ASUPRA TRATĂRII MATEMATICE A UNOR PROBLEME DE PLANIFICAREA DEZVOLTĂRII MACROECONOMICE SOCIALISTE

DE

LADISLAU NÉMETI

1. RELAȚIILE DE BAZĂ

În lucrarea de față încercăm să formulăm într-un limbaj matematic unele probleme în legătură cu alegerea cea mai avantajoasă a cotei de acumulare în economia unui stat socialist, luată în întregime, în vederea atingerii unui nivel de trai cît mai înalt, legea de bază a economiei socialiste. O problemă înrudită a fost tratată într-o lucrare anterioară [1].

Se cunoaște împărțirea avutului național și a produsului social total [2]. Avutul național al unui stat constă din :

A) Fondurile de producție.

B) Celelalte fonduri (de circulație, de rezervă, cele neproductive).

C) Avutul personal al populației.

Suma primelor două grupe o vom numi *avuție publică* și mărimea ei, considerată funcție de timp, o vom nota cu $Y(x)$.

Din munca productivă — prin folosirea fondurilor de producție — rezultă (anual) produsul social total. Acesta se împarte în :

a) Fondul pentru înlocuirea mijloacelor de producție consumate ;

b) Venitul național.

Acesta din urmă se împarte în :

b_1) fondul de acumulare ;

b_2) fondul de consum.

Toate aceste fonduri le considerăm de asemenea funcții de timp și dintre ele notăm :

— venitul național cu $v(x)$

— fondul de acumulare cu $a(x)$

— fondul de consum cu $y(x)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 8, P. 1281–1293, BUCUREȘTI, 1964

Prima relație cantitativă va fi atunci

$$v(x) = y(x) + a(x). \tag{1.1}$$

La aceste noțiuni facem următoarea observație :

Fondurile considerate se calculează în practică nu în fiecare moment, ci în anumite perioade (de exemplu anual). Atunci mărimile acestea le putem considera ca funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. În locul acestor funcții folosim funcții interpolatoare, potrivit alese, ale unei variabile continue. Aceste funcții din urmă pot fi definite fie pe un interval finit $[x_0, x_s]$ al variabilei independente x (= timpul), fie pe un interval infinit $[x_0,\infty)$. În alegerea tuturor acestor funcții dispunem de o libertate mare. Condiții suplimentare vor fi introduse ulterior, atunci cînd se ivește necesitatea lor.

Avuția publică crește prin folosirea fondului de acumulare, deci este valabilă relația

$$Y'(x) = a(x) \tag{1.2}$$

Mai introducem coeficientul de eficacitate a folosirii fondurilor de producție, definit prin relația

$$\alpha(x) = \frac{v(x)}{Y(x)}\,. \tag{1.3}$$

Înlocuind relațiile (1.2) și (1.3) în formula (1.1) obținem *ecuația de bază a dezvoltării economice* :

$$\alpha(x)Y(x) - Y'(x) = y(x). \tag{1.4}$$

Dacă coeficientul $\alpha(x)$ se consideră ca dat — de exemplu dat în mod statistic an cu an — atunci ecuația (1.4) leagă între ele avutul public $Y(x)$ și fondul de consum $y(x)$. Planificarea dezvoltării economice în perspectivă se poate face, pe baza ecuației (1.4), în două feluri. Fie că se alege $Y(x)$ în mod arbitrar, respectînd anumite condiții ce se exprimă prin niște inegalități și care vor fi formulate de îndată, atunci funcția $y(x)$ este determinată prin ecuația (1.4) ; fie că pornind de la o situație dată la momentul de timp x_0 și cunoscînd pe $Y(x_0)$, se alege funcția $y(x)$ în mod arbitrar, respectînd de asemenea anumite condiții exprimate prin inegalități și atunci prin integrarea ecuației (1.4) este determinată funcția $Y(x)$.

Vom avea deci :

$$Y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,\mathrm{d}s}\left[Y(x_0) - \int_{x_0}^{x} y(u)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u \right]. \tag{1.5}$$

Funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ legate prin relația (1.4) respectiv (1.5) le vom numi funcții adjuncte.

În cele ce urmează se va lucra numai cu aceste trei funcții, $\alpha(x)$, $y(x)$, $Y(x)$. În vederea ușurării tratării matematice se vor impune următoarele condiții pentru ele :

1) Toate trei funcțiile sînt definite pe intervalul $[x_0, \infty)$.

2) Toate trei funcțiile sînt pozitive.

3) Funcția $\alpha(x)$ este continuă și derivabilă pe întregul interval de definiție.

4) Funcția $Y(x)$ este continuă pe întregul interval de definiție și derivabilă pe segmente.

5) Funcția $y(x)$ este continuă și derivabilă pe segmente ; în punctele de discontinuitate, se admit numai salturi.

Trecem acum la formularea condițiilor suplimentare, menționate mai sus, care trebuie verificate de către funcțiile $Y(x)$ respectiv $y(x)$.

În primul rînd se solicită ca funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ să fie nedescrescătoare, adică în intervalele în care ele sînt derivabile are loc :

$$\begin{aligned} Y'(x) &\geqslant 0, \\ y'(x) &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Acestea sînt inegalitățile fundamentale care vor fi presupuse în tot timpul lucrării ; în afară de ele se mai pot prescrie o serie de condiții care exprimă anumite deziderate economice. Menționăm că nu ne vom folosi de ele în lucrarea de față, însă pentru continuarea cercetărilor inițiate în acest articol, ele pot fi utile.

Astfel, de exemplu, pentru creșterea relativă a fondului de consum se poate prescrie o margine inferioară pozitivă dată :

$$y'(x) \geqslant \lambda(x)y(x) \text{ cu } \lambda(x) > 0, \text{ funcție dată.} \tag{1.7}$$

Această creștere relativă poate fi mărginită și superior în vederea evitării unei variații prea bruște :

$$y'(x) \leqslant \Lambda(x)y(x) \text{ cu } \lambda(x) < \Lambda(x) < \infty. \tag{1.8}$$

Această condiție implică și continuitatea funcției $y(x)$.

O altă condiție apare dacă se impune ca „salariul real mediu" să fie o funcție nedescrescătoare în timp. Se ajunge la relația

$$\frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{[\mu(x)Y(x)]'}{\mu(x)Y(x)} \geqslant 0, \tag{1.9}$$

unde $\mu(x)$ este o funcție pozitivă dată.

Și această relație mai poate fi întărită prescriindu-se o margine inferioară pozitivă pentru creșterea relativă a salariului și se obține

$$\frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{[\mu(x)Y(x)]'}{\mu(x)Y(x)} \geqslant \nu(x), \ \nu(x) > 0, \text{ funcție dată.} \tag{1.10}$$

O ultimă îngrădire în alegerea funcțiilor $Y(x)$ respectiv $y(x)$ se obține prin faptul că la un moment dat, fiind dat numărul cetățenilor apți pentru muncă, la un anumit nivel dat al tehnicii, cantitatea utilajelor ce pot fi deservite de către lucrători este o mărime finită. De aici se deduce condiția

$$Y(x) \leqslant S(x), \ S(x) \text{ o funcție finită dată.} \tag{1.11}$$

Repetăm că în lucrarea de față se va cere numai îndeplinirea condițiilor (1.6); vom numi *funcții admisibile*, funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ legate prin ecuația (1.4) care verifică și relațiile (1. 6), respectiv care sînt nedescrescătoare.

Este evident că condițiile de admisibilitate pot fi formulate și pentru $Y(x)$ respectiv $y(x)$ singure. Astfel funcția $Y(x)$ este admisibilă atunci și numai atunci cînd ea verifică inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} &Y'(x) \geqslant 0, \\ &Y''(x) - \alpha(x)\, Y'(x) - \alpha'(x)\; Y(x) \leqslant 0. \end{aligned}\right| \tag{1.12}$$

Este adevărat că formula a doua se aplică numai acolo unde $Y(x)$ este de două ori derivabilă.

Formulei corespunzătoare pentru $y(x)$ îi lipsește acest dezavantaj. Folosind relația (1.5) obținem condițiile necesare și suficiente pentru ca $y(x)$ să fie admisibilă:

$$\left.\begin{aligned} &y'(x) \geqslant 0 \\ &L(y,\, x_0 \,|x) = \frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds} + \int_{x_0}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du \leqslant Y(x_0). \end{aligned}\right| \tag{1.13}$$

Observăm că a doua relație (1.13) poate fi scrisă și într-o formă ușor modificată. Notînd

$$L_y = \sup_{x \geqslant x_0} L(y,\; x_0 \mid x),$$

a doua relație (1.13) o putem scrie

$$L_y \leqslant Y(x_0). \tag{1.13'}$$

Formula (1.13') relevă interesul problemei de a stabili valoarea variabilei independente x pentru care $L(y,\; x_0 \mid x)$ își atinge maximul. Derivînd formula pentru L, obținem

$$\frac{dL\;(y_1\; x_0\; |x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{\alpha(x)}\right) e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}. \tag{1.14}$$

Rezultă că $L(y,\; x_0 \mid x)$ are același sens de monotonie ca și funcția $\frac{y(x)}{\alpha(x)}$ și își atinge maximul la o valoare a lui x, unde $\frac{\alpha(x)}{y(x)}$ este minimă.

Pentru un interval de definiție finit, există întotdeauna un număr infinit de funcții admisibile. Pentru intervalul $[x_0, \infty)$ însă existența funcțiilor admisibile este asigurată numai atunci cînd $\alpha(x)$ satisface anumite relații, și anume are loc:

TEOREMA 1. *O condiție necesară și suficientă pentru existența funcțiilor admisibile este ca funcția $\alpha(x)$ să satisfacă următoarele relații:*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du < \infty \\ &\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} < N. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Demonstrație. Condițiile (1.15) sînt necesare. Într-adevăr, întrucît $y(x)$ este o funcție nedescrescătoare, avem

$$L(y,\, x_0 \,|x) \geqslant y(x_0)\, L(1,\, x_0 \mid x) = y(x_0) \left(\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)ds}}{\alpha(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du \right).$$

Deci dacă cel puțin una din relațiile (1.15) nu este satisfăcută, atunci $L(1,\; x_0 | x)$ nu este mărginit superior și prin urmare nici $L(y,\; x_0 \,|x)$; deci condiția (1.13) nu este verificată.

Condițiile (1.15) sînt și suficiente. Dacă ele sînt verificate, atunci există $\sup\limits_{x \geqslant x_0} L(1,\; x_0 \mid x) = L_1$ finit și alegînd pentru funcția fondului de consum

$$y(x) = \text{const.} = \frac{Y(x_0)}{L_1},$$

rezultă că relațiile (1.13) sînt verificate, deci această funcție aleasă $y(x)$ este admisibilă.

Din relațiile (1.15) pot fi extrase ușor cîteva consecințe. Are loc

LEMA 1. *Din prima relație (1.15) rezultă*

$$\int_{x_0}^{\infty} \alpha(s)\, ds = \infty \tag{1.16}$$

și

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0.$$

Demonstrație. Prima formulă este evidentă. Pentru a demonstra pe cea de-a doua, notăm

$$v(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}.$$

Avem $v(x) > 0$, $v'(x) > 0$ și din relația (1.15), $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{v(x)} < \infty$; formula (1.16) devine $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}}\, v'(x) = \infty$.

Să presupunem acum că $v'(x) < M$; atunci urmează $v(x) < Mx + m$, deci $\frac{1}{v(x)} > \frac{1}{Mx + m}$ și $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{v(x)} = \infty$, în contradicție cu relația (1.15).

În posesia acestui rezultat, a doua formulă (1.15) mai poate fi scrisă și sub o altă formă, și anume :

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} < \infty. \tag{1.15'}$$

Acest număr poate fi într-adevăr diferit de zero, de exemplu funcția

$$\alpha(x) = \frac{K + (1 + \sin x)}{\frac{x^2}{2} + x(K - \cos x) + 1 + \sin x}, \quad K > 0$$

care satisface condițiile impuse pentru funcția $\alpha(x)$, inclusiv condițiile (1.15) și care este crescătoare și descrescătoare în mod alternat, dă :

$$\frac{e^{-\int_0^x \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = \frac{1}{K + x(1 + \sin x)},$$

deci

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0, \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = \frac{1}{K}.$$

Dacă însă funcția $\alpha(x)$ este monotonă, atunci are loc :

LEMA 2. *Dacă funcția pozitivă $\alpha(x)$ este monotonă, atunci relația*

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\,ds}\,du < \infty$$

implică

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0. \tag{1.17}$$

Demonstrație. Evident, $\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)}$ poate fi diferit de zero numai atunci cînd avem $\underline{\lim_{x\to\infty}} \alpha(x) = 0$. Din această cauză lema este nebanală numai în cazul cînd funcția monotonă $\alpha(x)$ este necrescătoare și are loc condiția :

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

Punînd în relația (1.14) : $y(x) \equiv 1$, rezultă că pentru $\alpha(x)$ necrescătoare, $L(1, x_0 \mid x)$ este nedescrescătoare, ea are deci o limită finită

pentru $x \to \infty$, sau $\lim_{x\to\infty} L(1, x_0 \mid x) = \infty$. Întrucît al doilea termen din expresia pentru $L(1, x_0 \mid x)$ are o limită finită, primul termen are și el o limită finită sau avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = \infty.$$

Deoarece însă în virtutea lemei 1 limita inferioară este zero, rezultă justețea conținutului lemei 2.

2. VALOAREA UNEI DEZVOLTĂRI ECONOMICE

Pentru a putea compara două dezvoltări economice caracterizate de exemplu prin funcțiile respective ale fondului de consum $y(x)$ și $y_1(x)$, introducem noțiunea de valoare a dezvoltării pe intervalul $[x_0, x]$, definită prin

$$V(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} y(u)\, q(u)\, du, \tag{2.1}$$

unde

$$q(x) = e^{-\int_{x_0}^{x}\beta(s)\,ds} \tag{2.2}$$

este o funcție de ponderă cu funcția de „dobîndă" $\beta(x)$ pentru care se mai prescrie

$$0 \leqslant \beta(x) \leqslant \alpha(x), \quad (\beta(x) \not\equiv \alpha(x)). \tag{2.3}$$

Valoarea $V(x)$ este deci, din punctul de vedere economic, valoarea actualizată în momentul de timp x_0 al fondurilor de consum obținute în intervalul $[x_0, x]$. Justificarea relației (2.3) rezultă din formula (1.3) dacă o scriem sub forma

$$v(x) = \alpha(x)\, Y(x)$$

în care venitul național apare ca venitul net, obținut prin „folosirea" avuției publice cu dobînda α ; atunci dobînda β de actualizare nu poate fi mai mare decît factorul α.

Condiția (2.3) mai poate fi caracterizată și altfel. Ea este echivalentă cu dezideratul ca $\beta(x)$ să aibă următoarea însușire :

Fie $Y(x)$ (și cu $y(x)$ adjunctă) și $Y_1(x)$ (cu $y_1(x)$ adjunctă) două dezvoltări economice date. Fie $x_1 > x_0$ și $Y(x_0) = Y_1(x_0)$, $Y(x_1) = Y_1(x_1)$ și $Y(x) \geqslant Y_1(x)$ pentru $x \in [x_0, x_1]$, $(Y(x) \not\equiv Y_1(x))$.

Se cere ca $\beta(x)$ să fie astfel definită încît pentru două funcții admisibile oarecare $Y(x)$ și $Y_1(x)$ ce satisfac relațiile de mai sus, însă de altfel sînt arbitrare, să avem, punînd

$$V = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\, q(x)\, dx \text{ și } V_1 = \int_{x_0}^{x_1} y_1(x)\, q(x)\, dx,$$
$$V > V_1. \tag{2.4}$$

Într-adevăr, întrucît

$$y(x) = \alpha(x)\, Y(x) - Y'(x),$$

se poate scrie

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)\, Y(x)\, q(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} Y'(x)\, q(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} [\alpha(x)\, q(x) + q'(x)] Y(x)\, dx - Y(x_1)\, q(x_1) + Y(x_0)\, q(x_0)$$

și o formulă analogă pentru V_1. Formînd diferența lor obținem:

$$V - V_1 = \int_{x_0}^{x_1} e^{-\int_{x_0}^{x} \beta(s)ds} [\alpha(x) - \beta(x)]\, [Y(x) - Y_1(x)]\, dx.$$

Dintre cei trei factori ai funcției de sub integrală, primul este pozitiv, al treilea nenegativ și *arbitrar*, deci pentru ca integrala să fie pozitivă, trebuie să fie

$$\alpha(x) - \beta(x) \geqslant 0.$$

3. AMELIORAREA UNEI DEZVOLTĂRI PLANIFICATE

Cu ajutorul noțiunii de valoare a dezvoltării, introdusă în punctul precedent, sîntem în măsură de a compara două funcții admisibile. Vom numi funcția admisibilă $\overline{y}(x)$ o ameliorare a funcției admisibile $y(x)$ — cu punctul de plecare x_0 — dacă există un număr $\overline{x} \geqslant x_0$ astfel încît pentru orice $x \geqslant \overline{x}$,

$$\overline{V}(x, x_0) \geqslant V(x, x_0) \tag{3.1}$$

cu

$$\overline{V}(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \overline{y}(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)ds}\, du \quad \text{și} \quad V(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)ds}\, du.$$

Relația (3.1) se mai scrie

$$\int_{x_0}^{x} [\overline{y}(u) - y(u)]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)ds}\, du \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Cu ajutorul expresiei (3.2) funcțiile admisibile formează o mulțime dintr-un spațiu semiordonat.

Se pune întrebarea, dacă pentru orice funcție admisibilă $y(x)$ există o ameliorare $\overline{y}(x)$, sau, din contră, dacă există funcții admisibile ce nu pot fi ameliorate. Dacă astfel de funcții există, ele ar reprezenta dezvoltări economice optime.

Vom demonstra un rezultat parțial:

TEOREMA 2. *Dacă coeficientul de eficacitate $\alpha(x)$ este o funcție monotonă pentru orice $x > x_1 \geqslant x_0$ (x_1 fiind un număr dat), atunci orice funcție admisibilă $y(x)$ poate fi ameliorată.*

Demonstrația o vom duce prin indicarea construcției efective a ameliorării, separat pentru cazul cînd funcția $\alpha(x)$ este nedescrescătoare pentru $x \geqslant x_1$ și separat cînd ea este necrescătoare.

I. Dacă $\alpha(x)$ este nedescrescătoare, atunci funcția ameliorată $\overline{y}(x)$ se va construi în felul următor: se alege un număr $\xi \geqslant x_1$ și un număr $y_0 > 0$, satisfăcînd condițiile $y_0 < y(\xi)$ și $y_0 \leqslant y(x_0)$. Se va pune

$$\begin{cases} \text{pentru } x_0 \leqslant x < \xi: & \overline{y}(x) = y_0 \\ \text{pentru } x \geqslant \xi: & \overline{y}(x) = y(x) + \lambda\, \alpha(x), \ (\lambda > 0). \end{cases} \tag{3.3}$$

Funcția $\overline{y}(x)$ prezintă deci la $x = \xi$ un salt.

Vom arăta că λ poate fi ales astfel încît funcția $\overline{y}(x)$ să fie și ea admisibilă și concomitent să se verifice și condiția (3.2).

Funcțiile $y(x)$ și $\overline{y}(x)$ fiind nedescrescătoare, ele vor fi admisibile, dacă satisfac condiția (1.13); adică se cere

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{\xi}^{x} \alpha(s)ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u} \alpha(s)ds}\, du \leqslant Y(\xi),$$

sau

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du \leqslant Y(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)ds} \tag{3.4}$$

și

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du + \lambda \left[e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)ds} + \int_{\xi}^{x} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du \right] \leqslant \overline{Y}(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)ds}.$$

Relația aceasta se transcrie în

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du + \lambda e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha ds} \leqslant \overline{Y}(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha ds}. \tag{3.5}$$

O condiție suficientă pentru satisfacerea condiției (3.5) este

$$\lambda \leqslant \overline{Y}(\xi) - Y(\xi), \tag{3.6}$$

căci din relațiile (3.4) și (3.6) rezultă (3.5).

Pe de altă parte, avem

$$Y(\xi) = e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)ds} \left[Y(x_0) - \int_{x_0}^{\xi} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du \right]$$

și

$$\overline{Y}(\xi) = e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)ds} \left[Y(x_0) - y_0 \int_{x_0}^{\xi} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)ds}\, du \right].$$

Relația (3.6) se transformă deci în

$$\lambda \leqslant e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha ds} \int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du. \tag{3.7}$$

Trecem acum la compararea valorilor dezvoltărilor. Avem

$$V = \int_{x_0}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du$$

$$\overline{V} = y_0 \int_{x_0}^{\xi} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du + \lambda \int_{\xi}^{x} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du$$

$$\Delta(x) = \overline{V} - V = \lambda \int_{\xi}^{x} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du - \int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du, \quad (x > \xi).$$

Condiția necesară și suficientă pentru existența unui număr $\overline{x}$, astfel ca pentru orice $x > \overline{x}$ să fie $\Delta(x) \geqslant 0$, este

$$\lambda \int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du > \int_{x_0}^{\xi} [y(x) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du. \tag{3.8}$$

Condițiile (3.7) și (3.8) le îmbinăm într-una singură :

$$\frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du} < \lambda \leqslant e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds} \int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du.$$

Vom putea alege λ în mod convenabil, dacă

$$e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds} \int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du}. \tag{3.9}$$

Dacă există un număr ξ care verifică relația (3.9), atunci factorul λ poate fi ales astfel încît $\overline{V}(x) > V(x)$ pentru orice $x > \overline{x}$, unde $\overline{x}$ este un număr finit (și mai mare ca ξ), $\overline{y}(x)$ rămînînd o funcție admisibilă, deci teorema va fi demonstrată.

Membrul întîi al relației (3.9) se transformă. Avînd în vedere prima relație (1.16), este valabilă formula

$$e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds} = \int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du.$$

Cu acest rezultat, relația (3.9) devine

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du}. \tag{3.10}$$

Înmulțim întreaga relație cu factorul $\dfrac{e^{\int_{x_0}^{\xi} \beta(s) ds}}{e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds}}$ și obținem

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u} \beta(s) ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u} \alpha(s) ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - (y_0)]\, e^{\int_{u}^{\xi} \beta(s) ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{\int_{u}^{\xi} \alpha(s) ds}\, du}. \tag{3.10a}$$

Inegalitatea aceasta este însă adevărată pentru orice $\xi \in (x_0, \infty)$; într-adevăr, dacă se ține cont de relația

$$\beta(x) \leqslant \alpha(x) \quad (\beta(x) \not\equiv \alpha(x)),$$

atunci se vede imediat că membrul întîi este mai mare decît 1, iar membrul doi este mai mic decît 1.

II. Dacă $\alpha(x)$ este necrescătoare, demonstrația decurge în mod analog. Funcția de ameliorare se construiește în felul următor :

$$\begin{cases} \text{pentru } 0 \leqslant x < \xi : & \overline{y}(x) = y_0 \\ \text{pentru } x \geqslant \xi : & \overline{y}(x) = y(x) + \lambda, \quad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{3.11}$$

Și aici este valabilă relația (3.4), iar în locul lui (3.5) obținem

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s) ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du + \lambda \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s) ds}}{\alpha(x)} + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du \right] \leqslant \overline{Y}(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds}. \tag{3.12}$$

O condiție suficientă pentru îndeplinirea acestei relații este :

$$\lambda \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s) ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du \right] \leqslant [\overline{Y}(\xi) - Y(\xi)]\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s) ds} \tag{3.13}$$

fiindcă din condițiile (3.4) și (3.13) rezultă (3.12). Analog cu cazul I obținem

$$\lambda \leqslant \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}{\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}$$

care trebuie să fie verificată pentru orice $x \geqslant \xi$.

Pentru aceasta trebuie ca λ să fie ales în modul următor:

$$\lambda \leqslant \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}{\sup_{x \geqslant \xi} \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du \right]}. \tag{3.14}$$

Din formula (1.14) rezultă că în cazul de față funcția de la numitor este nedescrescătoare, în plus lema 2 enunță că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0.$$

În consecință obținem

$$\sup_{x \geqslant \xi} \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du \right] = \int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du.$$

Condiția (3.14) se transformă deci în

$$\lambda \leqslant \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}. \tag{3.15}$$

Comparînd valorile $V(x)$ și $\bar{V}(x)$, obținem condiția pentru ca $\bar{y}(x)$ să fie o ameliorare a lui $y(x)$ cu totul analog cu partea întîi a demonstrației:

$$\lambda > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\,ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\,ds}\, du}. \tag{3.16}$$

Contopirea condițiilor (3.15) și (3.16) ne dă

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\,ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\,ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\, du}, \tag{3.17}$$

relație cu totul analogă cu inegalitatea (3.10) și care se demonstrează exact în același fel ca și aceasta. Astfel teorema este demonstrată.

Concluzii. La punctul precedent s-a demonstrat că, dacă funcția coeficientului de eficacitate a folosirii fondurilor $\alpha(x)$ este monotonă, nu există planificări de perspectivă optime, adică la orice dezvoltare economică se poate găsi o ameliorare a ei, în sensul definiției de la punctele 2 și 3. Nu s-a reușit să se clarifice care este situația în cazul unei funcții $\alpha(x)$ care își schimbă mereu sensul de monotonie, funcție ce putem să o numim funcție oscilatoare. Se poate însă bănui că afirmația teoremei 2 este adevărată și în cazul acesta. Problema aceasta mai trebuie cercetată și pentru cazul cînd pentru definiția admisibilității se folosesc și una sau mai multe din condițiile suplimentare (1.7)... (1.11). S-ar părea că circumstanța enunțată în teorema 2 rămîne valabilă și în aceste condiții.

Dacă conjectura aceasta se va adeveri, atunci s-ar ajunge la concluzia că la orice dezvoltare economică se poate găsi una ameliorată. Acest lucru se referă la funcții $y(x)$ și $Y(x)$ care satisfac ecuația (1.4) și condițiile (1.6)... (1.11), iar sensul ameliorării este acela definit prin inegalitatea (3.2), deci s-ar ajunge la o teoremă matematică.

În ce măsură pot fi aplicate aceste adevăruri matematice la realitatea economică foarte complexă? Acest lucru depinde de măsura în care abstracțiunile și simplificările inerente tratării matematice constituie în lucrarea de față o aproximare justă și folosibilă a realității, aproximare care să redea esența realității fără a o deforma.

Dacă presupunem că premisele matematice ale acestei lucrări sînt juste și din punctul de vedere economic — în sensul expus în aliniatul precedent — atunci adevărurile matematice enunțate aici constituie afirmații aplicabile la realitatea economică.

Primită la redacție la 29 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. NÉMETI, *Metodele analizei matematice în planificarea socialistă.* Studii și cercetări de matematică (Cluj) VIII, *3—4*, 369—390 (1957).
2. *Manual de economie politică*, București, 1954, ed. II. Editura politică.