O PROBLEMĂ DE INTERPOLARE LACUNARĂ CU SOLUȚII ALE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

OLEG ARAMĂ

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU *în ședința din 7 mai 1963*

Fie dată ecuația

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = 0, \tag{1}$$

avînd coeficienții continui într-un interval $[a, b)$ și fie condițiile bilocale

$$y(x_1) = \alpha_0,\ y'(x_1) = \alpha_1, \cdots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2},\ y^{(n-1)}(x_2) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

unde x_1 și x_2 sînt valori din $[a, b)$, iar $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ numere reale oarecare. Spunem că operatorul L_n are proprietatea $\mathcal{J}_n[a, b)$, dacă oricum s-ar alege nodurile x_1 și $x_2 \in [a, b)$ $(x_1 < x_2)$ și oricum s-ar alege numerele reale $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$, ecuația (1) admite o soluție $y(x)$ și una singură pentru alegerea făcută, care să verifice condițiile (2). După cum se constată cu ușurință, proprietatea $\mathcal{J}_n[a, b)$ este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilație, pe care o notăm $\mathcal{N}_n[a, b)$: oricare ar fi nodurile x_1 și $x_2 \in [a, b)$, ecuația diferențială (1) nu admite nici o soluție neidentic nulă $y(x)$, care să verifice condițiile (2) cu $\alpha_i = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. Dacă se notează prin $K(x, \alpha)$ funcția lui Cauchy asociată operatorului L_n, atunci proprietatea $\mathcal{N}_n[a, b)$ este echivalentă cu inegalitatea $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} K(x, \alpha) > 0$ pentru orice (x, α) aparținînd domeniului D: $a \leqslant \alpha < x < b$. Conform unui rezultat obținut de N. A. Kașceev [3], îndeplinirea acestei inegalități în domeniul D constituie condiția necesară și suficientă de aplicabilitate a teoremei inegalităților diferențiale „de ordinul $n-1$" în sensul lui N. V. Azbelev [1].

În lucrarea de față se dau evaluări *precise* ale lungimii intervalului *maximal* de forma $[a, a+h)$, în care operatorul L_n are proprietatea $\mathcal{J}_n$, în funcție de marginile superioare ale valorilor absolute ale coeficienților săi. Rezultatele obținute în această direcție se aplică apoi la studiul existenței și unicității soluțiilor unei probleme de interpolare analogă, referitoare la ecuații diferențiale neliniare. Ținem să menționăm că o problemă de interpolare asemănătoare, cu deosebirea că în locul ultimei condiții din (2) se consideră condiția $y(x_2) = \alpha_{n-1}$, a fost recent studiată de A. Lasota și Z. Opial [4].

TEOREMA 1. *Operatorul L_n are proprietatea $\mathcal{J}_n[a, a+h_0)$, numărul h_0 reprezentînd rădăcina din $(0, b-a)$ a ecuației în necunoscuta h*

$$A_{n,0}\cdot m_n(h)\cdot h^n + A_{n,1}\cdot m_{n-1}(h)\cdot h^{n-1} + \cdots + A_{n,n-1}\cdot m_1(h)\cdot h - 1 = 0, \quad (3)$$

(unde $m_i(h) = \max\limits_{[a,a+h]} |p_i(x)|$ $(i = 1,\cdots,n-1)$, *iar*

$$A_{n,1} = \frac{n-i-1}{(n-i)!} \ (i = 0, 1,\cdots,n-2), \ A_{n,n-1} = 1. \quad (4)$$

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe următoarea lemă, care constituie o precizare, într-un caz particular, a unui rezultat obținut de A. Iu. Levin [5].

LEMA 1. *Dacă funcția $\varphi(x) \in C^n[x_1, x_2]$ verifică condițiile*

$$\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) = \cdots = \varphi^{(n-2)}(x_1) = 0, \ \varphi^{(n-1)}(x_2) = 0,$$

atunci au loc inegalitățile

$$|\varphi^{(i)}(x)| \leqslant A_{n,i}\cdot(x_2 - x_1)^{n-i}\cdot \max_{[x_1, x_2]} |\varphi^{(n)}(x)| \ (i = 0,\cdots,n-1).$$

Constantele $A_{n,i}$ sînt date de (4) *și nu se pot micșora.*

În vederea îmbunătățirii ecuației (3), facem următoarele considerații: fie $\mathcal{L}_n$ mulțimea tuturor operatorilor diferențiali de forma (1), cu coeficienți continui în $[a, b)$, iar $\mathcal{L}_n^*$ submulțimea operatorilor de forma (1), cu coeficienții constanți. Fiind dat $L_n \in \mathcal{L}_n$, vom nota prin $\rho(L_n)$ cea mai mică rădăcină din intervalul $(0, b-a)$ (în cazul cînd există) a ecuației $\eta^{(n-1)}(x) = 0$, unde $\eta(x)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale $L_n[\eta] = 0$, verificînd condițiile $\eta(a) = \eta'(a) = \cdots = \eta^{(n-2)}(a) = 0$, $\eta^{n-1}(a) = 1$ și fie $h(L_n) = \rho(L_n) - a$.

Considerăm următoarea inegalitate de tipul inegalității lui Ch. J. de la Vallée Poussin [6]:

$$a_n\cdot m_n(h; L_n)\cdot h^n + a_{n-1}\cdot m_{n-1}(h; L_n)\cdot h^{n-1} + \cdots + a_1\cdot m_1(h; L_n)\cdot h - 1 \geqslant 0, \quad (5)$$

în care a_i sînt constante nenegative, iar $m_i(h; L_n) = \max\limits_{[a,a+h]} |p_i(x)|$. Ne propunem să determinăm toate sistemele de coeficienți $\{a_1\cdots,a_n\}$ astfel încît inegalitatea (5) să fie verificată pentru $h = h(L_n)$, *oricare* ar fi $L_n \in \mathcal{L}_n$. Teorema 1 ne furnizează un astfel de sistem, anume $\{a_k = A_{n,k}\}$. Acest sistem nu este însă „cel mai bun" și se pune astfel problema determinării sistemelor „optimale" de coeficienți.

TEOREMA 2. *Condiția necesară și suficientă ca inegalitatea* (5) *corespunzătoare unui sistem dat de numere $\{a_1,\ldots,a_n\}$ să fie verificată pentru $h = h(L_n)$, oricare ar fi $L_n \in \mathcal{L}_n$, este ca ea să fie verificată pentru $h = h(L_n^*)$, oricare ar fi $L_n^* \in \mathcal{L}_n^*$.*

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe următoarea lemă, a cărei idee aparține lui N. V. Azbelev și este enunțată fără să i se dea demonstrația și sub o formă puțin diferită, de N.A. Kașceev în lucrarea [3].

LEMA 2. *Fie dați operatorii $L_n^{(1)} = y^{(n)} + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x)\, y^{(n-i)}$, $L_n^{(2)} = y^{(n)} + \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(x)\, y^{(n-i)}$ ai căror coeficienți sînt continui într-un interval $[c, d]$ și satisfac inegalitățile $p_i(x) \geqslant q_i(x)$, $x \in [c, d]$ $(i = 1,\ldots,n)$. În aceste condiții, dacă $L_n^{(1)}$ are proprietatea $\mathcal{H}_n$ $[c, d]$, atunci și $L_n^{(2)}$ are proprietatea $\mathcal{H}_n$ $[c, d]$.*

Un sistem de numere $\{a_1,\ldots,a_n\}$ care satisface condițiile teoremei 2, îl numim *admisibil*, relativ la proprietatea $\mathcal{J}_n$. Un astfel de sistem nu depinde de intervalul $[a, b)$, ci numai de numărul n și de tipul problemei de interpolare considerate. Cunoașterea tuturor sistemelor admisibile prezintă interes, întrucît afirmația teoremei 1 se menține adevărată și dacă în ecuația (3) se înlocuiește sistemul de coeficienți $A_{n,i}$ cu un sistem admisibil oarecare $\{a_i\}$. Mulțimea tuturor sistemelor admisibile relativ la $\mathcal{J}_n$ formează în spațiul variabilelor $a_1,\ldots,a_{1_2}$ un domeniu convex, ale cărui puncte frontieră ne furnizează sistemele admisibile „optimale". Problema determinării tuturor sistemelor admisibile relativ la $\mathcal{J}_n$ revine la aflarea extremelor unei funcții de n variabile complexe.

În continuare, se consideră ecuația diferențială neliniară

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \quad (6)$$

TEOREMA 3. *Presupunem că*: 1° *Funcția $f(x, y_0, y_1,\ldots,y_{n-1})$ este continuă în raport cu $x \in [x_1, x_2]$ și satisface în raport cu variabilele $y_0,\ldots,y_{n-1}$ condiția*

$$|f(x, y_0,\ldots,y_{n-1}) - f(x, \bar{y}_0,\ldots,\bar{y}_{n-1})| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)\,|y_i - \bar{y}_i|, \ x \in [x_1, x_2], \quad (7)$$

unde $P_i(x)$ sînt funcții continue și nenegative în $[x_1, x_2]$, astfel ca $\sum\limits_{i=0}^{n-2} P_i(x) \not\equiv 0$, $x \in [x_1, x_2]$.

2° *Operatorul diferențial $L_n[y] = y^{(n)} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} P_i(x)\, y^{(i)}$ are proprietatea $\mathcal{J}_n[x_1, x_2]$.*

În aceste ipoteze, ecuația (6) *nu poate admite decît cel mult o soluție verificînd condițiile* (2).

TEOREMA 4. *Dacă funcţia* $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *este continuă în raport cu* $x \in [x_1, x_2]$ *şi satisface în domeniul* $-\infty < y_i < +\infty (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *condiţia* (7), *în care* P_i *se presupun constante (nenegative) astfel încît*

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i} \cdot P_i \cdot (x_2 - x_1)^{n-i} < 1 \qquad (8)$$

($A_{n,i}$ *sînt date de formulele* (4)), *atunci problema* (6), (2) *admite o soluţie unică care se poate obţine prin metoda aproximaţiilor succesive. Rapiditatea de convergenţă este cel puţin egală cu aceea a unei serii geometrice de raţie* q.

TEOREMA 5. *Dacă* $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *este continuă în domeniul* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < y_i < +\infty$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ *şi verifică inegalitatea* $|f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})| \leqslant P + P_0 |y_1| + \cdots + P_{n-1} |y_{n-1}|$, *în care* $P, P_0, \ldots, P_{n-1}$ *sînt constante astfel încît să fie verificată inegalitatea* (8), *atunci problema* (6), (2) *admite cel puţin o soluţie.* În vederea demonstrării teoremelor 4 şi 5 s-a utilizat o metodă dată de către G. A. Besmertnîh şi A. Iu. Levin în lucrarea [2].

ОДНА ЗАДАЧА ЛАКУНАРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ С РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В работе дается точная оценка, в зависимости от максимальных абсолютных значений коэффициентов уравнения (1), длины максимального интервала вида $[a, a+h)$, на котором билокальная задача (1), (2) имеет единственное решение при любом выборе узлов x_1 и x_2 на $[a, a+h)$ и при любом выборе действительных чисел $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$. Полученные результаты применяются к исследованию существования и единственности для задачи аналогического интерполирования, касающейся нелинейных дифференциальных уравнений порядка n.

UN PROBLÈME D'INTERPOLATION LACUNAIRE AVEC DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

L'auteur donne une évaluation *précise*, en fonction des maxima des vlaleurs absolues des coefficients de l'équation (1), de la longueur de l'intervalle maximal de la forme $[a, a+h)$, sous laquelle le problème bi-local (1), (2) admet une solution unique, quel que soit le choix des nœuds x_1 et x_2 dans $[a, a+h)$ et quel que soit le choix des nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$. Il applique les résultats obtenus à l'étude de l'existence et de l'unicité d'un problème d'interpolation analogue, relatif à des équations différentielles non linéaires d'ordre n.

BIBLIOGRAFIE

1. АЗБЕЛЕВ Н. В., *О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина*, ДАН СССР, 1953, **89**, *4*, 589—591.
2. БЕССМЕРТНЫХ Г. А., ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*, ДАН СССР, 1962, **144**, *3*, 471—474.
3. КАЩЕЕВ Н. А., *Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения*, ДАН СССР, 1956, **111**, *5*, 937—940.
4. LASOTA, A., OPIAL, Z., *L'application du principe de Pontriaguine à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys., 1963, **XI**, *2*, 41—46.
5. ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемой функции*, ДАН СССР, 1961, **138**, *1*, 37—38.
6. DE LA VALLÉE POUSSIN, CH. J., *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*, Journ. math. pures et appl., 1929, **8** (**9**), 125—144.