ASUPRA MONOTONIEI UNOR OPERATORI DIFERENȚIALI LINIARI

DE

LADISLAU NÉMETI

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU *în ședința din 6 iunie 1963*

Într-un studiu privind planificarea economică optimă s-a ivit următoarea problemă.

Fie $\alpha(x)$ o funcție definită pe intervalul $[0, \infty)$ care să fie pozitivă în $[0, \infty)$ și integrabilă pe orice interval finit $[a, b] \subset [0, \infty)$. Fie operatorul

$$L(y \mid x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha(x)\right) y(x) = -z(x), \tag{1}$$

definit pe clasa K a funcțiilor $y(x)$ care sînt continue, derivabile, pozitive și nedescrescătoare în $[0, \infty)$.

Se caută în ce condiții referitoare la coeficientul $\alpha(x)$ există o funcție $y(x)$ din clasa K astfel ca funcția $z(x)$, obținută din $y(x)$ conform formulelor (1), să fie pozitivă și nedescrescătoare.

În această lucrare se dau condiții în care un operator de forma (1) prezintă astfel de proprietăți de monotonie.

TEOREMA 1. *Fie dat operatorul* $L(y|x) = \left(\dfrac{d}{\mathrm{d}x} - \alpha(x)\right) y(x)$, *al cărui coeficient (sau funcție parametru)* $\alpha(x)$ *este pozitiv în* $[0, \infty)$ *și integrabil pe orice interval finit* $[a, b] \subset [0, \infty)$. *O condiție necesară și suficientă pentru existența unor funcții* $y(x) \in K$ *astfel ca imaginile lor* $z(x)$

prin transformarea (1) *să fie pozitive şi nedescrescătoare este ca funcţia* $\alpha(x)$ *să verifice relaţiile*

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^u \alpha(s)\,ds}\,du < \infty, \tag{2}$$

şi

$$\liminf_{x\to\infty} \alpha(x)\, e^{\int_0^x \alpha(s)\,ds} > 0. \tag{3}$$

Demonstraţia se face integrînd ecuaţia diferenţială (1) în raport cu funcţia necunoscută $y(x)$ şi apoi punînd condiţia $y'(x) \geqslant 0$.

Se obţine că funcţia de variabilă x

$$H(\alpha/x) = \frac{e^{-\int_0^x \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} + \int_0^x e^{-\int_0^u \alpha(s)\,ds}\,du \tag{4}$$

trebuie să fie mărginită. De aici rezultă teorema.

Cele două condiţii (2) şi (3) nu sînt cu totul independente. Într-adevăr, se demonstrează uşor

LEMA 1. *Condiţia* (2) *implică relaţiile*

$$\int_0^\infty \alpha(x)\,dx = \infty \tag{5}$$

şi

$$\limsup_{x\to\infty} \alpha(x)\, e^{\int_0^x \alpha(s)\,ds} = \infty. \tag{6}$$

Pentru a demonstra relaţia (6) se notează $v(x) = e^{\int_0^x \alpha(s)\,ds}$. Atunci condiţia (2) devine

$$\int_0^\infty \frac{dx}{v(x)} < \infty, \tag{a}$$

iar formula (6)

$$\limsup_{x\to\infty} v'(x) = \infty. \tag{b}$$

Dacă se presupune că (b) nu are loc, rezultă că atunci nici (a) nu este verificată.

Într-adevăr, există funcţii $\alpha(x)$ pentru care cele două limite sînt diferite. De exemplu, considerînd funcţia

$$\alpha(x) = \frac{K + x(1+\sin x)}{\frac{x^2}{2} + x(K - \cos x) + 1 + \sin x} \qquad (K > 0)$$

care satisface condiţiile cerute pentru $\alpha(x)$, inclusiv relaţiile (2) şi (3), şi care este crescătoare şi descrescătoare în mod alternat, obţinem

$$\varphi(x) = \alpha(x)\, e^{\int_0^x \alpha(s)\,ds} = K + x(1+\sin x),$$

deci

$$\limsup_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty, \quad \liminf_{x\to\infty} \varphi(x) = K.$$

Dacă însă funcţia $\alpha(x)$ este monotonă, atunci are loc

TEOREMA 2. *Dacă funcţia* $\alpha(x)$ *este monotonă, atunci relaţia* (2) *implică*

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x)\, e^{\int_0^x \alpha(s)\,ds} = \infty. \tag{7}$$

În consecinţă, în cazul cînd funcţia $\alpha(x)$ este monotonă, condiţia (2) singură este suficientă pentru existenţa unor funcţii $y(x)$ cu proprietăţile cerute în teorema 1.

Demonstraţia se face îndată folosind

LEMA 2. *Dacă funcţia* $\alpha(x)$ *pozitivă şi integrabilă este monotonă în intervalul* $[a, b] \subset [0, \infty)$, *atunci funcţia*

$$u(x) = H(\alpha \mid x),$$

obţinută din $\alpha(x)$ *prin aplicarea operatorului* $H(\alpha/x)$ *din* (4), *are în intervalul* $[a, b]$ *sensul invers de monotonie faţă de cel al funcţiei* $\alpha(x)$.

Demonstraţia se face pentru cazul, cînd funcţia $\alpha(x)$ este derivabilă în punctul x, derivînd funcţia $H(\alpha|x)$ din (4), iar în general cu ajutorul diferenţelor finite.

Academia R.P.R., Filiala Cluj
Institutul de calcul

О МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается преобразование вида:

$$L(y \mid x) = \left(\frac{d}{dx} - \alpha(x)\right) y(x) = -z(x),$$

где функции $\alpha(x)$, $y(x)$ и $z(x)$ определены в промежутке $[0, \infty)$. От функции-параметра $\alpha(x)$ требуется, чтобы она была положительна и интегрируема на любом конечном промежутке $[a, b] \subset [0, \infty)$, а от функции

$y(x)$ — чтобы она была непрерывна, дифференцируема, положительна и неубывающая.

Даются достаточные и необходимые условия, касающиеся функции $\alpha(x)$ для существования функций $y(x)$ таких, чтобы функция $z(x)$ была положительная и неубывающая.

SUR LA MONOTONIE DE QUELQUES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

RÉSUMÉ

On considère la transformation de la forme

$$L(y|\,x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha(x)\right) y(x) = -z(x)$$

où les fonctions $\alpha(x)$, $y(x)$ et $z(x)$ sont définies dans l'intervalle $[0, \infty)$. Il est requis que la fonction paramètre $\alpha(x)$ soit positive et intégrable dans tout intervalle fini $[a, b] \subset [0, \infty)$, et que la fonction $y(x)$ soit continue, dérivable, positive et non décroissante.

On indique les conditions suffisantes et nécessaires concernant la fonction $\alpha(x)$ pour l'existence de fonctions $y(x)$ telles que la fonction $z(x)$ soit positive et non décroissante.