UNE ÉVALUATION DU RESTE DANS L'APPROXIMATION DES FONCTIONS PAR DES POLYNÔMES GÉNÉRALISÉS DE S. N. BERNSTEIN

PAR

L. ARAMĂ et O. ARAMĂ

1. Dans le présent travail nous étudions un problème posé au Séminaire d'approximation et de calcul numérique de l'Institut de Calcul de Cluj, conduit par Tiberiu Popoviciu, membre de l'Académie de la R.P.R. Ce problème se rapporte à l'étude de l'approximation des fonctions par des polynômes généralisés de S. N. Bernstein.

Soit $\{\alpha_k\}_0^\infty$ une suite quelconque, telle que

$$0 = \alpha_0, \qquad \alpha_0 < \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

et soient les fonctions

$$q_{n,k}(x) = (-1)^{n-k} \frac{\prod_{\nu=k+1}^{n} \alpha_\nu}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{x^z \, dz}{(z-\alpha_k)\ldots(z-\alpha_n)}, \tag{2}$$

où $\prod_{\nu=n+1}^{n} \alpha_\nu = 1$ et (C) représente le cercle $|z| = 1 + \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu$ du plan complexe. Soit $f(x)$ une fonction réelle, d'une variable réelle, définie dans l'intervalle $[0, 1]$, et $B_n(x; f)$ le polynôme généralisé de S. N. Bernstein relatif à la fonction $f(x)$ et à la suite $\{\alpha_k\}$, c'est-à-dire

$$B_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k}) \, q_{n,k}(x), \tag{3}$$

où

$$x_{n,k} = \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha_1}}, \quad x_{n,n} = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Dans le travail [6], A. O. Gelfond, en généralisant un résultat de J. J. Hirschman et D. V. Widder [7], a démontré que si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$ et si la suite $\{\alpha_k\}$ satisfait aux conditions

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots ; \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty, \qquad (1')$$

alors la suite $\{B_n(x; f)\}_1^\infty$ converge uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Dans le même travail, on obtient des appréciations sur la rapidité de convergence. Les recherches dans cette direction ont été continuées par G. Badalian, qui, dans le travail [3], a démontré qu'on peut considérer au lieu de la suite $\{x_{n,k}\}$ une autre suite quelconque $\{x^*_{n,k}\}$, à la condition qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} (x^*_{n,k} - x_{n,k}) = 0,$$

uniformément relativement à $k = 0, 1, \ldots, n$. Dans un autre travail [4], G. Badalian a démontré la convergence de la suite des dérivées du premier ordre des polynômes (3) vers la dérivée de la fonction $f(x)$, dans l'hypothèse que cette dérivée existe, qu'elle est une fonction continue et dans l'hypothèse supplémentaire que $\alpha_1 = 1$.

En partant de notre résultat antérieur [1], nous avons obtenu dans le présent travail une évaluation précise du reste $R_n(x; f)$:

$$f(x) - B_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x, s) f''(s)\, ds, \qquad (5)$$

dans l'hypothèse que $f(x) \in C^2[0, 1]$ et que la suite des nombres réels quelconques $\{\alpha_k\}_0^\infty$ satisfait aux conditions

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 ; \ \alpha_1 < \alpha_k \qquad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (1'')$$

Dans la formule (5), $K_n(x, s)$ représente une fonction continue dans le domaine $D\{0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq s \leqq 1\}$. Nous avons déterminé cette fonction et nous avons démontré qu'elle est négative dans l'intérieur du domaine D, en s'annulant sur la frontière de ce domaine.

Nous tenons à mentionner que dans le cas des polynômes habituels de S. N. Bernstein, c'est-à-dire si $\alpha_k = k\ (k = 1, 2, \ldots)$, une remarquable délimitation du reste a été donnée par Tiberiu Popoviciu dans le travail [9]. De même, nous tenons à citer les résultats obtenus par E. Voronowskaya [14] à l'occasion de l'étude du comportement asymptotique $(n \to \infty)$ de l'approximation donnée par des polynômes de S. N. Bernstein.

En utilisant la méthode générale d'étude du reste des formules linéaires d'approximation de l'analyse, élaborée par T. Popoviciu [10], [11] et fondée sur l'étude du comportement du reste par rapport aux fonctions convexes d'un ordre égal au degré d'exactitude de la formule respective, nous avons obtenu, dans le travail [2], une évaluation précise du reste $R_n(x; f)$.

D'autres représentations du reste $R_n(x; f)$, toujours dans le cas des polynômes habituels de S. N. Bernstein, ont été obtenues ultérieurement par D. D. Stancu [13] et aussi par L. Aramă [1].

2. Afin d'obtenir une évaluation de la forme (5) du reste $R_n(x; f)$ dans le cas des polynômes (3), nous étudierons au préalable la formule de quadrature

$$\int_0^x f(s)\, ds = \int_0^x B_n(s; f)\, ds + R_n(x; f), \qquad (6)$$

en mettant son reste $R_n(x; f)$ sous la forme intégrale

$$R_n(x; f) = \int_0^1 \Phi_n(x, s) f''(s)\, ds,$$

où la fonction $\Phi_n(x, s)$ est continue, de même que sa dérivée partielle du premier ordre par rapport à x, dans le domaine D.

En dérivant terme à terme la relation (6), nous obtenons une évaluation de la forme (5).

La méthode que nous utilisons pour obtenir le reste $R_n(x; f)$ de la formule de quadrature (6) est due à J. Radon [12] et elle a été développée par D. V. Ionescu dans plusieurs travaux parmi lesquels nous citons spécialement le travail [8], qui a une contingence plus grande avec le présent travail.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque de classe $C^2[0, 1]$, soit $\{\alpha_k\}_0^\infty$ une suite de nombres réels, satisfaisant aux conditions (1'') et soient $x_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ les nœuds (4) qui interviennent dans (3). En supposant le nombre naturel n fixé, nous noterons, pour la simplicité, $x_{n,k} = x_k$ et $q_{n,k}(x) = q_k(x)\ (k = 0, 1, \ldots, n)$. En vertu des conditions (1''), les nœuds $x_k (k = 1, \ldots, n)$ forment une suite croissante. Nous déterminons la fonction $K_n(x, s)$ pour chacun des domaines élémentaires $D_{ij}\{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, \ x_{j-1} \leqq s \leqq x_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Soit x un nombre quelconque fixé de l'intervalle $[0, 1]$. Supposons d'abord que x ne coïncide avec aucun des nœuds x_k, c'est-à-dire que

$$x_{i-1} < x < x_i . \qquad (7)$$

Par intégration terme à terme, on obtient de (3) la formule

$$\int_0^x B_n(s; f)\, ds = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, p_k(x), \qquad (8)$$

où l'on a noté

$$p_k(x) = \int_0^x q_k(s)\, ds, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \qquad (9)$$

D'autre part, en vertu de (7), nous pouvons écrire

$$\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^{x_1} \varphi_1''(s) f(s)\,ds + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2''(s) f(s)\,ds + \cdots +$$
$$+ \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \varphi_{i-1}''(s) f(s)\,ds + \int_{x_{i-1}}^{x} \overline{\varphi}_i''(s) f(s)\,ds + \int_{x}^{x_i} \overline{\overline{\varphi}}_i''(s) f(s)\,ds +$$
$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}''(s) f(s)\,ds + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n''(s) f(s)\,ds, \tag{10}$$

où

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s), \ldots,\ \varphi_{i-1}(s),\ \overline{\varphi}_i(s),\ \overline{\overline{\varphi}}_i(s),\ \varphi_{i+1}(s), \ldots,\ \varphi_n(s)$$

représentent des solutions du système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1''(s) = \varphi_2''(s) = \cdots = \varphi_{i-1}''(s) = 1 \\ &\overline{\varphi}_i''(s) = 1, \quad \overline{\overline{\varphi}}_i''(s) = 0 \\ &\varphi_{i+1}''(s) = \varphi_{i+2}''(s) = \cdots = \varphi_n''(s) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nous procéderons ainsi que dans notre travail antérieur [1]. Appliquons à chaque intégrale qui figure dans le deuxième membre de (10) la formule généralisée d'intégration par parties et formons ensuite la somme de ces intégrales, en groupant les termes semblables en $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f(x_1)$, $f'(x_1), \ldots, f(x_i)$, $f'(x_i)$, $f(x)$, $f'(x)$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_{i+1}), \ldots, f(x_n)$, $f'(x_n)$.

En égalant les coefficients de ces termes respectivement aux coefficients des mêmes termes de (8), on obtient le système suivant de conditions polylocales :

$$\varphi_1'(0) = -p_0(x), \quad \varphi_1(0) = 0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) = p_k(x), \quad \varphi_k(x_k) = \varphi_{k+1}(x_k) \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, i-2) \\ &\varphi_{i-1}'(x_{i-1}) - \overline{\varphi}_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}(x), \quad \varphi_{i-1}(x_{i-1}) = \overline{\varphi}_i(x_{i-1}), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\overline{\varphi}_i'(x) = \overline{\overline{\varphi}}_i'(x), \qquad \overline{\varphi}_i(x) = \overline{\overline{\varphi}}_i(x), \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{\varphi}}_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i) = p_i(x), \quad \overline{\overline{\varphi}}_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_i) \\ &\varphi_l'(x_l) - \varphi_{l+1}'(x_l) = p_l(x), \quad \varphi_l(x_l) = \varphi_{l+1}(x_l) \\ &\qquad (l = i+1,\ i+2, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\varphi_n'(x_n) = p_n(x), \qquad \varphi_n(x_n) = 0. \tag{16}$$

En vertu de ces conditions, compte tenu de (11) et (8), la relation (10) devient

$$\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^x B_n(s; f)\,ds + \int_0^1 \Phi_{n,i}(x; s) f''(s)\,ds, \tag{17}$$

où

$$\Phi_{n,i}(x, s) = \begin{cases} \varphi_k(s) & \text{si} \quad s \in (x_{k-1},\ x_k), \quad (k = 1, \ldots, i-1) \\ \overline{\varphi}_i(s) & \text{si} \quad s \in (x_{i-1},\ x), \\ \overline{\overline{\varphi}}_i(s) & \text{si} \quad s \in (x,\ x_i), \\ \varphi_l(s) & \text{si} \quad s \in (x_{l-1},\ x_l), \quad (l = i+1, \ldots,\ n). \end{cases} \tag{18}$$

Du système d'équations différentielles (11) il résulte que

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(s) &= \frac{s^2}{2} + A_k(x)\, s + B_k(x), \qquad (k = 1, \ldots, i-1) \\ \overline{\varphi}_i(s) &= \frac{s^2}{2} + \overline{A}_i(x)\, s + \overline{B}_i(x), \\ \overline{\overline{\varphi}}_i(s) &= \overline{\overline{A}}_i(x)\, s + \overline{\overline{B}}_i(x), \\ \varphi_l(s) &= A_l(x)\, s + B_l(x), \qquad (l = i+1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

où les coefficients $A_j(x)$, $B_j(x)$, $(j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ et les coefficients $\overline{A}_i(x)$, $\overline{B}_i(x)$, $\overline{\overline{A}}_i(x)$, $\overline{\overline{B}}_i(x)$ se déterminent à l'aide des conditions (12) — (16). Nous disposons ainsi de $2n+2$ fonctions arbitraires de la variable x, pour satisfaire aux conditions (12) — (16) qui sont en nombre de $2n+4$. Mais il faut observer que les fonctions $p_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, vérifient des relations dans lesquelles la variable x ne figure pas explicitement. De telles relations peuvent s'obtenir facilement en observant par exemple qu'on a les identités (voir [6]) :

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x) \equiv 1; \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k^{\alpha_1} q_k(x) \equiv x^{\alpha_1}, \tag{20}$$

d'où, par intégration, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) \equiv x; \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k^{\alpha_1} p_k(x) = \frac{1}{\alpha_1 + 1}\, x^{\alpha_1+1}, \text{ etc.} \tag{21}$$

Des relations (12) on a

$$A_1(x) = -p_0(x), \qquad B_1(x) = 0. \tag{22}$$

Ensuite, on obtient de (13) les formules de récurrence

$$\left.\begin{aligned} &A_{k+1}(x) = A_k(x) - p_k(x), \\ &B_{k+1}(x) = B_k(x) + x_k[A_k(x) - A_{k+1}(x)] = B_k(x) + x_k p_k(x), \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots,\ i-2 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A}_i(x) = A_{i-1}(x) - p_{i-1}(x), \\ &\overline{B}_i(x) = B_{i-1}(x) + x_{i-1}[A_{i-1}(x) - \overline{A}_i(x)] = B_{i-1}(x) + x_{i-1}\, p_{i-1}(x). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

En utilisant ensuite les relations (16) et (15), dans lesquelles nous prenons successivement $l = n-1,\ n-2, \ldots,\ i+1$, nous obtenons les relations de récurrence

$$A_n(x) = p_n(x);\quad B_n(x) = -x_n A_n(x) = -p_n(x), \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} A_l(x) &= A_{l+1}(x) + p_l(x),\\ B_l(x) &= B_{l+1}(x) + x_l[A_{l+1}(x) - A_l(x)] = B_{l+1}(x) - x_l p_l(x),\\ &\qquad (l = n-1,\ n-2, \ldots,\ i+1)\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{A}}_i(x) &= A_{i+1}(x) + p_i(x),\\ \overline{\overline{B}}_i(x) &= B_{i+1}(x) + x_i[A_{i+1}(x) - \overline{\overline{A}}_i(x)] = B_{i+1}(x) - x_i p_i(x).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Des relations de récurrence (22) — (24) nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} A_k(x) &= -[p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_{k-1}(x)]\\ B_k(x) &= x_0 p_0(x) + x_1 p_1(x) + \cdots + (k-1)\,p_{k-1}(x),\\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots,\ i-1)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_i(x) &= -[p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_{i-1}(x)],\\ \overline{B}_i(x) &= x_0 p_0(x) + x_1 p_1(x) + \cdots + x_{i-1} p_{i-1}(x).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ensuite, de (25)—(27) nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} A_l(x) &= p_n(x) + p_{n-1}(x) + \cdots + p_l(x),\\ B_l(x) &= -[x_n p_n(x) + x_{n+1} p_{n-1}(x) + \cdots + x_l p_l(x)],\\ &\qquad (l = n,\ n-1,\ \ldots,\ i+1)\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{A}}_i(x) &= p_n(x) + p_{n-1}(x) + \cdots + p_i(x),\\ \overline{\overline{B}}_i(x) &= -[x_n p_n(x) + x_{n-1} p_{n-1}(x) + \cdots + x_i p_i(x).\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

À l'aide de ces expressions, les fonctions de (20) sont déterminées pour chaque $s \in [0, 1]$ et $x \in (x_{i-1}, x_i)$, et elles satisfont aux conditions polylocales (12), (13), (15) et (16). Il reste à démontrer que les fonctions $\overline{\varphi}_i(s)$ et $\overline{\overline{\varphi}}_i(s)$ ainsi déterminées, vérifient aussi les relations (14).

En effet, tenant compte de (19), les conditions (14) s'écrivent :

$$x + \overline{A}_i(x) = \overline{\overline{A}}_i(x),$$

$$\frac{x^2}{2} + x\overline{A}_i(x) + \overline{B}_i(x) = x\overline{\overline{A}}_i(x) + \overline{\overline{B}}_i(x),$$

et, compte tenu de (29), (31), (21), on observe que la première de ces relations est identiquement vérifiée, tandis que la deuxième est identiquement vérifiée seulement si l'on a $\alpha_1 = 1$. Nous supposerons dans notre exposé qu'on a toujours $\alpha_1 = 1$.

3. Supposons maintenant que x varie dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i). Ainsi qu'on le constate de (19), (28)—(31) et aussi des conditions (13)—(15), la fonction $\Phi_{n,i}(x, s)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables (x, s) dans le domaine $\{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ 0 \leqq s \leqq 1\}$. En outre, on constate facilement que cette fonction admet une dérivée partielle du premier ordre par rapport à x dans l'intervalle $x_{i-1} < x < x_i$ et que cette dérivée représente une fonction continue par rapport à s dans l'intervalle $0 \leqq s \leqq 1$ si on a $\alpha_1 = 1$.

En effet, on vérifie par calcul les égalités

$$\begin{aligned} &\lim_{s \to x_k} \frac{\partial \varphi_k(s)}{\partial x} = \lim_{s \to x_k} \frac{\partial \varphi_{k+1}(s)}{\partial x}, \qquad (k = 1, \ldots,\ i-2)\\ &\lim_{s \to x_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}(s)}{\partial x} = \lim_{s \to x_{i-1}} \frac{\partial \overline{\varphi}_i(s)}{\partial x},\\ &\lim_{s \to x_i} \frac{\partial \overline{\varphi}_i(s)}{\partial x} = \lim_{s \to x_i} \frac{\partial \varphi_{i+1}(s)}{\partial x},\\ &\lim_{s \to x_l} \frac{\partial \varphi_l(s)}{\partial x} = \lim_{s \to x_l} \frac{\partial \varphi_{l+1}(s)}{\partial x}, \qquad (l = i+1, \ldots,\ n-1). \end{aligned} \tag{32}$$

De même, en tenant compte de (20) et de l'hypothèse $\alpha_1 = 1$, on vérifie aussi l'égalité

$$\lim_{s \to x} \frac{\partial \overline{\varphi}_i(s)}{\partial x} = \lim_{s \to x} \frac{\partial \overline{\overline{\varphi}}_i(s)}{\partial x}. \tag{33}$$

Nous noterons $K_{n,i}(x, s) = \dfrac{\partial \Phi_{n,i}}{\partial x}$. Compte tenu de (19), (28)—(31) on a

$$K_{n,i}(x,s) = \begin{cases} -[q_0(x) + \cdots + q_{k-1}(x)]\,s + [x_0 q_0(x) + \cdots + x_{k-1} q_{k-1}(x)]\\ \qquad \text{si} \quad s \in [x_{k-1},\ x_k], \quad (k = 1, 2, \ldots,\ i-1),\\ -[q_0(x) + \cdots + q_{i-1}(x)]\,s + [x_0 q_0(x) + \cdots + x_{i-1} q_{i-1}(x)]\\ \qquad \text{si} \quad s \in [x_{i-1},\ x],\\ +[q_n(x) + \cdots + q_i(x)]\,s - [x_n q_n(x) + \cdots + x_i q_i(x)]\\ \qquad \text{si} \quad s \in [x,\ x_i],\\ +[q_n(x) + \cdots + q_l(x)]\,s - [x_n q_n(x) + \cdots + x_l q_l(x)]\\ \qquad \text{si} \quad s \in [x_{l-1},\ x_l], \quad (l = i+1, \ldots,\ n). \end{cases} \tag{34}$$

4. Nous étudierons le signe de la fonction $K_{n,i}(x, s)$ lorsque $x \in (x_{i-1}, x_i)$ et $s \in [0, 1]$. Nous supposons que x est fixé dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i), et s est variable dans l'intervalle $[0, 1]$. Compte tenu qu'on a $q_j(x) \geqq 0$ pour $x \in (0, 1)$ quel que soit $j = 0, 1, \ldots, n$ (la démonstration

de cette affirmation est donnée dans le travail [6]), on obtient de (34) les inégalités :

$$\frac{\partial K_{n,i}(x,s)}{\partial s} < 0 \quad \text{si} \quad s \in (x_0,\ x_1),\ldots,(x_{i-1},\ x), \qquad (35)$$

$$\frac{\partial K_{n,i}(x,s)}{\partial s} > 0 \quad \text{si} \quad s \in (x,\ x_i),\ldots,(x_{n-1},\ x_n).$$

De même, de (34) on constate :

$$\lim_{s\to x_k+0} K_{n,i}(x,s) = (x_0-x_k)\,q_0(x)+(x_1-x_k)\,q_1(x)+\ldots+(x_{k-1}-x_k)\,q_k(x), \quad (k=0,1,\ldots,i-1), \qquad (36)$$

$$\lim_{s\to x_l-0} K_{n,i}(x,s) = (x_l-x_n)\,q_n(x)+(x_l-x_{n-1})\,q_{n-1}(x)+\ldots+(x_l-x_{l+1}(x), \quad (l=i,\ i+1,\ldots,\ n). \qquad (37)$$

Compte tenu des inégalités $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ qui se réalisent en vertu de l'hypothèse (1'') relative à la suite $\{x_k\}$, il résulte de (36) et (37) :

$$\begin{aligned} &K_{n,i}(x,\ x_0+0) = 0, \\ &K_{n,i}(x,\ x_k+0) < 0, \qquad (k=1,\ldots,\ i-1), \\ &K_{n,i}(x,\ x_l-0) < 0, \qquad (l=i,\ i+1,\ldots,\ n-1), \\ &K_{n,i}(x,\ x_n-0) = 0. \end{aligned} \qquad (38)$$

À l'aide de (38) et (35) et aussi de la propriété de continuité de la fonction $K_{n,i}(x,\ s)$ par rapport à la variable s dans l'intervalle $0 \leqq s \leqq 1$ (voir les relations (32) et (33)), on constate que la fonction $K_{n,i}(x,\ s)$ décroît à partir de zéro jusqu'à un minimum lorsque la variable s croît à partir de zéro jusqu'à la valeur $s = x$. On constate également que la fonction $K_{n,i}(x,\ s)$ croît jusqu'à zéro lorsque s croît à partir de $s = x$ jusqu'à la valeur $s = x_n = 1$. D'ici il résulte la négativité de la fonction $K_{n,i}(x,\ s)$ dans l'intervalle $0 < s < 1$.

On a supposé, dans ce qui précède, que x est un nombre arbitraire de l'intervalle $(x_{i-1},\ x_i)$. Sous cette hypothèse on a considéré la fonction $K_{n,i}(x,\ s)$ définie à l'aide des relations (34). Nous supposons maintenant que x varie dans l'ensemble formé par la réunion des intervalles $(x_0,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ldots,\ (x_{n-1},\ x_n)$. Relativement à ces intervalles on construit respectivement les fonctions $K_{n,1}(x,\ s),\ K_{n,2}(x,\ s),\ldots,\ K_{n,n}(x,\ s)$ définies en conformité avec la formule (34). Quel que soit $s \in [0,\ 1]$,

deux fonctions consécutives $K_{n,i}(x,\ s)$ et $K_{n,i+1}(x,\ s)$ ont une même limite lorsque $x \to x_i$. En effet, on obtient de (34)

$$\lim_{x\to x_i-0} K_{n,i}(x,\ s) = \begin{cases} -[q_0(x_i)+\cdots+q_{k-1}(x_i)]\,s+[x_0q_0(x_i)+\cdots+x_{k-1}q_{k-1}(x_i)] \\ \qquad \text{si} \quad s\in(x_{k-1},\ x_k),\ (k=1,2,\ldots,i-1), \\ -[q_0(x_i)+\cdots+q_{i-1}(x_i)]\,s+[x_0q_0(x_i)+\cdots+x_{i-1}q_{i-1}(x_i)] \quad \text{si} \quad s\in(x_{i-1},\ x_i), \\ +[q_n(x_i)+\cdots+q_l(x_i)]\,s-[x_nq_n(x_i)+\cdots+x_lq_l(x_i)] \\ \qquad \text{si} \quad s\in(x_{l-1},\ x_l), \quad (l=i+1,\ldots,\ n). \end{cases} \qquad (39)$$

De même, en écrivant les relations analogues à (34) pour la fonction $K_{n,i+1}(x,\ s)$, nous obtenons

$$\lim_{x\to x_i+0} K_{n,i+1}(x,s) = \begin{cases} -[q_0(x_i)+\cdots+q_{k-1}(x_i)]\,s+[x_0q_0(x_i)+\cdots+x_{k-1}q_{k-1}(x_i)] \\ \qquad \text{si} \quad s\in(x_{k-1},\ x_k), \quad (k=1,2,\ldots,i), \\ +[q_n(x_i)+\cdots+q_{i+1}(x_i)]\,s-[x_nq_n(x_i)+\cdots+x_{i+1}q_{i+1}(x_i)] \\ \qquad \text{si} \quad s\in(x_{l-1},\ x_l), \quad (l=i+2,\ldots,n), \\ +[q_n(x_i)+\cdots+q_l(x_i)]\,s-[x_nq_n(x_i)+\cdots+x_lq_l(x_i)] \\ \qquad \text{si} \quad s\in(x_{l-1},\ x_l), \quad (l=i+2,\ldots,\ n). \end{cases} \qquad (40)$$

De (39) et (40) on déduit qu'on a l'égalité

$$\lim_{x\to x_i-0} K_{n,i}(x,\ s) = \lim_{x\to x_i+0} K_{n,i+1}(x,\ s), \qquad (41)$$

quelle que soit la valeur de la variable s appartenant à l'un des intervalles $(x_0,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ldots,\ (x_{n-1},\ x_n)$. Un calcul simple nous montre que les fonctions $\psi(s) = \lim_{x\to x_i-0} K_{n,i}(x,\ s)$ et $X(s) = \lim_{x\to x_i+0} K_{n,i+1}(x,\ s)$ sont continues par rapport à s aussi dans les points $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-1}$.

Considérons maintenant la fonction

$$K_n(x,\ s) = \begin{cases} K_{n,1}(x,\ s) \quad \text{si} \quad x\in[x_0,\ x_1], \\ K_{n,2}(x,\ s) \quad \text{si} \quad x\in[x_1,\ x_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{n,n}(x,\ s) \quad \text{si} \quad x\in[x_{n-1},\ x_n], \end{cases} \qquad (42)$$

où $K_{n,i}(x,\ s)$ est définie conformément aux formules (34) et (39). De l'égalité (41) et en tenant compte que ces égalités sont valables quel que soit $i = 1,\ \ldots,\ n-1$, il résulte que dans l'hypothèse adoptée $\alpha_1 = 1$, la fonction $K_n(x,\ s)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables $(x,\ s)$ dans le domaine $D\{0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq s \leqq 1\}$. Mais, ainsi qu'on l'a

démontré antérieurement, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction $K_{n,i}(x, s)$ est négative dans le sous-domaine $\{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i ; 0 < s < 1\}$. Il en résulte que la fonction $K_n(x, s)$ définie par (42) est négative à l'intérieur du domaine D. Des égalités (38) on déduit, de même, que cette fonction prend la valeur zéro dans les points des segments

$$\{0 \leqq x \leqq 1, \quad s = x_0 = 0\} \quad \text{et} \quad \{0 \leqq x \leqq 1, \ s = x_n = 1\},$$

situés sur la frontière du domaine D. On peut aussi démontrer à l'aide des relations (39) et (40) que la fonction $K_n(x, s)$ prend la valeur zéro sur toute la frontière du domaine D.

Revenant à la formule (17) et tenant compte que la fonction $\Phi_{n,i}(x, s)$ admet la dérivée partielle $\dfrac{\partial \Phi_{n,i}(x, s)}{\partial x} = K_{n,i}(x, s)$ continue par rapport à l'ensemble des variables (x, s) dans le domaine $\{x_{i-1} \leqq x \leqq x_1 ; 0 \leqq s \leqq 1\}$, il en résulte qu'on peut dériver terme à terme l'identité (17) par rapport à x. Nous obtenons ainsi l'identité

$$f(x) = B_n(x; f) + \int_0^1 K_{n,i}(x, s) f''(s)\, ds, \tag{43}$$

valable pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Cette relation reste valable quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$. Il en résulte, compte tenu de la définition (42) de la fonction $K_n(x, s)$, la formule

$$f(x) = B_n(x; f) + R_n(x; f), \quad x \in [0, 1], \tag{44}$$

où

$$R_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x; s) f''(s)\, ds. \tag{45}$$

Nous pouvons obtenir une délimitation du reste $R_n(x; f)$ en tenant compte que la fonction $K_n(x, s)$ est négative dans l'intérieur du domaine D et en appliquant la formule de la moyenne du calcul intégral. Nous obtenons ainsi

$$R_n(x; f) = f''(\xi) \int_0^1 K_n(x, s)\, ds, \qquad \xi \in (0, 1). \tag{46}$$

Pour calculer l'intégrale qui figure dans cette égalité, nous remplaçons dans l'identité (44), (45) $f(x)$ par $\dfrac{x^2}{2}$. On obtient

$$\int_0^1 K_n(x, s)\, ds = \frac{1}{2}\left[x^2 - B_n(x, x^2)\right]$$

et, de (46), l'évaluation

$$R_n(x; f) = \frac{1}{2}\left[x^2 - B_n(x; x^2)\right] \cdot f''(\xi), \qquad 0 < \xi < 1. \tag{47}$$

Observations. 1° On peut démontrer facilement l'existence et la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial^\mu K_n(x, s)}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, quel que soit $x \in [0, 1]$ et quelle que soit la valeur de la variable s du même intervalle, sauf la valeur $s = x$ pour laquelle la dérivée partielle $\dfrac{\partial K_n(x, s)}{\partial x}$ présente un saut par rapport à la variable s. Cette affirmation résulte immédiatement en dérivant par rapport à x les relations (34) et en écrivant ensuite des relations analogues à (39) et (40).

2° Des formules (44), (45) et tenant compte de la propriété de négativité dans l'intérieur du domaine D, il résulte que si la fonction $f(x)$ est non concave dans l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire si $f''(x) \geqq 0$ pour chaque $x \in [0, 1]$, alors on a l'inégalité

$$B_n(x; f) \geqq f(x), \qquad x \in [0, 1], \ n = 1, 2, \ldots$$

3° En particulier, si $\alpha_k = k$, alors les fonctions (3) représentent les polynômes habituels de S. N. Bernstein et l'on obtient aisément

$$x^2 - B_n(x; x^2) = -\frac{x(1 - x)}{n}.$$

On obtient alors de (47) l'évaluation

$$R_n(x; f) = -\frac{x(1 - x)}{2n} f''(\xi), \qquad 0 < \xi < 1,$$

ce qui est en concordance avec notre résultat antérieur [2].

4° Dans le cas où la suite $\{\alpha_k\}_0^\infty$ est quelconque, satisfaisant aux conditions (1'), des délimitations du coefficient de $f''(\xi)$ qui figure dans la formule (47) sont données dans le travail [6].

Manuscrit reçu à la rédaction le 7 novembre 1963

BIBLIOGRAPHIE

1. ARAMĂ L., *O evaluare a restului în aproximarea funcțiilor prin polinoamele lui S. N. Bernstein.* Analele Universității București, 1962. (1964 apărută).
2. ARAMĂ O., *Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor.* Studii și cercetări de matematică, Acad. R.P.R., Cluj, 1957, **8**, 195—210 ; idem en russe dans Mathematica, Cluj, 1960, **2 (25)**, 25—40.
3. БАДАЛЯН Г. В., *Обобщение Хаусдорфского метода суммирования рядов.* Известия Акад. Наук Армянской ССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, **12**, *6*.
4. — *О производной квази-полинома С. Н. Бернштейна.* Известия Акад. Наук Армянской ССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, **14**, *6*, 5—16.
5. БЕРНШТЕЙН С. Н., *Экстремальные свойства полиномов.* Серия „*Математика в монографиях*", Москва, 1937, p. 64—71.
6. ГЕЛЬФОНД А. О., *Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна.* Акад. Наук СССР, Сер. мат., 1950, **14**, 413—420.

7. HIRSCHMAN J. J., WIDDER D. V., *Generalized Bernstein Polynomials.* Duke Mathem. Journ., 1949, **16**, *3*, 433—437.
8. IONESCU D. V., *Formule de cuadratură cu noduri exterioare.* Studii şi cercetări de matematică, Acad. R.P.R., Cluj, 1958, **9**, 45—134.
9. POPOVICIU T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, Cluj, 1935, **10**, 49—54.
10. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, Cluj, 1959, **1** (**24**), 95—142.
11. — *Différences divisées et dérivées.* Mathematica, Cluj, 1959, **1** (**24**), 297—319.
12. RADON J., *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadratur-Formeln durch bestimmte Integralen.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 1935, **42**, 389.
13. STANCU D. D., *Evaluation on the remainder term in approximation formulas by Bernstein polynomials.* Mathematics of Computation, July, 1963.
14. VORONOWSKAYA E., *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par des polynômes de M. Bernstein.* C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., 1932, 79—85.