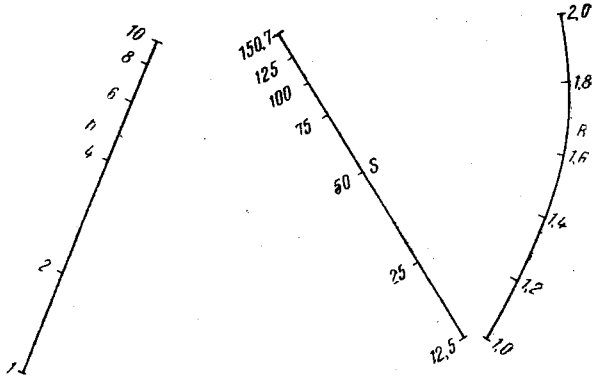


Fig. 108

Aplicînd afinitatea specială

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{H}{L}y, \\ y'=y, \end{cases}$$

scara h devine paralelă cu axa Oy, scara rezultatului se lungește și, după cum arată fig. 109, nu avem unghiuri de intersecție sub 20°. Ecuațiile definitive ale scărilor sînt:

$$\text{Scara } h \begin{cases} x=-H, \\ y=L\dfrac{0{,}288\,(h-1)}{1+0{,}288\,(h-1)}. \end{cases} \qquad \text{Scara } S \begin{cases} x=H\dfrac{1{,}2244-0{,}01786\,S}{0{,}7756+0{,}01786\,S}, \\ y=L\dfrac{0{,}01786\,S-0{,}2244}{0{,}7756+0{,}01786\,S}. \end{cases}$$

$$\text{Scara } R \begin{cases} x=H\left(\dfrac{0{,}586}{0{,}0324\,R^2-0{,}0798\,R+0{,}223}-1\right), \\ y=L\dfrac{0{,}0324\,(R^2+R-2)}{0{,}0324\,R^2-0{,}0798\,R+0{,}223}. \end{cases}$$

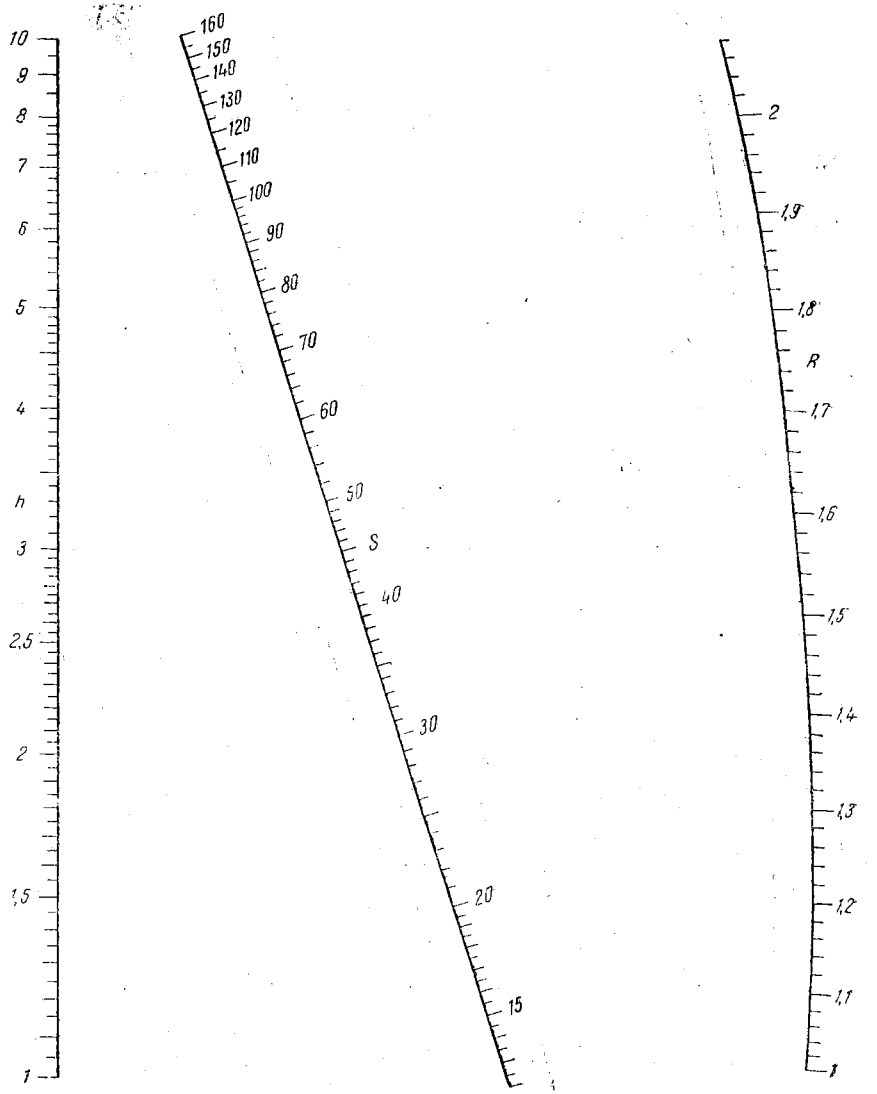


Fig. 109

Dimensiunile nomogramei fiind 180×250 mm, parametrii H și L se determină în modul următor: coordonatele extremităților scărilor h și R sînt

$$h=1\begin{cases} x=-H, \\ y=0; \end{cases} \qquad h=10\begin{cases} x=-H, \\ y=0{,}72\,L; \end{cases}$$

$$R=1\begin{cases} x=2{,}34\,H, \\ y=0; \end{cases} \qquad R=2\begin{cases} x=2{,}04\,H, \\ y=0{,}67\,L. \end{cases}$$

Lățimea maximă a nomogramei este $3{,}34\,H$ și înălțimea $0{,}72\,L$. Scriind

$$3{,}34\,H=180 \quad \text{și} \quad 0{,}70\,L=250,$$

găsim prin rotunjire

$$H=55 \text{ mm}, \quad L=350 \text{ mm}.$$

CAPITOLUL XI

CLASIFICAREA GENERALĂ A NOMOGRAMELOR. DIFERITE TIPURI DE NOMOGRAME

1. NOMOGRAMA GENERALĂ

Am examinat pînă acum două tipuri de nomograme: nomograme cu rețele și nomograme cu puncte aliniate. Acestea sînt cele mai răspîndite, dar mai există și alte nomograme utile în aplicații. De exemplu, nomograma cu compas, formată din scările variabilelor z_1, z_2, z_3 și z_4, se utilizează în felul următor: fie P_1, P_2 și P_3 punctele corespunzătoare valorilor date ale variabilelor z_1, z_2, z_3 (fig. 110); din P_3 ca centru se descrie un arc de cerc cu raza P_1P_2 și fie P_4 punctul de intersecție al arcului de cerc cu scara z_4; cota z_4 a punctului P_4 dă rezultatul. Dacă ecuațiile scării z_i într-un sistem de coordonate rectangulare sînt $x_i=f_i(z_i)$ și $y_i=g_i(z_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, atunci relația rezolvată de nomograma cu compas este

$$(f_2-f_1)^2+(g_2-g_1)^2=(f_3-f_4)^2+(g_3-g_4)^2.$$

Dacă o ecuație cu patru variabile are această formă sau poate fi adusă la această formă, atunci este avantajos să o rezolvăm prin nomograme cu compas.

M. d'Ocagne a dat o clasificare generală a nomogramelor, definite prin mișcarea unui plan mobil pe un plan fix. În cele

ce urmează ne ocupăm de această idee generală de nomogramă de clasificarea care decurge din ea și de cazurile particulare, mai importante.

Fie (π) un plan fix și (π') un plan mobil, care se mișcă pe planul (π). Poziția planului (π') depinde trei parametri, iar planul (π') are trei grade de libertate. Prin diverse condiții geometrice micșorăm gradele de libertate ale planului (π'). Condiția ca un punct dat al lui (π') să coincidă cu un punct al planului (π) micșorează cu două unități numărul gradelor de libertate; condiția ca un punct dat al planului (π') [sau (π)] să fie pe o curbă dată a planului (π) [sau (π')] micșorează cu o unitate numărul gradelor de libertate ale lui (π); condiția ca o curbă dată din (π') să fie tangentă unei curbe date din (π) micșorează cu o unitate numărul gradelor de libertate. În adevăr, dacă alegem sistemele de coordonate rectangulare (x, y), respectiv (x', y'), în planele (π) și (π'), între coordonatele punctelor în coincidență avem relațiile:

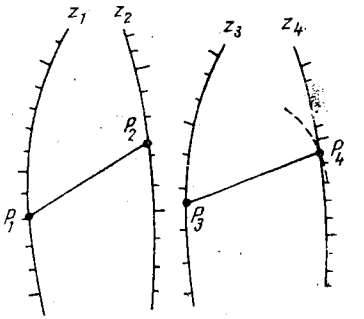


Fig. 110

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x'_0 \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y'_0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde α este unghiul cu care axa x este rotită față de axa x', iar x'_0 și y'_0 sînt coordonatele originii O față de sistemul (x', y'). Astfel, poziția planului (π') este determinată de trei parametri: α, x'_0 și y'_0. Pentru a determina acești parametri ne ajung trei relații. Fiecare relație reduce cu o unitate numărul gradelor de libertate. Coincidența unui punct dat din (π') cu unul din (π) ne dă două relații între α, x'_0 și y'_0. Condiția ca un punct dat din (π') să se afle pe o curbă dată din (π), ne dă o relație între α, x'_0 și y'_0 (coordonatele x', y' ale punctului dat verifică ecuația curbei) etc.

Condițiile geometrice, care reduc gradele de libertate ale mișcării planului (π') pe planul (π), vor fi numite *contacte*. Dacă contactul reduce cu o unitate numărul gradelor de libertate, atunci avem *contact simplu*, iar dacă le reduce cu două unități, atunci avem *contact dublu*. Condiția ca un punct din (π') să se

afle pe o curbă din (π) este un contact simplu. Condiția ca un punct dat din (π') să coincidă cu un punct dat din (π) este un contact dublu. Trei contacte simple sau un contact simplu și unul dublu determină poziția planului (π') pe planul (π).

Contactele se realizează cu ajutorul elementelor geometrice gradate și negradate desenate în planele (π) și (π'). Prin element geometric negradat înțelegem un punct fix sau o curbă fixă în planul (π) sau (π'). Prin element geometric gradat înțelegem o scară, un cîmp binar sau o familie de curbe cotate. Punctele planului (π) vor fi notate cu P, curbele cu C și dreptele cu D, iar elementele geometrice în general cu E. Elementele geometrice ale planului (π') se notează cu P', C', D', respectiv E'. Dacă P este un punct al scării variabilei z_i, atunci se înseamnă cu P_i sau P'_i (poziția lui este fixată, dacă se dă o valoare a variabilei z_i), dacă punctul P se determină ca un punct al cîmpului binar cu variabilele z_i și z_j, atunci se înseamnă P_{ij} sau P'_{ij} (poziția lui este fixată dacă se dau z_i și z_j). Liniile unei familii de curbe se notează cu C_i sau C'_i (curba din familia corespunzătoare cotei z_i). Elementele fixe (negradate) vor fi notate: P_0, P_{I}, P_{II}, C_0, C_{I}, C_{II}, sau P'_0, P'_{I}, P'_{II}, C'_0, C'_{I}, C'_{II}, după cum ele se află în planul fix sau cel mobil. Contactul dintre elementul E_i al planului (π) și elementul E'_k al planului (π') se notează astfel: $E_i \rightarrowtail E'_k$, dacă contactul este simplu, și $E_i \rightrightarrows E'_k$, dacă contactul este dublu. De exemplu, $P_i \rightarrowtail C'_j$ înseamnă că un anumit punct al scării z_i din planul (π) se află pe o curbă anumită a familiei de curbe C'_j prin planul (π'). $P_i \rightrightarrows P'_{jk}$ înseamnă că un anumit punct al scării z_i din planul (π) este în coincidență cu un anumit punct al cîmpului binar (z_j, z_k), situat în planul (π').

Poziția planului (π') pe planul (π) fiind determinată prin trei contacte, care se mai numesc și *contacte de poziție*, introducem încă un contact, numit *contact de rezolvare*, care se notează cu $\rightarrow$ sau $\leftarrow$ (săgeata indicînd elementul geometric a cărui cotă se obține ca rezultat). Un contact de rezolvare poate fi realizat, de exemplu, printr-un cîmp binar (z_i, z_j) plasat în planul (π) și printr-o familie de curbe C'_k din planul (π'). Poziția planului (π') față de (π) fiind determinată de contactele de poziție, dacă se dă z_i și z_j, avem un punct determinat în (π) și se caută care curbă din familie C'_k trece prin acest punct; cota acestei curbe dă rezultatul. Acest contact se notează $P_{ij} \rightarrow C'_k$. Contactul de rezolvare $P_i \leftarrow C'_0$ înseamnă că trebuie să citim cota punctului de intersecție dintre scara z_i și curba fixă C'_0.

Descriem o nomogramă generală, care se utilizează pe baza celor arătate mai sus. In planul fix (π) avem cîmpurile binare (z_1, z_2), (z_4, z_5), (z_7, z_8) și familia de curbe C_{12}; în planul mobil (π') familiile de curbe C'_3, C'_6, C'_9 și cîmpul binar (z_{10}, z_{11}).

Dacă se dau valori numerice pentru variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_{11}$, atunci putem citi de pe nomogramă o valoare determinată a variabilei z_{12}. Pentru aceasta fixăm în planul (π) (fig. 111) punctul $P_{1,2}$ corespunzător valorilor date z_1 și z_2 și în (π') curba C'_3 corespunzătoare cotei date z_3. Planul (π') se așază peste (π) în așa fel ca punctul $P_{1,2}$ să fie pe curba C'_3. Am realizat primul contact de poziție $P_{1,2} \rightarrowtail C'_3$. La fel se realizează celelalte două contacte de poziție $P_{4,5} \rightarrowtail C'_6$ și $P_{7,8} \rightarrowtail C'_9$.

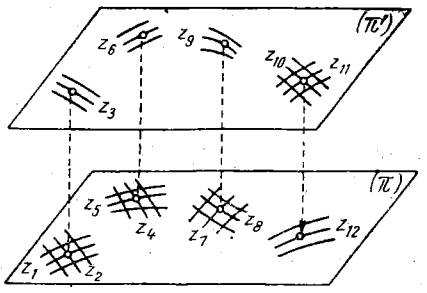


Fig. 111

Prin aceasta, poziția planului (π') este determinată. Fixăm punctul $P'_{10,11}$ în cîmpul binar (z_{10}, z_{11}) cu ajutorul valorilor date z_{10} și z_{11}; punctul $P'_{10,11}$ se află pe o curbă anumită C_{12} din familia de curbe cu cotele z_{12}. Cota curbei C_{12} astfel determinată este valoarea căutată a variabilei z_{12}. Structura nomogramei se descrie prin cele trei contacte de poziție și prin contactul de rezolvare,

$$P_{1,2} \rightarrowtail C'_3, \quad P_{4,5} \rightarrowtail C'_6, \quad P_{7,8} \rightarrowtail C_9, \quad C_{12} \leftarrow P'_{10,11}. \qquad (2)$$

Relațiile (2) formează *formula de structură* a nomogramei.

Relația între variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ se poate găsi în modul următor. Alegînd cîte un sistem de coordonate în cele două plane (x, y) și (x', y'), ecuațiile cîmpurilor binare sînt:

$$(z_1, z_2) \begin{cases} x = f_{1,2}(z_1, z_2), \\ y = g_{1,2}(z_1, z_2); \end{cases}$$

$$(z_4, z_5) \begin{cases} x = f_{4,5}(z_4, z_5), \\ y = g_{4,5}(z_4, z_5); \end{cases}$$

$$(z_7,\ z_8)\ \begin{cases} x=f_{7,8}(z_7,\ z_8), \\ y=g_{7,8}(z_7,\ z_8); \end{cases}$$

$$(z_{10},\ z_{11})\ \begin{cases} x'=f_{10,11}(z_{10},\ z_{11}), \\ y'=g_{10,11}(z_{10},\ z_{11}) \end{cases}$$

și ecuațiile familiilor de curbe

$$(z_3)\quad F_3(x',\ y',\ z_3)=0,$$
$$(z_6)\quad F_6(x',\ y',\ z_6)=0,$$
$$(z_9)\quad F_9(x',\ y',\ z_9)=0,$$
$$(z_{12})\quad F_{12}(x,\ y,\ z_{12})=0,$$

unde $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ $f_{4,5}$, $g_{4,5}$, $f_{7,8}$, $g_{7,8}$, $f_{10,11}$, $g_{10,11}$, F_3, F_6, F_9 și F_{12} sînt funcții date.

Coordonatele punctului $P_{1,2}$ în sistemul $(x',\ y')$ se scriu cu ajutorul formulelor (1); știind că aceste coordonate satisfac ecuația (z_3), găsim:

$$\left.\begin{aligned} &F_3(f_{1,2}\cos\alpha-g_{1,2}\sin\alpha+x'_0,\ f_{1,2}\sin\alpha+g_{1,2}\cos\alpha+y'_0,\ z_3)=0, \\ &F_6(f_{4,5}\cos\alpha-g_{4,5}\sin\alpha+x'_0,\ f_{4,5}\sin\alpha+g_{4,5}\cos\alpha+y'_0,\ z_6)=0, \\ &F_9(f_{7,8}\cos\alpha-g_{7,8}\sin\alpha+x'_0,\ f_{7,8}\sin\alpha+g_{7,8}\cos\alpha+y'_0,\ z_9)=0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ultimele două relații s-au găsit în mod analog. Aceste trei ecuații determină pe α, x'_0 și y'_0 în funcție de $z_1,\ z_2,\ldots,z_9$. Avînd în vedere contactul de rezolvare, exprimăm coordonatele x și y ale punctului $P'_{10,11}$ iarăși servindu-ne de formulele (1) rezolvate în raport cu x și y:

$$x=(x'-x'_0)\cos\alpha+(y'-y'_0)\sin\alpha=(f_{10,11}-x'_0)\cos\alpha+(g_{10,11}-y'_0)\sin\alpha,$$

$$y=-(x'-x'_0)\sin\alpha+(y'-y'_0)\cos\alpha=-(f_{10,11}-x'_0)\sin\alpha+$$
$$+(g_{10,11}-y'_0)\cos\alpha$$

și observăm că aceste coordonate satisfac ecuația $F_{12}(x,\ y,\ z_{12})=0$,

$$F_{12}[(f_{10,11}-x'_0)\cos\alpha+(g_{10,11}-y'_0)\sin\alpha,$$
$$-(f_{10,11}-x'_0)\sin\alpha+(g_{10,11}-y'_0)\cos\alpha,\ z_{12})]=0. \quad (4)$$

Inlocuind în ecuația (4) expresiile găsite din sistemul (3) pentru x'_0, y'_0 și α în funcție de $z_1,\ z_2,\ldots,z_9$, obținem o relație de forma

$$\Phi(z_1,\ z_2,\ldots,z_{12})=0. \quad (5)$$

Nomograma noastră rezolvă ecuația (5).

O ecuație dată cu douăsprezece variabile poate fi rezolvată cu nomograma considerată, dacă putem găsi un sistem de patru ecuații de forma (3) și (4), care prin eliminarea parametrilor x'_0, y'_0 și α conduce exact la ecuația dată.

In cazul general, eliminarea efectivă a parametrilor x'_0, y'_0 și α din ecuațiile (3) și (4) nu se poate face în mod practic. La fel nu se poate concepe utilizarea comodă a nomogramei considerate. Ea servește numai ca punct de plecare pentru diverse particularizări, utilizarea cărora devine mai comodă și ecuațiile cărora pot fi scrise nemijlocit, fără intermediul parametrilor x'_0, y'_0 și α. O ecuație fiind dată, se va putea recunoaște dacă face parte din tipul ecuațiilor ce aparțin diverselor forme particulare ale nomogramei noastre.

In nomograma noastră generală, la fiecare contact au intervenit trei variabile, numărul cel mai mare posibil de variabile. Astfel, am ajuns la ecuația (5) cu douăsprezece variabile. Dacă la anumite contacte familiile de curbe se înlocuiesc cu curbe fixe și cîmpurile binare cu scări sau puncte fixe, sau dacă două contacte simple le înlocuim cu un contact dublu, atunci numărul variabilelor se micșorează și nomograma împreună cu ecuația ei se simplifică.

2. NOMOGRAMA ELEMENTARĂ ȘI COMPUSĂ

Nomograma obținută prin mișcarea unui plan mobil pe un plan fix se numește *nomogramă elementară*. Ea rezolvă anumite ecuații cu cel mult douăsprezece variabile.

In cazul ecuațiilor cu un număr mai mare de variabile, putem construi *nomograme compuse*, care se obțin dintr-un plan fix și două sau mai multe plane mobile. Prin trei contacte de poziție se fixează poziția planului (π') față de planul (π) și prin noi contacte de poziție fixăm planul (π'') față de (π') etc. In sfîrșit, un contact de rezolvare servește la citirea rezultatului. In cazul a trei plane (unul fix și două mobile) putem face să intervină 21 variabile; trei contacte de poziție cu cîte trei

variabile pentru fixarea poziției planului (π') față de (π) și un contact de rezolvare plasat în planele (π'') și (π), iar de trei variabile; în total $7\times3=21$ variabile. Folosind contacte cu un număr mai mic de variabile, obținem nomograme compuse pentru ecuații cu un număr mai mic de variabile.

Nomogramele compuse au importanță și în cazul unui număr de variabile mai mic decît 12, chiar pentru patru variabile (cap. VI, 2), deoarece se poate întîmpla că pentru ecuația respectivă să nu existe o nomogramă elementară, dar există una compusă. Chiar dacă există o nomogramă elementară, uneori ea poate fi mai complicată decît cea compusă.

3. CLASIFICAREA NOMOGRAMELOR ELEMENTARE. CAZURI PARTICULARE

Ca prim criteriu de clasificare a nomogramelor putem lua numărul gradelor de libertate ale mișcării planului (π') pe planul (π). Există nomograme la care mișcarea planului (π') este redusă, de exemplu numai la o rotație [cîte un punct fix din (π) și (π') sînt permanent în contact dublu] sau la translații [mișcarea lui (π') se face cu un dispozitiv special, care permite numai translații]. Planul mobil poate avea trei grade de libertate, două, unul sau nici un grad de libertate.

Fixarea planului mobil pe planul fix se face mai ușor dacă elementele geometrice cotate se află în planul fix, iar în planul mobil avem numai curbe negradate și puncte fixe. La aceste nomograme planul mobil se realizează dintr-o placă transparentă, pe care sînt desenate sau gravate anumite curbe negradate și eventual puncte fixe. In anumite cazuri particulare, transparentul poate fi înlocuit cu o riglă (sau fir întins). Se utilizează însă și nomograme la care în planul mobil avem scări sau familii de curbe cotate. Deci, după un al doilea criteriu, nomogramele se clasifică în nomograme cu planul mobil fără elemente geometrice cotate (nomograme cu transparent) și în nomograme cu elemente cotate în planul mobil.

I. PLANUL MOBIL ARE TREI GRADE DE LIBERTATE

A. Planul mobil nu conține elemente geometrice cotate

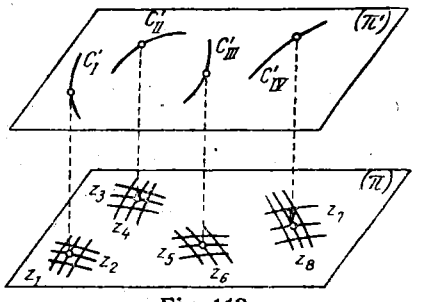
O nomogramă generală de acest tip conține în planul mobil (transparent) patru curbe negradate $C'_{\rm I}$, $C'_{\rm II}$, $C'_{\rm III}$ și $C'_{\rm IV}$ (fig. 112), iar în planul fix patru cîmpuri binare (z_1, z_2), (z_3, z_4), (z_5, z_6) și (z_7, z_8). Nomograma se utilizează după următoarea formulă de structură:

$$P_{1,2}\rightharpoonup C'_{\rm I},\quad P_{3,4}\rightharpoonup C'_{\rm II},\quad P_{5,6}\rightharpoonup C'_{\rm III},\quad P_{7,8}\leftharpoondown C'_{\rm IV}.$$

Cunoscînd valorile $z_1, z_2, \ldots, z_7$ putem afla pe z_8.

Cele patru cîmpuri binare sau o parte din ele pot fi înlocuite cu scări. In fig. 113 avem trei scări și un cîmp binar în planul (π). Nomograma are formula de structură

$$P_1\rightharpoonup C'_{\rm I},\ P_{2,3}\rightharpoonup C'_{\rm II},\ P_4\rightharpoonup C'_{\rm III},\quad P_5\leftharpoondown C'_{\rm IV}.$$



Fig, 112

După ce s-au fixat contactele de poziție, se citește cota z_5 a punctului de intersecție dintre scara z_5 și curba $C'_{\rm IV}$. Această nomogramă rezolvă o ecuație cu cinci variabile.

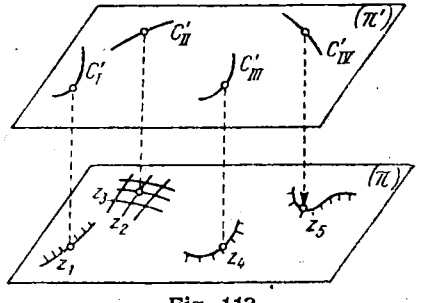


Fig. 113

Inlocuirea cîmpurilor binare cu scări nu modifică esențial structura nomogramei; este o particularizare în care anumite variabile se înlocuiesc cu constante.

Printr-o modificare a nomogramei din fig. 112 putem mări numărul variabilelor corespunzătoare. Pentru aceasta înlocuim curba $C'_{\rm IV}$, cu o familie de curbe mute (fără cote) și introducem încă un cîmp binar în planul (π). Cele trei contacte de poziție

$$P_{1,2}\rightharpoonup C'_{\rm I},\quad P_{3,4}\rightharpoonup C'_{\rm II},\quad P_{5,6}\rightharpoonup C'_{\rm III}$$

determină poziția planului (π') (fig. 114). Valorile date z_7 și z_8 determină punctul $P_{7,8}$ al cîmpului binar (z_7, z_8). Căutăm curba familiei $C'_{\rm IV}$ care trece prin $P_{7,8}$ și marcăm punctul ei de intersecție cu curba de cotă z_9. Prin acest punct de intersecție trece o curbă din cealaltă familie a cîmpului binar (z_9, z_{10}); cota ei este valoarea căutată z_{10}. Acest contact se numește *contact de transport* și se notează astfel:

$$P_{7,8}\rightarrow C'_{\rm IV},\quad P_{9,10}\leftharpoondown C'_{\rm IV}.$$

Cele patru curbe C'_I, C'_{II}, C'_{III}, C'_{IV} (fig. 112), sau o parte din ele, pot coincide. Din acest punct de vedere deosebim:

a) **Nomograme cu o singură curbă negradată în planul mobil.** Cele patru curbe din planul mobil sînt înlocuite cu o singură curbă C'_0 (fig. 115). Deosebim două subcazuri:

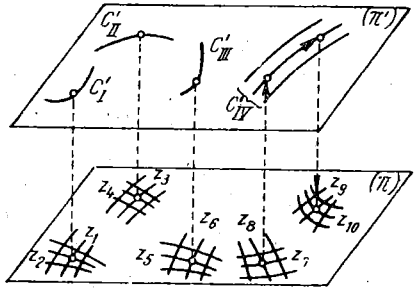


Fig. 114

1. *Curba C'_0 determină poziția planului mobil.* Formula de structură a nomogramei este

$$P_{1,2} \rightarrow C'_0, \quad P_{3,4} \rightarrow C'_0,$$
$$P_{5,6} \rightarrow C'_0, \quad P_{7,8} \rightarrow C'_0.$$

2. *Curba C_0 nu determină complet poziția planului mobil.* Planul poate avea o mișcare, care lasă invariantă curba C'_0. Avem două posibilități: curba C'_0 este o dreaptă sau un cerc. Poziția curbei C'_0 este determinată numai de două contacte de poziție.

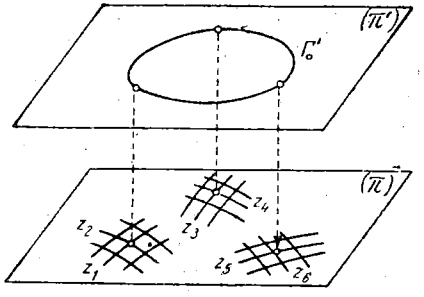


Fig. 115

Nomograma cu transparent circular se obține dacă luăm pentru C'_0 un cerc Γ'_0 (fig. 115). Formula de structură este $P_{1,2} \rightarrow \Gamma'_0$, $P_{3,4} \rightarrow \Gamma'_0$, $P_{5,6} \leftarrow \Gamma'_0$.

Relația funcțională între variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_6$ se obține scriind că punctele $P_{1,2}(f_{1,2}, g_{1,2})$, $P_{3,4}(f_{3,4}, g_{3,4})$ și $P_{5,6}(f_{5,6}, g_{5,6})$ sînt pe un cerc de rază dată R. Coordonatele acestor puncte verifică ecuația

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

sau

$$2ax+2by-d^2=x^2+y^2-R^2,$$

unde

$$a^2+b^2=d^2.$$

Deci,

$$2af_{1,2}+2bg_{1,2}-d^2=f^2_{1,2}+g^2_{1,2}-R^2,$$
$$2af_{3,4}+2bg_{3,4}-d^2=f^2_{3,4}+g^2_{3,4}-R^2,$$
$$2af_{5,6}+2bg_{5,6}-d^2=f^2_{5,6}+g^2_{5,6}-R^2.$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu $2a$, $2b$ și $-d^2$, găsim:

$$2a=\frac{\begin{vmatrix} f^2_{i,i+1}+g^2_{i,i+1}-R^2 & g_{i,i+1} & 1 \\ f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$2b=\frac{\begin{vmatrix} f_{i,i+1} & f^2_{i,i+1}+g^2_{i,i+1}-R^2 & 1 \\ f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}},$$

$$-d^2=\frac{\begin{vmatrix} f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & f^2_{i,i+1}+g^2_{i,i+1}-R^2 \\ f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{i,i+1} & g_{i,i+1} & 1 \end{vmatrix}}$$

($i=1, 3, 5$). Înlocuind expresiile găsite în $a^2+b^2=d^2$, obținem:

$$\begin{vmatrix} f_{1,2} & f^2_{1,2}+g^2_{1,2} & 1 \\ f_{3,4} & f^2_{3,4}+g^2_{3,4} & 1 \\ f_{5,6} & f^2_{5,6}+g^2_{5,6} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^2_{1,2}+g^2_{1,2} & g_{1,2} & 1 \\ f^2_{3,4}+g^2_{3,4} & g_{3,4} & 1 \\ f^2_{5,6}+g^2_{5,6} & g_{5,6} & 1 \end{vmatrix} =$$
$$=4\begin{vmatrix} f_{1,2} & g_{1,2} & 1 \\ f_{3,4} & g_{3,4} & 1 \\ f_{5,6} & g_{5,6} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{1,2} & g_{1,2} & f^2_{1,2}+g^2_{1,2}-R^2 \\ f_{3,4} & g_{3,4} & f^2_{3,4}+g^2_{3,4}-R^2 \\ f_{5,6} & g_{5,6} & f^2_{5,6}+g^2_{5,6}-R^2 \end{vmatrix}.$$

Dacă o ecuație dată poate fi adusă la această formă, atunci ea poate fi rezolvată cu ajutorul nomogramei cu transparent circular.

Nomograma cu puncte aliniate se obține luînd pentru C'_0 o dreaptă D'_0 (fig. 116). Formula de structură este

$$P_{1,2} \rightarrow D'_0, \quad P_{3,4} \rightarrow D'_0, \quad P_{5,6} \leftarrow D'_0.$$

Transparentul poate fi înlocuit cu o dreaptă. Ecuația rezolvată de nomograma cu puncte aliniate se obține scriind că

punctele $P_{1,2}(f_{1,2}, g_{1,2})$, $P_{3,4}(f_{3,4}, g_{3,4})$ și $P_{5,6}(f_{5,6}, g_{5,6})$ sînt coliniare (cap. VI, 1)

$$\begin{vmatrix} f_{1,2} & g_{1,2} & 1 \\ f_{3,4} & g_{3,4} & 1 \\ f_{5,6} & g_{5,6} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Înlocuind cele trei cîmpuri cu scări obținem nomograma cu puncte aliniate obișnuită.

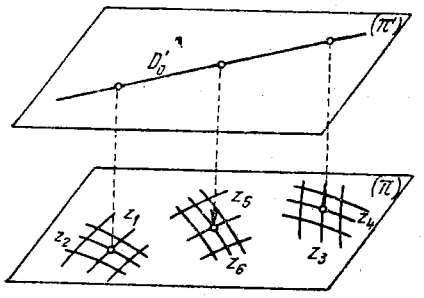


Fig. 116

b) **Nomograma cu două curbe în planul mobil.** Cele patru curbe C'_I, C'_{II}, C'_{III}, C'_{IV} sînt înlocuite cu două curbe C'_I și C'_{II}.

1. *Curbele C'_I și C'_{II} determină planul mobil.* Următoarele două tipuri particulare sînt mai importante.

Nomograma cu transparent în formă de cruce. Liniile C'_I și C'_{II} sînt două drepte perpendiculare D'_I și D'_{II} (fig. 117). Formula de structură este

$$P_{1,2} \dashv D'_I, \quad P_{3,4} \dashv D'_I, \quad P_{5,6} \dashv D'_{II}, \quad P_{7,8} \leftarrow D'_{II}.$$

Ecuația reprezentată de această nomogramă se găsește scriind că dreapta $P_{1,2}P_{3,4}$ este perpendiculară pe $P_{5,6}P_{7,8}$:

$$\frac{g_{3,4}-g_{1,2}}{f_{3,4}-f_{1,2}} + \frac{f_{7,8}-f_{5,6}}{g_{7,8}-g_{5,6}} = 0.$$

Exemplu. Efortul unitar tangențial τ la răsucirea unei bare cu secțiune dreptunghiulară este dat de formula

$$\tau = 4{,}5\,\frac{M}{u^2 h},$$

unde M este momentul de răsucire, iar u și h dimensiunile secțiunii. Aplicînd logaritmii, formula se scrie

$$\lg M - 2\lg u + \lg 4{,}5 = \lg \tau + \lg h.$$

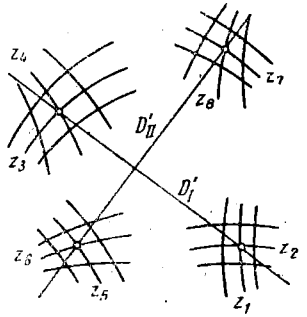


Fig. 117

Formula intră în categoria de mai sus, funcțiile $f_{i,k}$ și $g_{i,k}$ fiind numai de o singură variabilă; deci, în loc de patru cîmpuri vom avea patru scări:

$$g_{3,4} = \lg M + \lg 4{,}5, \qquad f_{3,4} = 1,$$
$$g_{1,2} = 2\lg u, \qquad f_{1,2} = 0,$$
$$f_{7,8} = \lg s, \qquad g_{7,8} = 0,$$
$$f_{5,6} = -\lg h, \qquad g_{5,6} = 1,$$

Nomograma este dată în fig. 118.

Nomograma cu transparent în unghi drept are în planul mobil un unghi drept cu vîrful în P'_0 și cu laturile D'_I și D'_{II} (fig. 119).

Vîrful P'_0 este în contact dublu cu un punct din planul (π). Formula de structură este

$$P_{1,2} \equiv P'_0, \quad P_{3,4} \dashv D'_I, \quad P_{5,6} \leftarrow D'_{II}.$$

Ecuația reprezentată de această nomogramă se scrie astfel:

$$\frac{g_{3,4}-g_{1,2}}{f_{3,4}-f_{1,2}} + \frac{f_{5,6}-f_{1,2}}{g_{5,6}-g_{1,2}} = 0.$$

Exemplu. $w = uv$. Aplicînd logaritmii, relația dată apare sub forma de mai sus, în care funcțiile $f_{i,k}$ și $g_{i,k}$ se reduc la funcții de cîte o singură variabilă, deci în loc de cele trei cîmpuri avem trei scări (fig. 120).

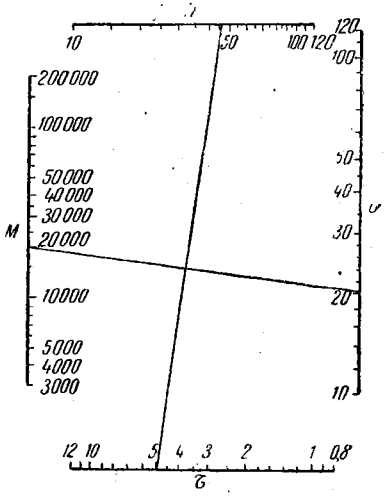


Fig. 118

2. *Curbele C'_I și C'_{II} nu determină complet poziția planului mobil.* C'_I și C'_{II} pot fi două drepte paralele sau două cercuri concentrice. Aceste nomograme nu prezintă

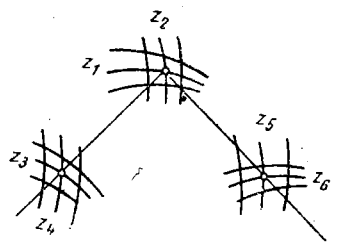


Fig. 119

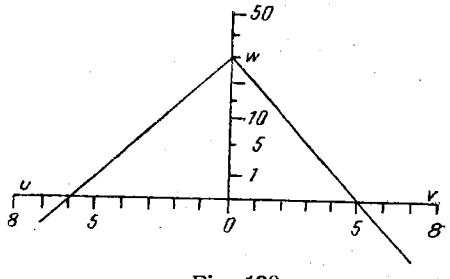


Fig. 120

interes deoarece ele revin la nomograma cu transparent circular sau la cea cu puncte aliniate.

c) **Nomograme cu trei sau patru curbe în planul mobil.** Ele reprezintă cazul general, sau un caz cu o particularizare neînsemnată a nomogramelor din categoria *A*.

d) **Nomograme cu contact de transport.** Următoarele două tipuri particulare sînt mai remarcabile.

Nomograma avînd transparent cu paralele. Planul (π') conţine o familie de drepte paralele. Formula de structură

$$P_{1,2} \multimap D'_{\mathrm{I}},\ P_{3,4} \multimap D'_{\mathrm{I}},\ P_{5,6} \rightarrow D'_{\mathrm{II}},\ P_{7,8} \leftarrow D'_{\mathrm{II}}$$

arată felul în care se foloseşte această nomogramă: prin punctele date $P_{1,2}$ şi $P_{3,4}$ plasăm o dreaptă din familia de drepte paralele: apoi căutăm dreapta din familie care trece prin $P_{5,6}$; prin intersecţia ei cu curba dată z_7 trece o curbă a familiei z_8; cota ei este z_8 căutat. Ecuaţia rezolvată se scrie astfel:

$$\frac{g_{3,4}-g_{1,2}}{f_{3,4}-f_{1,2}} = \frac{g_{7,8}-g_{5,6}}{f_{7,8}-f_{5,6}}.$$

Exemplu.

$$\frac{u^2}{m^2} - \frac{v^2}{n^2} = 1.$$

Ecuaţia se scrie sub forma

$$\frac{u^2}{m^2} = \frac{v^2+n^2}{n^2}.$$

Nomograma se poate utiliza şi fără transparent, ducînd prin $P_{5,6}$ o paralelă la dreapta $P_{1,2}P_{3,4}$ (fig. 121).

Nomograma cu cercuri concentrice are în transparent o familie de cercuri concentrice Γ' cu centrul în P'_0. Formula de structură se scrie

$$P_{1,2} \equiv P'_0,\quad P_{3,4} \rightarrow \Gamma'_{\mathrm{I}},\quad P_{5,6} \leftarrow \Gamma'_{\mathrm{I}}.$$

Centrul se plasează în $P_{1,2}$ şi se caută cercul Γ'_{I} care trece prin $P_{3,4}$; prin intersecţia lui Γ'_{I} cu curba z_5 trece o singură curbă din familia z_6; cota ei este valoarea căutată pentru z_6. Această nomogramă poate fi folosită de asemenea fără transparent (fig. 122). Fixăm vîrful compasului în $P_{1,2}$ şi descriem un cerc ce trece prin $P_{3,4}$; acest cerc este Γ'_{I}. Am obţinut *nomograma cu compas a lui Gersevanov*. Ecuaţia corespunzătoare este

$$(f_{3,4}-f_{1,2})^2+(g_{3,4}-g_{1,2})^2=(f_{5,6}-f_{1,2})^2+(g_{5,6}-g_{1,2})^2.$$

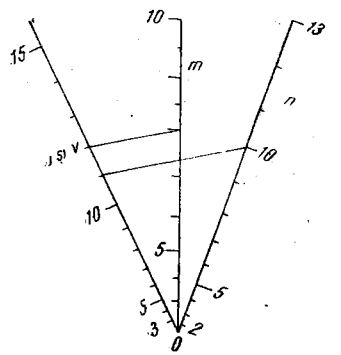


Fig. 121

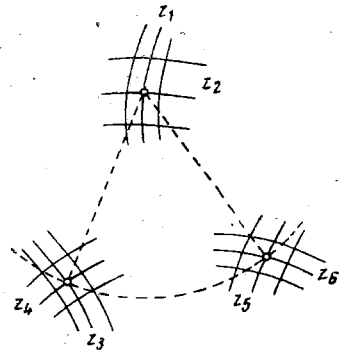


Fig. 122

B. PLANUL MOBIL CONŢINE ELEMENTE GEOMETRICE COTATE

a) **Planul mobil are o scară.** Există mai multe tipuri, din care amintim:

1) $P_{2,3} \equiv P'_1,\quad P_{4,5} \multimap C'_0,\quad P_{6,7} \leftarrow C'_0.$

Pe curba C'_0 se află scara z_1. Un anumit punct al scării z_1 se află în contact dublu cu un anumit punct al cîmpului binar (z_2, z_3) (fig. 123). Planului mobil i-a rămas un singur grad de libertate, poate să se rotească în jurul punctului de contact dublu. Poziţia definitivă a curbei C'_0 se determină silind-o să treacă printr-un punct dat al cîmpului binar (z_4, z_5). Prin punctul de intersecţie dintre C'_0 şi curba z_6 trece o singură curbă z_7; cota ei este valoarea căutată z_7.

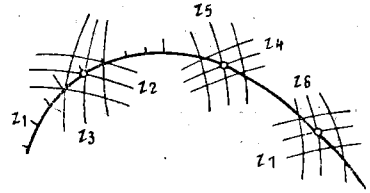


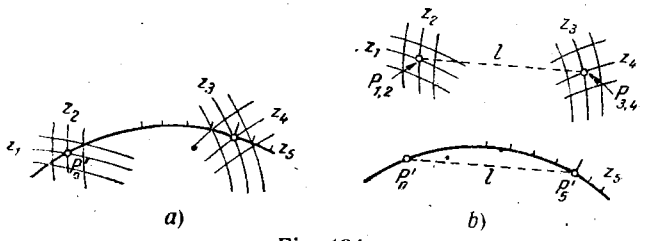
Fig. 123

2) $P_{1,2} \equiv P'_0,\quad P_{3,4} \multimap C'_0,\quad P_{3,4} \rightarrow P'_5.$

Punctul fix P'_0 al sportului scării z_5 din planul (π') se aduce în contact dublu cu punctul $P_{1,2}$ al cîmpului binar (z_1, z_2), apoi rotim suportul scării z_5 pînă cînd trece prin punctul $P_{3,4}$ al cîm-

pului binar (z_3, z_4) (fig. 124, *a*). In fața punctului $P_{3,4}$ se citește pe scara z_5 rezultatul.

Această nomogramă este un caz particular al *nomogramelor cu compas*. In adevăr, se poate utiliza în felul următor. Considerînd în același plan cîmpurile (z_1, z_2) (z_3, z_4) și scara z_5 (fig. 124, *b*) luăm în compas distanța dintre $P_{1,2}$ și $P_{3,4}$, fixăm un vîrf al compasului în P'_0 și citim cota corespunzătoare celuilalt vîrf pe scara z_5. Se observă că scara curbilinie z_5 poate fi înlocuită cu una rectilinie.



a) *b*)

Fig. 124

Considerînd cazul cînd cele două cîmpuri se reduc la scări de ecuații (fig. 125)

$$\begin{cases} x=f_1, \\ y=g_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=f_2, \\ y=g_2, \end{cases}$$

și a treia la scara rectilinie

$$t=f_3,$$

atunci ecuația rezolvată de această nomogramă compas este

$$f_3^2=(f_1-f_2)^2+(g_1-g_2)^2.$$

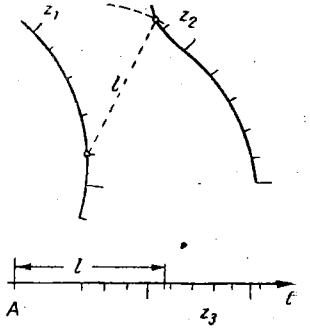


Fig. 125

Exemplu. Să se construiască o nomogramă pentru formula

$$l=\frac{\sqrt{(11p+4d)\,(p+4d)}}{10}$$

($0<p<400$ mm, $0<d<100$ mm, $0<l<200$ mm), care dă distanța l între două șiruri de nituri în zig-zag; d reprezintă diametrul unui nit, iar p este distanța dintre două nituri consecutive din același șir.

Formula se poate scrie astfel

$$(\sqrt{c+1\,100\,l^2})^2=(24\,d+11p)^2+(\sqrt{c-400\,d^2})^2,$$

unde parametrul arbitrar c se determină astfel ca $c-400\,d^2>0$. In cazul datelor problemei d fiind mai mic decît 100, se alege $c=4\,000\,000$. Ecuațiile scărilor sînt

$$\begin{cases} x=24\mu\,d, \\ y=\mu\sqrt{4\,000\,000-400\,d^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-11\,\mu\,p, \\ y=0; \end{cases}$$

$$t=\mu\sqrt{4\,000\,000+1\,100\,e^2}.$$

În fig. 126 s-a ales $\mu=0{,}025$ mm. De exemplu, $p=150$ mm, $d=60$ mm. Punem un vîrf al compasului în $p=150$ și celălalt vîrf în $d=60$. Mențiînd deschiderea obținută a compasului, punem un vîrf în A și celălalt vîrf al compasului indică pe scara t răspunsul $l=85$.

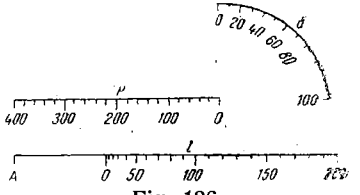


Fig. 126

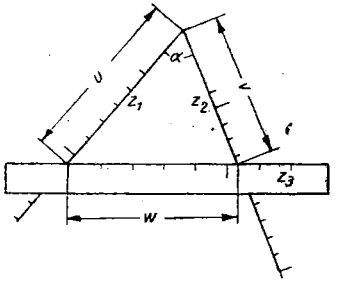


Fig. 127

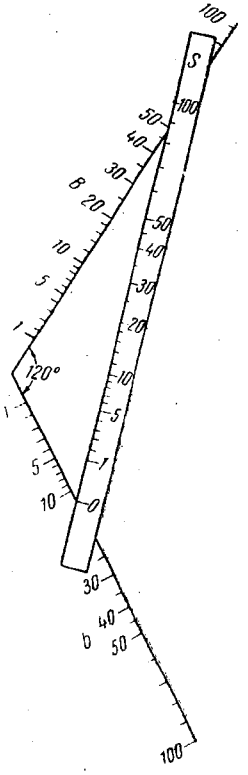


Fig. 128

Caz particular. In fig. 127, cele două cîmpuri binare din planul (π) sînt înlocuite cu două scării rectilinii și curba C_6 este de asemenea o scară rectilinie. Avem:

$$u=f_1(z_1),\ v=f_2(z_2),\ w=f_3(z_3),\ w^2=u^2+v^2-2uv\cos\alpha,$$
$$f_3^2=f_1^2+f_2^2+k\cdot f_1 f_2,\ k=-2\cos\alpha.$$

Exemplu. Putem construi o nomogramă de acest tip pentru formula

$$S=B+b+\sqrt{Bb},$$

care intervine în calculul volumului unui trunchi de piramidă. Luăm

$$f_1=\sqrt{B},\quad f_2=\sqrt{b},\quad f_3=\sqrt{S},$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2}.$$

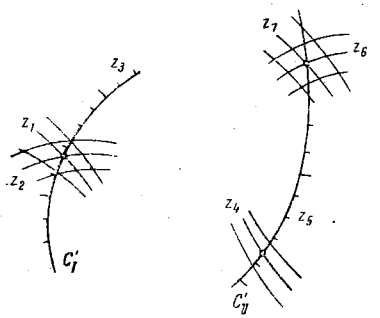


Fig. 129

In nomograma din fig. 128 se vede exemplul: $B=48$, $b=12$, $S=84$.

b) **Planul mobil are două scări.** O variantă a acestor nomograme are formula de structură

$$P_{1,2}\rightleftarrows P_3',\quad C_4\dashv P_5',\quad P_{6,7}\leftarrow C_{II}'.$$

In varianta considerată (fig. 129), un punct al scării z_3 este în contact dublu cu un punct al cîmpului binar (z_1, z_2). După stabilirea acestui contact planul (π) are o mişcare de rotaţie; îl rotim pînă cînd un punct dat al scării z_5 se află pe o scară dată z_4. Contactul de rezolvare permite citirea valorii z_7.

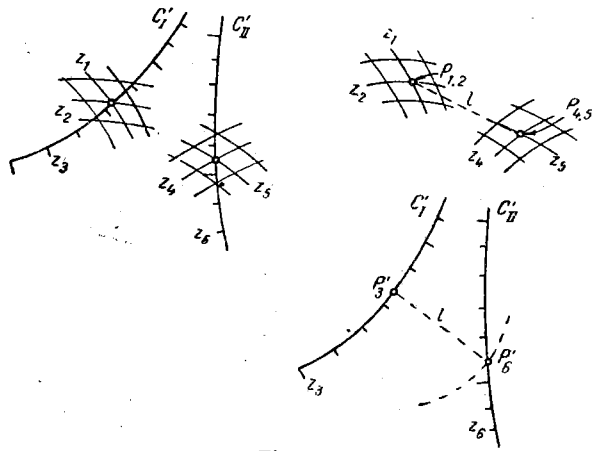


Fig. 130

Obţinem o altă variantă, dacă contactul de rezolvare coincide cu al doilea contact de poziţie. Formula de structură devine

$$P_{1,2}\rightleftarrows P_3',\quad P_{4,5}\dashv C_{II}',\quad P_{4,5}\rightarrow P_6'.$$

Această nomogramă poate fi utilizată şi astfel: cele două plane (π) şi (π') se aşază unul lîngă celălalt (fig. 130), se ia în compas distanţa dintre $P_{1,2}$ şi $P_{4,5}$ şi se descrie un cerc de rază astfel obţinută cu centrul în P_3'; cota punctului de intersecţie al acestui cerc cu scara z_6 ne dă valoarea căutată a variabilei z_6. Sub această formă nomograma se numeşte *nomogramă cu compas.*

II. PLANUL MOBIL ARE DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

A. Planul mobil are o mişcare de translaţie şi una de rotaţie

La aceste nomograme, un punct fix al planului mobil este obligat să se mişte pe o dreaptă fixă a planului fix. Formula de structură în cazul cel mai general este

$$D_0\dashv P_0',\quad P_{1,2}\dashv C_3',\quad P_{4,5}\dashv C_6',\quad P_{7,8}\leftarrow C_9'.$$

B. Planul mobil are două mişcări de translaţie

Două drepte paralele aşezate în planul (π) şi (π') rămîn paralele tot timpul, sau o dreaptă D_0' a planului (π) trece mereu prin acelaşi punct $P_{0,\infty}$ al planului (π). Avem

$$P_{0,\infty}\dashv D_0',\quad P_{1,2}\dashv C_3',\quad P_{4,5}\dashv C_6',\quad P_{7,8}\leftarrow C_9'.$$

Două tipuri particulare:

Nomograma hexagonală. In planul (π) avem scări rectilinii aşezate pe laturile unui triunghi echilateral, iar în planul (π') un index format din trei drepte concurente în O', determinînd între ele cîte un unghi de 120°. Mişcarea de translaţie a planului (π') este asigurată prin păstrarea perpendicularităţii dreptelor indexului pe scările corespunzătoare (fig. 131).

Se observă că suma $x+y+z$ nu se schimbă, dacă deplasăm punctul O' pe o dreaptă perpendiculară pe oricare latură a triunghiului echilateral. Deci,

$$x+y+z=\text{const}.$$

Ţinînd seama de ecuaţiile scărilor $x=f_1(z_1)$, $y=f_2(z_2)$, $z=f_3(z_3)$, avem

$$f_1(z_1)+f_2(z_2)+f_3(z_3)=\text{const.}$$

Nomograma romboidală se compune dintr-o scară rectilinie z_1 al cărei suport trece prin punctul O, dintr-un cîmp binar (z_2, z_3) şi dintr-o familie de curbe z_4 (fig. 132). Fiind date z_1,

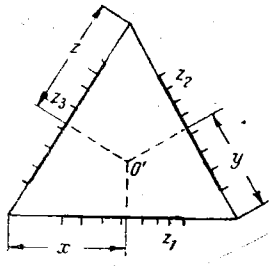


Fig. 131

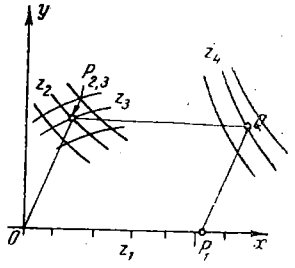


Fig. 132

z_2, z_3, fixăm punctele P_1 şi $P_{2,3}$, construim un paralelogram avînd ca vîrfuri O, P_1 şi $P_{2,3}$ şi citim cota curbei din familia z_4 pe care se află al patrulea vîrf Q al paralelogramului. Nomograma romboidală se poate utiliza şi astfel. Cîmpul binar (z_2, z_3) şi familia de curbe z_4 fiind desenate în planul (π), iar scara z_1 în (π'), mişcăm scara z_1 în aşa fel ca să rămînă în permanenţă paralelă cu ea însăşi pînă cînd punctul O coincide cu $P_{2,3}$; atunci P_1 va coincide cu punctul Q. Utilizată sub această formă nomograma romboidală face parte din nomogramele la care planul mobil poate efectua numai mişcări de translaţie. Formula de structură este

$$P_{0,\infty} \dashv D_0', \quad P_{2,3} \amalg 0', \quad C_4 \leftarrow P_1',$$

unde D_0' înseamnă suportul scării z_1 şi $P_{0,\infty}$ un punct de la infinit al planului (π). Ecuaţiile elementelor cotate sînt:

$$\textit{Scara } z_1 \begin{cases} x=f_1(z_1), \\ y=0. \end{cases}$$

$$\textit{Cîmpul binar } \begin{cases} x=f_{2,3}(z_2, z_3), \\ y=g_{2,3}(z_2, z_3). \end{cases}$$

$$\textit{Familia de curbe } z_4 \quad F(x, y; z_4)=0.$$

Coordonatele punctului Q

$$\begin{cases} x=f_{2,3}+f_1, \\ y=g_{2,3} \end{cases}$$

verifică ecuaţia curbei z_4:

$$F(f_{2,3}+f_1,\ g_{2,3}\ z_4)=0.$$

Dacă o ecuaţie cu patru variabile poate fi adusă la această formă, atunci o putem reprezenta cu nomograma romboidală.

III. PLANUL MOBIL ARE UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE

A. Mişcarea de translaţie

În această categorie intră *rigla de calcul.* Ea rezolvă ecuaţii de forma

$$f_1(z_1)+f_2(z_2)=f_3(z_3).$$

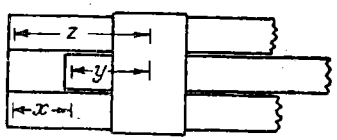


Fig. 133

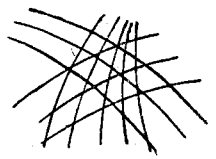


Fig. 134

In adevăr, avem (fig. 133)

$$x+y=z,$$

$$x=f_1(z_1), \quad y=f_2(z_2), \quad z=f_3(z_3).$$

In cazul particular,

$$x=\lg z_1, \quad y=\lg z_2, \quad z=\lg z_3,$$

avem relaţia

$$z_1 \cdot z_2=z_3$$

şi obţinem rigla de calcul obişnuită (rigla logaritmică).

B. Mişcarea de rotaţie

Două discuri concentrice articulate în centrul lor comun pot înlocui rigla de calcul din *A.*

IV. PLANUL (π') ESTE FIX (nu avem nici un grad de libertate)

Familiile z_1 și z_2 sînt trasate în planul (π), iar familia z_3 în planul (π'). Fiind dat z_1 și z_2, se caută cota curbei z_3, care trece prin intersecția curbelor z_1 și z_2 (fig. 134). Se vede că am obținut nomograma cu linii cotate pentru ecuația cu trei variabile, studiată în cap. III.

BIBLIOGRAFIE

1. *Avramescu A.*, Constructia și utilizarea nomogramelor, Bul. Soc. Politehnice din Romînia, anul 61 (1948), pp. 89-134.

2. *Cîmpan F.*, Nomografie, Lit. Univ. Iași, 1949.

3. *Fréchet M. - Roullet H.*, Nomographie, Paris, 1928.

4. *Глаголев Н. А.*, Теоретические основи номографии, Москва, 1936

5. *Глаголев Н. А.*, Курс номографии, Москва, 1943.

6. *Ionescu I.*, Nomografia sau teoria tablourilor grafice, Bul. Soc. Politehnice din Romînia, 1899—1900. Göbl, București, 1900.

7. *Lambert R.*, Structure générale des nomogrames et des systémes nomographiques, Paris, 1937.

8. *Luckey P.*, Nomographische Darstellungsmöglichkeiten, Z. angew. Math. Mech., vol, 3 (1923), pp. 46-59.

9. *Luckey P.*, Die Verstrekung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung, Z. angew. Math. Mech, vol. 4 (1924), pp. 61-80.

10. *Meyer zur Capellen* W., Leitfaden der Nomographie, Berlin, 1953.

11. *Невски В. А.*, Справочник книга по номографии, Москва—Ленинград, 1951.

12. *d'Ocagne M.*, Traité de Nomographie, ediția a doua, Paris, 1921.

13 *d'Ocagne M.*, Esquisse d'ensemble de la Nomographie, Mémorial des sciences mathématiques, Paris, 1925.

14. *d'Ocagne M.*, Calcul graphique et Nomographie, ediția a treia, Paris, 1928.

15. *Pentkovski M. V.*, Nomografia, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, București, 1952.

16. *Pentkovski M. V.*, Nomograme, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, București, 1956.

17. *Schwerdt H.*, Lehrbuch der Nomographie, Berlin, 1924.

18. *Schwerdt H.*, Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin, 1931.

19. *Soreau R.*, Nomographie ou traité des Abaques, Paris, 1921.

20 *Teodorescu N.*, Calcul numeric și grafic, Lit. Inst. Politehnic, București, 1951.

21. *Vrănceanu G.*, Geometrie analitică și proiectivă, Editura Tehnică, București, 1954.

22. *Зиманенко С. С. — Левит Д. Е.*, Расчёт двигателей внутреннего сгорания с помощю номограмм, Москва, 1948.

INDEX ALFABETIC

Afinitate omologică 91
— specială 91
Anamorfoză 24
Anamorfoze distincte 24
— egale 24

Biraport a patru puncte 101
— armonic 101

Cauchy, ecuația ~ 24
Centrul omologiei 119
Ceva, teorema ~ 32
Cîmp binar 13
Comprimare-dilatare 91
Condiția lui Saint-Robert 26
Contact de rezolvare 156
— — transport 161
— dublu 155
— simplu 155
Contacte 155
— pozitive 156
Coordonată proiectivă 102
Coordonate omogene 110
Corelație 125
Cota punctului nul 8

Deplasări 91
Determinatul lui Massou 33, 35
Discriminantul ecuației 60—61
Disjuncția variabilelor 19
Dreapta proiectivă 100
Drepte fixe 117
— unite 117

Ecuația lui Cauchy 24, 146
— — Soreau 33, 35
Ecuații de anamorfoză 24
Ecuațiile scării 6
Elemente constitutive 11
Eroare absolută 8
— geometrică 7, 34
— relativă 8, 89
— — maximă 8
— — minimă 8
Eroarea rezultatului 88

Familii de linii cotate 11
Forme canonice 60
— de speța întîi 101
Formula de structură 157
Funcție nomografic rațională 57
— omografică 102

Genul nomogramei 57
Goursat E., condiția ~ 78

Interpolare grafică proiectivă 127
— proiectivă 9
Interval grafic 7

Massau-Lecornu, condiția ~ 56
Modulul scării 7

Nomograma cu compas a lui Gersevanov 167
— — puncte aliniate 10
— ecuației lui Cauchy 49
— — — Clark 52
— înmulțirii 9
Nomogramă carteziană 10
— cu cercuri concentrice 166
— contact de tarnsport 166
— — două curbe în plan mobil 164
— — dublă aliniere 79
— — întretăieri 19
— — linii concurente 19
— — puncte aliniate 34
— — rețele 19
— — scară binară 80
— — transparent circular 162
— — — cu paralele 166
Nomogramă cu transparent în unghi drept 165
— — trei sau patru curbe în planul mobil 166
— — trei sau patru curbe în plan elementară 159
— hexagonală 171
— romboidală 172

Nomograme compuse 159
Omografie 113
— cu triunghi fix 119
Omologie 117
— armonică 120
— specială 119
Omotetie 91
Ordin nomografic 57
— — al ecuației 57
— — — funcției 57

Pas 11
Pasul scării 7
Perspectivitate 106, 107
Plan proiectiv 109
Pouchet L., nomograma ~ 19
Problema anamorfozei 21
— generală a anamorfozei 28
Proiecție cilindrică 92
Punct cotat 6
Puncte fixe 117
— unite 117

Regula eliminării 58
Relație biliniară 105
Rețea 13
— cu drepte paralele fixe 146

Saint-Robert, condiția ~ 26, 55
Scară 6
— dublă 14
— logaritmică 8
— mută 79
— pirot 79
— proiectivă 8
— regulată 8
Simetria în raport cu o axă 91
Soreau, ecuația ~ 33, 35
Suportul scării 6

Transformare afină 91
Transformata proiectivă a scării 109
Translații 141, 143
Triunghi fundamental 112

TABLA DE MATERII

Pag.

Prefață 3

Cap. I. **Noțiuni introductive** 5

1. Metode grafice de calcul 5
2. Scara 6
3. Nomograma înmulțirii 9
4. Nomograma carteziană 10
5. Familii de linii cotate 11
6. Notații 13

Cap. II. **Nomograme pentru ecuațiile cu două variabile** . . . 14

1. Scara dublă 14
2. Exemple 16

Cap. III. **Nomograme cu linii cotate pentru ecuațiile cu trei variabile** 18

1. Generalități 18
2. Problema anamorfozei 21
3. Problema generală a anamorfozei 28
4. Tipuri particulare de nomograme cu familii de drepte cotate . 31

Cap. IV. **Nomograme cu puncte aliniate pentru ecuațiile cu trei variabile** 33

1. Generalități 33
2. Nomogramele ecuației $f_1=f_2f_3$ 35
3. Nomogramele ecuației $f_3=f_1+f_2$ 42
4. Nomogramele ecuației $f_1f_2f_3=f_1+f_2+f_3$ 48
5. Nomograma ecuației lui Cauchy 49
6. Nomograma ecuației lui Clark 52
7. Nomograma ecuației $f_3g_1+f_3g_2=f_1+f_2$ 54

Cap. V. **Teoria generală a nomogramelor cu puncte aliniate** . . 55

1. Istoric 55
2. Genul nomogramei. Ordin nomografic 57
3. Regula eliminării 58
4. Ecuația de ordinul al treilea nomografic 60
5. Ecuația de ordinul al patrulea nomografic 64
6. Ecuațiile de ordinul al cincilea și al șaselea nomografic . . 69

Pag.

7. Tabela ecuațiilor cu trei variabile, rezolvabile prin nomograme cu puncte aliniate 70

Cap. VI. **Nomograme pentru ecuații de mai multe variabile** . . 74

1. Nomograme cu puncte aliniate, având cîmpuri binare . . 74
2. Nomograme compuse pentru ecuații cu patru variabile . . 76
3. Nomograme compuse pentru ecuații cu un număr mare de variabile 82

Cap. VII. **Precizia la nomograma cu puncte aliniate** 84

1. Eroarea geometrică 84
2. Eroarea rezultatului 88
3. Transformarea nomogramelor 89

Cap. VIII. **Noțiuni de geometrie proiectivă cu aplicații la nomografie** 90

1. Transformarea afină 90
2. Proprietățile transformărilor afine 92
3. Expresia analitică a transformării afine 95
4. Aplicații la construirea nomogramelor 99
5. Dreapta proiectivă. Biraport 100
6. Proiectivitate între două forme de speța întîi 104
7. Scara proiectivă 107
8. Planul proiectiv. Coordonate omogene. Coordonate proiective 109
9. Omografie 113
10. Aplicații la transformarea nomogramelor 122
11. Corelația 125

Cap. IX. **Construcția scărilor** 126

1. Interpolare proiectivă 126
2. Obținerea erorilor minime prin transformarea proiectivă a scărilor 132

Cap. X. **Transformarea nomogramelor prin omografii** 139

1. Teoria generală 139
2. Ecuația lui Cauchy 146
3. Exemplu 149

Cap. XI **Clasificarea generală a nomogramelor. Diferite tipuri de nomograme** 154

1. Nomograma generală 154
2. Nomograma elementară și compusă 159
3. Clasificarea nomogramelor elementare. Cazuri particulare . 160

Bibliografie 175

Index alfabetic 176

T. 2478

Recenzent: Neicov Valentina
Control ştiinţific: Prof. Popoviciu Tiberiu, membru corespondent al Aacad. R.P.R.

Responsabil de carte: Pop Avram
Tehnoredactor: Vasilescu Miliana
Corector responsabil: Ing. Ianculescu Maria

Dat la cules 01.10.56. Bun de tipar 21.11.56. Hîrtie cărţi şcolare de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale 9,94. Coli de tipar 11,50. Planşe tipo 1. Comanda PR 3103 A 03871.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 518.3.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 518.

Tiparul executat sub comanda nr. 5532 la Intreprinderea Poligrafică Timişoara, str. Popa Şapcă nr. 8. — R.P.R.

ERATĂ

Pag.:	Rîndul:	In loc de:	Se va citi:	Din vina:
71	Coloana 2	Teorema (II)	Forma (II)	Editurii
105	16 sus	$\lambda' = \frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}$	$\lambda' = -\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}$	»

Lecţii de nomografie

Lei 5,65

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMINE
ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

1. Acad. *Eugen Bădărău,*	Realizări noi în ultraacustică
2. *Mircea Herovanu,*	Electricitatea atmosferică
3. Acad. Prof. *Șerban Țițeica,*	Elemente de mecanică statică
4. *Ion Agîrbiceanu,*	Lumina polarizată
5. *M. E. Mayer,*	Operatori liniari în spații unitare
6. *Tudor Ganea,*	Serii trigonometrice