RADÓ, F.
Math. Zeitschr. 89, 395—410 (1965)

Einbettung eines Halbgewebes in ein reguläres Gewebe und eines Halbgruppoids in eine Gruppe

Von
F. RADÓ*

1. Einleitung

In dieser Arbeit haben wir mit abstrakten 3-Geweben zu tun, die wir als Gewebe schlechthin bezeichnen, und mit einer Verallgemeinerung derselben, den Halbgeweben. Die Gewebe können in eineindeutige Beziehung zu den Isotopieklassen der Quasigruppen gebracht werden [2, 7]. Ein Gewebe heißt regulär, falls die entsprechende Klasse eine Gruppe enthält. Wenn $(Q, \circ)$ eine dem Gewebe G entsprechende Quasigruppe ist, so ist für die Regularität von G die Reidemeistersche Schließungsbedingung

$$(R)\quad \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, y_4 \in Q,\ x_1 \circ y_1 = x_3 \circ y_3,\ x_2 \circ y_1 = x_4 \circ y_3,\ x_1 \circ y_2 = x_3 \circ y_4) \\ \qquad \Rightarrow x_2 \circ y_2 = x_4 \circ y_4 \end{cases}$$

notwendig und hinreichend [1, 6].

Wir werden uns mit der Frage beschäftigen, wann ein Halbgewebe in ein reguläres Gewebe eingebettet werden kann. Wir werden dafür notwendige und hinreichende Schließungsbedingungen finden.

Die erwähnte Beziehung zwischen den Geweben und den Isotopieklassen der Quasigruppen kann zu einer — ebenfalls eineindeutigen — Beziehung zwischen den Halbgeweben und Isotopieklassen der kürzbaren Halbgruppoide erweitert werden. Auf dieser Grundlage kann man aus den gefundenen Ergebnissen notwendige und hinreichende Bedingungen für die isotope Einbettbarkeit eines Halbgruppoids in eine Gruppe ableiten, d.h. für die Existenz einer Isotopie des Halbgruppoids in die bezügliche Gruppe. Wir erhalten so eine Verallgemeinerung des Malcevschen Theorems über isomorphe Einbettbarkeit einer Halbgruppe in eine Gruppe [5]. Durch Spezialisierung werden wir das Resultat von Malcev wiedergewinnen.

Das Theorem von Malcev sagt aus, daß eine unendliche Anzahl von Bedingungen für die Einbettbarkeit einer kürzbaren Halbgruppe in eine Gruppe notwendig und hinreichend ist. Diese Bedingungen haben die Form gewisser Ketten von Gleichheiten, die eine neue Gleichheit nach sich ziehen. Die einfachste, die Bedingung Z von Malcev, stimmt mit der Bedingung (R) überein. Die anderen sind auch aus solchen Gleichheiten wie (R), aber nach ziemlich verwickelten Regeln, aufgebaut und erreichen willkürliche Längen. TAMARI beschrieb in [8] ein zirkuläres Modell und LAMBEK in [4] ein Polyedermodell,

* Universität Babeş-Bolyai, Math. Fak., Cluj (Rumänien).
Recheninstitut der Akademie der Rumänischen VR., Cluj.

mit welchen die Konstruktion der Malcevschen Ketten einfacher und anschaulicher wird. Unsere Betrachtungen führen zu einem neuen Modell, das man ebensogut als ein ebenes wie ein räumliches auffassen kann.

In der Arbeit [8], in welcher TAMARI den Satz von Malcev verallgemeinert, werden kürzbare, assoziative und rechteckige Halbgruppoide betrachtet (also etwas speziellere als unsere, die aber mit Vorordnung versehen werden können). Insofern die (isomorphe) Einbettung dieser Halbgruppoide in Gruppen unmöglich ist, hat TAMARI die (isomorphe) Einbettung in partielle Gruppen untersucht. Dagegen haben wir die *isotope* Einbettung immer in *Gruppen* studiert. Unsere Erweiterung verwertet den isotopieinvarianten Charakter der Malcevschen Bedingungen.

Die Tatsache, daß sich das Einbettungsproblem der Halbgruppen in Gruppen in ein gewebetheoretisches Einbettungsproblem einordnen läßt, gibt — wenigstens unter einem bestimmten Gesichtspunkt — eine Antwort auf eine von L. FUCHS gestellte Frage: Was ist der tiefere Grund dafür, daß die Bedingung Z von Malcev mit der Bedingung von REIDEMEISTER übereinstimmt?

In dem letzten Teil unserer Arbeit wird als eine Anwendung des isotopen Einbettbarkeitssatzes erhalten, daß jede partielle Gruppe, also auch jedes Brandtsche Gruppoid, eine isotope Einbettung in eine Gruppe zuläßt. Dafür muß man nur einsehen, daß die Malcevschen Bedingungen in einer partiellen Gruppe befriedigt sind; das werden wir ohne Benutzung des Resultats von TAMARI zeigen.

2. Halbgewebe und Quasigruppoide

Wir legen die Terminologie fest und führen einige Begriffe ein.

Eine Operation bezüglich der Mengen A, B, C ist eine Abbildung φ einer Untermenge P von $A \times B$ in C. Wenn $(a, b)\ \varphi = c$, dann schreibt man $a \circ b = c$; die Menge P heißt das Definitionsfeld der Operation. Wenn

$$(a \circ b = a \circ c \vee b \circ a = c \circ a) \Rightarrow b = c,$$

dann ist die Operation kürzbar. Falls $A = B = C$, hat man eine innere Operation auf A.

Eine Menge G, die mit einer inneren Operation versehen ist, heißt ein *Halbgruppoid*; wenn das Definitionsfeld $= G \times G$ ist, wird G ein *Gruppoid* genannt [2]. Ein Gruppoid Q ist eine *Quasigruppe*, wenn die Gleichungen $a \circ x = b$, $x \circ a = b$ je eine einzige Lösung in Q haben $(a, b \in Q)$ [2]. Das Halbgruppoid G heißt eine *partielle Gruppe*, falls folgendes gilt [3]: 1) die Operation ist kürzbar; 2) sie ist assoziativ, d. h. wenn $a \circ b$ und $b \circ c$ existieren, dann auch $(a \circ b) \circ c$ und $a \circ (b \circ c)$; wenn $a \circ b$ und $(a \circ b) \circ c$, dann $b \circ c$; wenn $b \circ c$ und $a \circ (b \circ c)$, dann $a \circ b$; in allen diesen Fällen ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$; 3) für $a \in G$ gibt es je ein einziges Element e' und e mit $e' \circ a = a$, $a \circ e = a$; diese heißen linksseitige bzw. rechtsseitige Einheit von a; 4) es gibt für $a \in G$ ein Element $\bar{a} \in G$ so, daß $a \circ \bar{a}$ die linksseitige Einheit von a ist. Die partielle Gruppe G heißt ein *Brandtsches Gruppoid* (welches kein Gruppoid, sondern nur ein

Halbgruppoid ist), wenn noch das folgende Postulat gilt: 5) für $e, e' \in G$, $e \circ e = e$, $e' \circ e' = e'$ gibt es $a \in G$ mit der Eigenschaft $e' \circ a = a \circ e = a$.

Man sieht leicht, daß in jeder partiellen Gruppe folgendes gilt: Wenn $a \circ \bar{a}$ linksseitige Einheit von a ist, so ist $\bar{a} \circ a$ rechtsseitige Einheit von a; das Produkt $a \circ b$ existiert dann und nur dann, wenn die rechtsseitige Einheit von a mit der linksseitigen von b übereinstimmt.

Wir werden unter einem *Quasigruppoid* $\mathfrak{Q}$ ein System von drei Mengen A_1, A_2, A_3 und einer kürzbaren Operation verstehen.

Es seien die Quasigruppoide $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ auf den Mengen A_1, A_2, A_3 bzw. A_1', A_2', A_3' erklärt, und $\circ, *$ bezeichne ihre Operationen; $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ heißen *isotop*, wenn es eineindeutige Abbildungen f_i von A_i auf A_i' so gibt $(i = 1, 2, 3)$, daß sich die zwei Definitionsfelder dabei entsprechen (d.h. $x \circ y$ und $(x f_1) * (y f_2)$ haben beide oder keines einen Sinn) und

$$(x f_1) * (y f_2) = (x \circ y) f_3$$

für irgendwelche zusammensetzbare $x \in A_1, y \in A_2$. Das Abbildungssystem (f_1, f_2, f_3) heißt eine *Isotopie von* $\mathfrak{Q}$ *auf* $\mathfrak{Q}'$.

Die Isotopierelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Wenn f_i eineindeutig A_i in A_i' abbildet und die obige Gleichheit für zusammensetzbare $x \in A_1, y \in A_2$ gilt, dann heißt (f_1, f_2, f_3) eine *Isotopie* (oder *Monotopie*) *von* $\mathfrak{Q}$ *in* $\mathfrak{Q}'$. In diesem Falle sagen wir, daß $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}'$ *isotopisch einbettbar* ist.

Sind $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ Halbgruppoide und $f_1 = f_2 = f_3$, dann haben wir eine *isomorphe Einbettung* oder kürzer eine *Einbettung*.

Ein *Halbgewebe* ist eine nichtleere Menge H, auf welcher drei Äquivalenzrelationen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ so erklärt sind, daß $\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}_j$ für $i \neq j$ die Gleichheitsrelation $\mathfrak{E}$ in H ist; d.h. also

$$i \neq j, \quad p, q \in H, \quad p \mathfrak{R}_i q, \quad p \mathfrak{R}_j q \Rightarrow p = q.$$

Die Elemente von H heißen *Punkte* und die Äquivalenzklassen $D_i(p) = \{\xi \mid \xi \mathfrak{R}_i p\}$ die *Geraden der Art* i $(i = 1, 2, 3)$. Die drei Geradensysteme werden mit $\Delta_i = \{D_i\}$ bezeichnet $(i = 1, 2, 3)$ und das Halbgewebe selbst mit $(H; \mathfrak{R}_i)$ oder H.

Die Halbgewebe $(H; \mathfrak{R}_i)$ und $(H'; \mathfrak{R}_i')$ heißen *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Abbildung f von H auf H' gibt, für welche

$$p \mathfrak{R}_i q \Leftrightarrow (p f) \mathfrak{R}_i' (q f), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es seien x, y Geraden von verschiedener Art, z.B. $x \in \Delta_1, y \in \Delta_2$. Der Durchschnitt $x \cap y$ enthält entweder ein einziges Element p oder aber ist er leer. Wir setzen im ersten Falle $x \circ y = z$, wo $z = D_3(p)$; im zweiten Falle wird $x \circ y$ nicht erklärt. Diese Operation ist kürzbar; in der Tat, sei $x \circ y_1 = x \circ y_2 = z$ und $x \cap y_1 = p_1$, $x \cap y_2 = p_2$; es folgt $p_1 \in z$, $p_2 \in z$, aber $p_1 \in x$, $p_2 \in x$, also $p_1 = p_2$ und dann $y_1 = y_2$. Wir haben also auf den drei Geradensystemen ein Quasigruppoid $\mathfrak{Q}_{(H; \mathfrak{R}_i)}$ definiert. Alle mit $\mathfrak{Q}_{(H; \mathfrak{R}_i)}$ isotopen Quasigruppoide sollen

als die *zu dem Halbgewebe* $(H; \mathscr{R}_i)$ *gehörigen Quasigruppoide* bezeichnet werden. Sie gehören augenscheinlich auch zu den mit $(H; \mathscr{R}_i)$ isomorphen Halbgeweben.

Für irgendein vorgegebenes Quasigruppoid $\mathfrak{Q}$ kann man ein solches Halbgewebe finden, daß $\mathfrak{Q}$ dazu gehören soll. Wir erklären dafür auf dem Definitionsfeld P von $\mathfrak{Q}$ die folgenden Äquivalenzrelationen (die Operation von $\mathfrak{Q}$ ist mit $\bullet$ bezeichnet):

$$(x,y)\,\mathscr{R}_1\,(x',y') \Leftrightarrow x=x',$$
$$(x,y)\,\mathscr{R}_2\,(x',y') \Leftrightarrow y=y',$$
$$(x,y)\,\mathscr{R}_3\,(x',y') \Leftrightarrow x\bullet y=x'\bullet y'.$$

$\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2=\mathscr{E}$ ist evident, und $\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_3=\mathscr{R}_2\cap\mathscr{R}_3=\mathscr{E}$ folgt aus der Kürzbarkeit von $\bullet$; $(P; \mathscr{R}_i)$ ist also ein Halbgewebe, dessen Geraden die folgenden Untermengen von P sind: $\{(x,y)\,|\,x=x_0\}$, $\{(x,y)\,|\,y=y_0\}$, $\{(x,y)\,|\,x\bullet y=z_0\}$. Die Operation $\circ$ des Quasigruppoids $\mathfrak{Q}_{(P;\mathscr{R}_i)}$ wird durch die Relation

$$\{(x,y)\,|\,x=x_0\}\circ\{(x,y)\,|\,y=y_0\}=\{(x,y)\,|\,x\bullet y=x_0\bullet y_0\}$$

bestimmt. Die eineindeutigen Abbildungen

$$f_1\colon \{(x,y)\,|\,x=x_0\}\to x_0;\quad f_2\colon \{(x,y)\,|\,y=y_0\}\to y_0;\quad f_3\colon \{(x,y)\,|\,x\bullet y=z_0\}\to z_0$$

stellen eine Isotopie zwischen $\mathfrak{Q}_{(P;\mathscr{R}_i)}$ und $\mathfrak{Q}$ dar, also gehört $\mathfrak{Q}$ zu $(P; \mathscr{R}_i)$. Wir wollen das Halbgewebe $(P; \mathscr{R}_i)$ auch mit $(H^{\mathfrak{Q}}; \mathscr{R}_i^{\mathfrak{Q}})$ bezeichnen.

Wenn $\mathfrak{Q}_{(H;\mathscr{R}_i)}$ und $\mathfrak{Q}_{(H';\mathscr{R}'_i)}$ isotop sind, dann sind die Halbgewebe $(H; \mathscr{R}_i)$ und $(H'; \mathscr{R}'_i)$ isomorph, weil die drei Zuordnungen der Isotopie eine eineindeutige Abbildung zwischen den Geraden von $(H; \mathscr{R}_i)$ und $(H'; \mathscr{R}'_i)$ mit Erhaltung der Inzidenzen erzeugen.

Zusammenfassend können wir sagen: *es existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Isomorphieklassen der Halbgewebe und den Isotopieklassen der Quasigruppoide.*

Ein Halbgewebe $(H; \mathscr{R}_i)$ wird zu einem *Gewebe*, wenn zwei Geraden verschiedener Art immer einen gemeinsamen Punkt besitzen, wenn man also zu $p, q\in H$ und $i\neq j$ ein Element $r\in H$ finden kann, für welches $p\,\mathscr{R}_i\,r$ und $q\,\mathscr{R}_j\,r$. Es sei E die euklidische Ebene; wir bezeichnen mit $(E; \rho_i)$ das Gewebe, welches die Parallelen zu zwei rechtwinkligen Koordinatenachsen und zu der ersten Winkelhalbierenden derselben als Geraden besitzt.

Es sei $(H; \mathscr{R}_i)$ ein Halbgewebe, $H'\subset H$ und $\mathscr{R}'_i$ die Verengung der Beziehung $\mathscr{R}_i$ auf H' $(i=1, 2, 3)$, d.h. $p\,\mathscr{R}'_i\,q \Leftrightarrow p\,\mathscr{R}_i\,q$ für $p, q\in H'$; das Halbgewebe $(H'; \mathscr{R}'_i)$ heißt ein *Teilhalbgewebe* von $(H; \mathscr{R}_i)$.

3. Die $\overline{M}$-, M- und M'-Konfigurationen

Es seien p_k, $k=1, 2, \ldots, 8$, Punkte des Halbgewebes $(H; \mathscr{R}_i)$. Sie bilden eine (geschlossene) *$\overline{R}$-Konfiguration*, wenn

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1\,\mathscr{R}_1\,p_2, & p_3\,\mathscr{R}_1\,p_4, & p_5\,\mathscr{R}_1\,p_6, & p_7\,\mathscr{R}_1\,p_8,\\ p_1\,\mathscr{R}_2\,p_3, & p_2\,\mathscr{R}_2\,p_4, & p_5\,\mathscr{R}_2\,p_7, & p_6\,\mathscr{R}_2\,p_8,\\ p_1\,\mathscr{R}_3\,p_5, & p_2\,\mathscr{R}_3\,p_6, & p_3\,\mathscr{R}_3\,p_7, & p_4\,\mathscr{R}_3\,p_8. \end{cases}$$

Eine $\bar{R}$-Konfiguration in $(E; \rho_i)$ heißt ein *$\bar{R}$-Modell* (Fig. 1); die acht Punkte des Modells sollen die *Ecken*, und die Strecken der Gewebegeraden, welche die Ecken gemäß (1) verbinden, die *Kanten* des Modells heißen. (Dieses Modell kann auch als ein räumliches Gebilde aufgefaßt werden.)

Die Punkte $p_1, \ldots, p_8$ bilden eine (offene) *R-Konfiguration*, wenn 11 aus den 12 Beziehungen (1) befriedigt sind. In $(E; \rho_i)$ ist jede R-Konfiguration eine $\bar{R}$-Konfiguration.

Ein *Gewebe* ist *regulär*, wenn jede R-Konfiguration eine $\bar{R}$-Konfiguration ist.

Wir werden jetzt allgemeinere Konfigurationen definieren. Wir fangen mit der Definition der $\bar{M}$-Modelle an:

a) Ein $\bar{R}$-Modell ist ein $\bar{M}$-Modell.

b) Von zwei $\bar{M}$-Modellen U und V, die eine beliebige Anzahl von Ecken, jedoch nicht alle gemeinsam haben, bilden wir mittels *Aneinanderfügens* einen

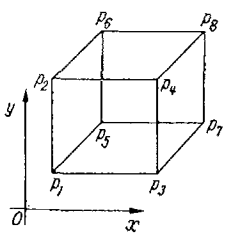


Fig. 1

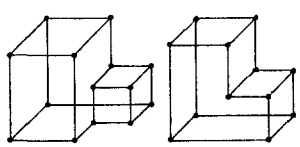


Fig. 2

Graph W auf folgende Weise: aus der Vereinigungsmenge der Ecken von U und V entfernen wir die gemeinsamen Ecken; je zwei Kanten, die eine gemeinsame Ecke haben, werden durch eine einzige Kante ersetzt; zwei Kanten mit denselben Ecken fallen ganz weg (Fig. 2). Wenn der Graph W zusammenhängend ist, so ist er ein neues $\bar{M}$-Modell. Zerfällt dagegen W in mehrere zusammenhängende Komponenten, so ist jede Komponente für sich ein $\bar{M}$-Modell.

Wir wollen jetzt zu den $2n$ Ecken eines $\bar{M}$-Modells je einen unbestimmten Punkt aus dem Halbgewebe $(H; \mathscr{R}_i)$ (d.h. eine Variable für Punkte aus dem Halbgewebe) zuordnen; ebenso zu den zur y-Achse parallelen Kanten je eine $\mathscr{R}_1$-Relation zwischen den Punkten, die den Ecken dieser Kanten entsprechen; zu den zur x-Achse parallelen Kanten je eine entsprechende $\mathscr{R}_2$-Relation, und zu den Parallelen zur ersten Winkelhalbierenden je eine $\mathscr{R}_3$-Relation. Diese $3n$ Beziehungen bilden ein *$\bar{M}$-Relationensystem*; z.B. die Formeln (1) bilden ein solches. Wenn wir von demselben irgendeine Relation entfernen, so entsteht ein *M-Relationensystem*. Ein endliches System von Punkten aus H bildet eine $\bar{M}$- bzw. *M-Konfiguration*, wenn diese Punkte (einige können auch zusammenfallen) ein $\bar{M}$- bzw. M-Relationensystem befriedigen.

Jede $\bar{M}$-Konfiguration ist eine M-Konfiguration. In den regulären Geweben gilt auch, wie man leicht erkennt, daß die M-Konfigurationen $\bar{M}$-Konfigurationen sind, was man auch so aussprechen kann: die M-Konfigurationen

schließen sich. In den Halbgeweben gilt keine entsprechende Eigenschaft: aus der Hypothese, daß alle R-Konfigurationen sich schließen, *folgt noch nicht*, daß sich auch alle M-Konfigurationen schließen.

Es soll $\mathscr{S}$ ein M-Relationensystem bezeichnen und es sei $p\,\mathscr{R}_k\,q$ jene Beziehung, die $\mathscr{S}$ zu einem $\overline{M}$-Relationensystem ergänzt. Wenn man aus $\mathscr{S}$ die Relationen $p\,\mathscr{R}_i\,p_1$, $p\,\mathscr{R}_j\,p_2$, $q\,\mathscr{R}_i\,q_1$, $q\,\mathscr{R}_j\,q_2$ herausnimmt (i, j, k ist eine Permutation von 1, 2, 3), so entsteht ein *M'-Relationensystem* $\mathscr{S}'$. Wir betrachten jetzt ein die Relationen von $\mathscr{S}'$ befriedigendes Punktsystem aus H, und bezeichnen mit $p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0$ die Punkte, die an die Stelle von p_1, p_2, q_1, q_2 treten; dieses Punktsystem (in welchem auch zusammenfallende Punkte erlaubt sind) heißt eine *M'-Konfiguration*, und die Geraden $x=D_i(p_1^0)$, $x'=D_i(q_1^0)$, $y=D_j(p_2^0)$, $y'=D_j(q_2^0)$ heißen die *Träger* dieser Konfiguration. Die Bezeichnung *$M'(x, x'; y, y')$-Konfiguration* weist auf diejenige M'-Konfigurationen hin, die die vorgegebenen Geraden x, x', y, y' als Träger besitzen. Wir wollen betonen, daß dabei die Existenz von $x \cap y$, $x' \cap y'$ in H *nicht* gefordert wird.

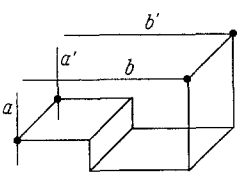


Fig. 3

Wenn wir aus einem $\overline{M}$-Modell eine Geradenstrecke s herausheben, erhalten wir ein M-Modell; entfernen wir noch die Eckpunkte von s, so entsteht ein *M'-Modell*, dessen Träger diejenigen Geraden des M-Modells sind, die durch die entfernten Ecken gehen (Fig. 3 zeigt ein M'-Modell mit den Trägern a, a', b, b').

Hilfssatz 1. *Es seien x, x', x'' Geraden einer Art und y, y', y'' einer anderen Art in einem Halbgewebe. Die Vereinigungsmenge einer $M'(x, x'; y, y')$-Konfiguration mit einer $M'(x', x''; y', y'')$-Konfiguration ist eine $M'(x, x''; y, y'')$-Konfiguration.*

Nimmt man Modelle für die Konfigurationen, so wird für diese der Hilfssatz evident. Entsprechendes gilt für die Konfigurationen selbst.

Hilfssatz 2. *Es bezeichne U_ν in einem Halbgewebe, für $\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$, eine $M'(x_\nu, x_{\nu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$-Konfiguration. Wir nehmen an, daß man den Geradenpaaren (x_i, y_i), $i=1, 2, \ldots, 2n$, die Ecken p_i eines $\overline{M}$-Modells so zuordnen kann, daß*

$$x_i=x_j \Leftrightarrow p_i \rho_1 p_j, \tag{2}$$

$$y_i=y_j \Leftrightarrow p_i \rho_2 p_j, \tag{3}$$

$$i=\text{ungerade Zahl},\ j=i+1 \Leftrightarrow p_i \rho_3 p_j. \tag{4}$$

Dann ist die Vereinigungsmenge der U_ν ($\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$) eine $\overline{M}$-Konfiguration.

Beweis. Das $\overline{M}$-Modell soll mit $\mathscr{U}$, seine Gerade erster Art bzw. zweiter Art durch p_i mit a_i bzw. b_i bezeichnet werden. Zu U_ν gehört ein M'-Modell mit den Trägern $a_\nu, a_{\nu+1}, b_\nu, b_{\nu+1}$, welches wir mit $\mathscr{U}_\nu$ bezeichnen ($\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$). Wir können annehmen, daß, außer a_i, b_i, die $\mathscr{U}_\nu$ keine andere gemeinsame Gerade besitzen. Wir ergänzen nun $\mathscr{U}_\nu$ mit den in der Euklidischen Ebene

existierenden Schnittpunkten von a_ν, b_ν und $a_{\nu+1}$, $b_{\nu+1}$ zu einem $\overline{M}$-Modell $\overline{\mathfrak{U}}_\nu$. Da $\overline{\mathfrak{U}}_\nu$ zwei gemeinsame Ecken mit $\mathfrak{U}$ hat, kann es an $\mathfrak{U}$ angefügt werden, wodurch die nachträglich hinzugenommenen Ecken wieder wegfallen; man erhält ein $\overline{M}$-Modell. Man kann dieses Anfügen der Reihe nach für $\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$ durchführen. Man gelangt zu einem $\overline{M}$-Modell, welches keinen Punkt aus $\mathfrak{U}$ mehr enthält, welches also die Vereinigungsmenge der Ecken der $\mathfrak{U}_\nu$ darstellt, also ein Modell für die Vereinigungsmenge der U_ν, und damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Durch ähnliche Konstruktionen gewinnt man die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 3. *Wenn man die Hypothesen des Hilfssatzes 2 so abändert, daß das $\overline{M}$-Modell zu einem M-Modell wird, bei dem eine ρ_1- oder ρ_2-Relation fehlt und entsprechend* (2) *oder* (3) *eine Formel weniger enthält, dann wird die Vereinigungsmenge der U_ν, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$, eine M-Konfiguration.*

Hilfssatz 4. *Es seien U_ν $M'(x_\nu, x_{\nu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$-Konfigurationen in einem Halbgewebe, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-3$. Wir nehmen an, daß man den Geradenpaaren (x_i, y_i), $i=1, 2, \ldots, 2n-2$, die Ecken p_i eines $M'(a, a'; b, b')$-Modells so zuordnen kann, daß die Beziehungen* (2), (3), (4) *gelten (dabei kommen je $n-2$ Beziehungen* (2), (3) *und $n-1$ Beziehungen* (4) *vor); es sollen p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4} die auf a, a', b bzw. b' liegenden Ecken des M'-Modells bezeichnen. Dann ist die Vereinigungsmenge der U_ν, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-3$, eine $M'(x_{i_1}, x_{i_2}; y_{i_3}, y_{i_4})$-Konfiguration.*

Bemerkung. Bei der Formulierung dieses Hilfssatzes hatten wir dasselbe Modell $\mathfrak{U}$ vor uns, welches im Beweis des Hilfssatzes 2 vorkommt; entfernt man zwei Ecken davon, die in ρ_3-Relation sind, so entsteht das Modell des Hilfssatzes 4.

Hilfssatz 5. *Es seien p, p' diejenigen Punkte einer $M'(x, x; y, y')$-Konfiguration U, die auf y bzw. y' liegen. Es sei ferner U^* die Punktmenge, die aus U, nach Entfernung seiner zweimal vorkommenden Punkte, hervorgeht. Falls $p \neq p'$, ist U^* entweder eine M-Konfiguration, bei der $p \mathfrak{R}_2 p'$ die fehlende Beziehung ist, oder aber ist U^* die Vereinigungsmenge einer solchen Konfiguration mit einer Anzahl getrennter $\overline{M}$-Konfigurationen.*

4. Einbettung eines Halbgewebes in ein reguläres Gewebe

Das Halbgewebe $(H; \mathfrak{R}_i)$ ist in das reguläre Gewebe $(G; \tilde{\mathfrak{R}}_i)$ *einbettbar*, wenn letzteres ein mit $(H; \mathfrak{R}_i)$ isomorphes Teilhalbgewebe enthält. Man kann die Elemente dieses Teilhalbgewebes mit den Elementen von $(H; \mathfrak{R}_i)$ identifizieren; dann wird $(H; \mathfrak{R}_i)$ selbst ein Teilhalbgewebe in $(G; \tilde{\mathfrak{R}}_i)$. Wir beweisen den

Satz 1. *Ein Halbgewebe ist dann und nur dann in ein reguläres Gewebe einbettbar, wenn alle seine M-Konfigurationen sich schließen.*

Wenn $(H; \mathfrak{R}_i)$ in ein reguläres Gewebe einbettbar ist, dann ist $(H; \mathfrak{R}_i)$ ein Teilhalbgewebe eines regulären Gewebes $(G; \tilde{\mathfrak{R}}_i)$; da seine M-Konfigurationen

auch zu $(G; \tilde{\mathscr{R}}_i)$ gehören, müssen diese sich schließen, wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde.

Nehmen wir jetzt an, daß die M-Konfigurationen von $(H; \mathscr{R}_i)$ sich schließen. Es seien Δ_i $(i=1, 2, 3)$ die Geradensysteme von $(H; \mathscr{R}_i)$. Wir definieren auf

$$H^{(1)}=\Delta_1 \times \Delta_2$$

die Relationen $\mathscr{R}_i^{(1)}$ folgendermaßen $(x, x' \in \Delta_1; y, y' \in \Delta_2)$:

$$(x, y)\, \mathscr{R}_1^{(1)} (x', y') \Leftrightarrow x=x',$$

$$(x, y)\, \mathscr{R}_2^{(1)} (x', y') \Leftrightarrow y=y',$$

$$(x, y)\, \mathscr{R}_3^{(1)} (x', y') \Leftrightarrow \text{es existiert eine } M'(x, x'; y, y') \text{ Konfiguration.}$$

$\mathscr{R}_1^{(1)}$ und $\mathscr{R}_2^{(1)}$ sind offenbar Äquivalenzrelationen. Betrachten wir ein M'-Relationensystem und ersetzen alle darin vorkommenden unbestimmten Elemente durch denselben Punkt $p \in H$; man erhält eine $M'(x, x; y, y)$-Konfiguration, wo x und y die Geraden erster bzw. zweiter Art durch p bezeichnen. Es folgt, daß $(x, y)\, \mathscr{R}_3^{(1)} (x, y)$, also $\mathscr{R}_3^{(1)}$ reflexiv ist. $\mathscr{R}_3^{(1)}$ ist offenbar symmetrisch, und die Transitivität folgt sofort aus dem Hilfssatz 1. Wir wollen hier noch bemerken, daß

$$x \circ y = x' \circ y' \Rightarrow (x, y)\, \mathscr{R}_3^{(1)} (x', y'). \tag{5}$$

Dazu braucht man nur in einem M'-Relationensystem einen gewissen Teil der unbestimmten Elemente durch $x \cap y$ und den anderen Teil durch $x' \cap y'$ ersetzen.

Nehmen wir $(x, y)\, \mathscr{R}_i^{(1)} (x', y')$ und $(x, y)\, \mathscr{R}_j^{(1)} (x', y')$ an. Wenn $i=1$, $j=2$, dann ist offenbar $x=x'$, $y=y'$. Wenn $i=1$, $j=3$, dann $x=x'$, und es existiert eine $M'(x, x'; y, y')$-Konfiguration U. Es seien p, p' die Punkte aus U, welche auf y bzw. y' liegen. Ist $p=p'$, so folgt sofort $y=y'$. Nehmen wir an, daß $p \neq p'$; dann folgt aus $x=x'$ und Hilfssatz 5, daß es eine solche M-Konfiguration gibt, für welche $p\, \mathscr{R}_2\, p'$ die fehlende Beziehung ist. Da aber die M-Konfigurationen, laut Voraussetzung, $\overline{M}$-Konfigurationen sind, folgt $p\, \mathscr{R}_2\, p'$, also $y=y'$ auch in diesem Falle. In ähnlicher Weise erhält man auch im Falle $i=2$, $j=3$, daß $x=x'$, $y=y'$. Wir haben somit bewiesen, daß $(H^{(1)}; \mathscr{R}_i^{(1)})$ ein Halbgewebe ist.

Wir zeigen jetzt, daß die M-Konfigurationen dieses Halbgewebes sich schließen. Es sei zuerst $U^{(1)}$ eine M-Konfiguration der Punkte (x_α, y_α), $\alpha=1, 2, \ldots, 2n$, welche durch die nicht vorausgesetzte Relation (x_{2n-1}, y_{2n-1}) $\mathscr{R}_3^{(1)} (x_{2n}, y_{2n})$ zu einer $\overline{M}$-Konfiguration vervollständigt würde. Wir betrachten ein Modell von $U^{(1)}$, und entfernen davon diejenigen zwei Ecken, die den Punkten (x_{2n-1}, y_{2n-1}), (x_{2n}, y_{2n}) entsprechen; es entsteht dadurch ein M'-Modell, das mit $\mathscr{U}'$ bezeichnet werden soll. Wir können bezüglich der Bezeichnung der Punkte annehmen, daß $(x_\nu, y_\nu)\, \mathscr{R}_3^{(1)} (x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-3$. Dann gibt es je eine $M'(x_\nu, x_{\nu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$-Konfiguration in $(H; \mathscr{R}_i)$, die wir mit U_ν bezeichnen wollen $(\nu=1, 3, \ldots, 2n-3)$. Die U_ν erfüllen die Hypothesen

des Hilfssatzes 4, wenn wir $\mathscr{U}'$ für das darin vorkommende M-Modell nehmen. Die Vereinigungsmenge der U_ν, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-3$, ist also eine $M'(x_{2n-1}, y_{2n-1}; x_{2n}, y_{2n})$-Konfiguration, woraus die zu beweisende Relation $(x_{2n-1}, y_{2n-1})\,\mathscr{R}_3^{(1)}(x_{2n}, y_{2n})$ folgt.

Es sei jetzt $V^{(1)}$ eine M-Konfiguration der Punkte (x_α, y_α), $\alpha=1, 2, \ldots, 2n$, und $(x_\lambda, y_\lambda)\,\mathscr{R}_i^{(1)}(x_\mu, y_\mu)$ die nicht vorausgesetzte Schließungsrelation, wo $i=1$ oder 2, und λ, μ zwei verschiedene Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ sind. Wieder sei die Numerierung der Punkte so gewählt, daß $(x_\nu, y_\nu)\,\mathscr{R}_3^{(1)}(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ $(\nu=1, 3, \ldots, 2n-3)$ gilt. Es existiert in $(H; \mathscr{R}_i)$ je eine $M'(x_\nu, x_{\nu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$-Konfiguration U_ν, $\nu=1, 3, \ldots, 2n-1$. Die U_ν genügen den Hypothesen des Hilfssatzes 3, also ist ihre Vereinigungsmenge eine M-Konfiguration, also auch eine $\overline{M}$-Konfiguration. Es folgt: $x_\lambda=x_\mu$ im Falle $i=1$, $y_\lambda=y_\mu$ im Falle $i=2$, und damit ist gezeigt, daß $V^{(1)}$ in $(H^{(1)}, \mathscr{R}_i^{(1)})$ sich schließt.

Wenn $x, x'\in\Delta_1$, $y, y'\in\Delta_2$, $x\cap y=p\in H$ und $x'\cap y'=p'\in H$, dann gilt

$$(x, y)\,\mathscr{R}_i^{(1)}(x', y') \Leftrightarrow p\,\mathscr{R}_i\,p', \qquad i=1, 2, 3. \tag{6}$$

Für $i=1, 2$ ist das evident. Gemäß (5) gilt

$$p\,\mathscr{R}_3\,p' \Rightarrow (x, y)\,\mathscr{R}_3^{(1)}(x', y').$$

Um die umgekehrte Implikation zu zeigen, setzen wir die rechte Seite, also die Existenz einer $M'(x, y; x', y')$-Konfiguration in $(H; \mathscr{R}_i)$ voraus; wenn wir die Punkte p, p' dazunehmen, so entsteht eine M-Konfiguration, also ist die schließende Relation $p\,\mathscr{R}_3\,p'$ richtig.

Wir wollen jetzt diejenigen Elemente $(x, y)\in H^{(1)}$, für welche $x\cap y\in H$, mit den Punkten $x\cap y$ identifizieren. Dadurch wird laut (6) $(H; \mathscr{R}_i)$ *ein Teilhalbgewebe von* $(H^{(1)}; \mathscr{R}_i^{(1)})$. Wenn $\Delta_i^{(1)}$ $(i=1, 2, 3)$ die Geradensysteme in $(H^{(1)}; \mathscr{R}_i^{(1)})$ bezeichnen, so können $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}$ mit Δ_1 bzw. Δ_2 identifiziert werden.

Nehmen wir an, daß die Halbgewebe $(H^{(1)}; \mathscr{R}_i^{(1)})$, $(H^{(2)}; \mathscr{R}_i^{(2)})$, $\ldots$, $(H^{(3h)}; \mathscr{R}_i^{(3h)})$ mit den Geradensystemen $\Delta_i^{(\nu)}$, $\nu=1, \ldots, 3h$ $(i=1, 2, 3)$ schon konstruiert sind. Wir bauen das Halbgewebe $(H^{(3h+1)}; \mathscr{R}_i^{(3h+1)})$ von $(H^{(3h)}, \mathscr{R}_i^{(3h)})$ ausgehend so auf, wie $(H^{(1)}; \mathscr{R}_i^{(1)})$ von $(H; \mathscr{R}_i)$ ausgehend entsteht. Dann bauen wir $(H^{(3h+2)}; \mathscr{R}_i^{(3h+2)})$ in analoger Weise von $(H^{(3h+1)}; \mathscr{R}_i^{(3h+1)})$ ausgehend auf, mit dem Unterschied, daß jetzt $H^{(3h+2)}=\Delta_1^{(3h+1)}\times\Delta_3^{(3h+1)}$ ist; dann setzen wir $H^{(3h+3)}=\Delta_2^{(3h+2)}\times\Delta_3^{(3h+2)}$ und konstruieren das Halbgewebe $(H^{(3h+3)}; \mathscr{R}_i^{(3h+3)})$. Wir setzen diesen induktiven Prozeß unbeschränkt fort und bezeichnen

$$H^*=\bigcup_{k=1}^{\infty} H^{(k)}.$$

Wir definieren auf H^* drei Relationen, wie folgt: für $p, q\in H^*$ wählen wir die natürliche Zahl m so, daß $p\in H^{(m)}$, $q\in H^{(m)}$ und setzen $p\,\mathscr{R}_i^*\,q$ dann und nur dann, wenn $p\,\mathscr{R}_i^{(m)}\,q$ $(i=1, 2, 3)$. Man sieht, daß die Relationen $\mathscr{R}_i^*$ von der Wahl von m nicht abhängen, daß sie Äquivalenzrelationen sind, und

daß gilt:

$$(p\,\mathfrak{R}_i^*\,q\;\&\;p\,\mathfrak{R}_j^*\,q\;\&\;i\neq j)\Rightarrow p=q\,.$$

Damit haben wir gezeigt, daß $(H^*;\mathfrak{R}_i^*)$ *ein Halbgewebe ist, welches* $(H;\mathfrak{R}_i)$ *als Teilhalbgewebe enthält.* Es sei $\mathfrak{U}$ eine M-Konfiguration in $(H^*;\mathfrak{R}_i^*)$; wenn m genügend groß ist, dann sind alle Punkte von $\mathfrak{U}$ in $H^{(m)}$ enthalten, also schließt sich $\mathfrak{U}$. *Insbesondere schließen sich die R-Konfigurationen in* $(H^*;\mathfrak{R}_i^*)$.

Aber $(H^*;\mathfrak{R}_i^*)$ *ist ein Gewebe.* In der Tat, es seien $D_i^*(p)$, $D_j^*(q)$ irgend zwei Geraden verschiedener Art; man wähle m so, daß $p\in H^{(m)}$, $q\in H^{(m)}$; für eine der drei Möglichkeiten des Paares (i,j) besitzen die Geraden $D_i^{(m)}(p)$, $D_j^{(m)}(q)$ in $H^{(m)}$ einen gemeinsamen Punkt; in $H^{(m+2)}$ haben $D_i^{(m+2)}(p)$ und $D_j^{(m+2)}(q)$ jedenfalls einen gemeinsamen Punkt r; aber $r\in D_i^*(p)$, $r\in D_j^*(q)$.

Also ist $(H^*;\mathfrak{R}_i^*)$ ein reguläres Gewebe, und damit haben wir Satz 1 bewiesen.

5. Die Schließungsbedingungen

Die Bedingungen, daß die M-Konfigurationen sich schließen sollen, sind dreierlei, je nach dem welche der drei Relationen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ oder $\mathfrak{R}_3$ in der schließenden Beziehung auftritt; demgemäß haben wir zwischen M_1-, M_2-, M_3-*Schließungsbedingungen* zu unterscheiden.

Wir bezeichnen, wie im § 2, die Operation des Quasigruppoids $\mathfrak{Q}_{(H;\mathfrak{R}_i)}$ mit $\circ$. Einer M_3-Schließungsbedingung entspricht eine Bedingung in $\mathfrak{Q}_{(H;\mathfrak{R}_i)}$. Zum Beispiel die M_3-Bedingung, welche aus Fig. 4 entsteht, wenn die zur Strecke AB gehörende Relation zum Schlusse kommt, kann, wie folgt, umgeformt werden:

$$\left.\begin{aligned} x_1\circ y_1&=x_2\circ y_3\\ x_1\circ y_4&=x_2\circ y_6\\ x_3\circ y_1&=x_4\circ y_2\\ x_3\circ y_4&=x_4\circ y_5\\ x_5\circ y_2&=x_6\circ y_3\\ x_5\circ y_5&=z\\ x_6\circ y_3&=z' \end{aligned}\right\}\Rightarrow z=z'.$$

Aus diesen können die M_1-(bzw. M_2-)Bedingungen in $\mathfrak{Q}_{(H;\mathfrak{R}_i)}$ erhalten werden: Man nimmt die Konklusionsgleichheit $z=z'$ zu den Hypothesen (wobei sich die Variablen z, z' natürlich eliminieren lassen), man setzt für die zwei Vorkommen eines x (bzw. y) zwei verschiedene Buchstaben, und die Gleichheit dieser Buchstaben schreibt man als Konklusion. Dieses Verfahren soll *eine Umkehrung der* M_3*-Bedingungen heißen.*

Wir bezeichnen eine M_3-Bedingung, in deren zugehörigem Modell alle geschlossenen Linienzüge, die nur aus zur x- oder y-Achse parallelen Strecken bestehen, Rechtecke sind, als $M_3^{\square}$-*Bedingung.* In der Schreibweise von $\mathfrak{Q}_{(H;\mathfrak{R}_i)}$ sind diese Bedingungen gerade die *Malcevschen Bedingungen*; dies erkennt man

entweder aus der Bildungsregel der Malcevschen Ketten [5] oder, leichter, durch eine topologische Transformation des zirkulären Modells [8].

Hilfssatz 6. *Wenn alle $M_3^{\square}$-Bedingungen in einem Halbgewebe erfüllt sind, dann sind auch alle M_3-Bedingungen erfüllt.*

Nehmen wir z.B. eine M_3-Bedingung, für welche das entsprechende Modell den geschlossenen Linienzug $abcdef$ enthält (Fig. 5a). Die zu diesem Modell gehörigen Bedingungen können aus den zu Fig. 5b gehörenden erhalten werden, indem man für x, x' bzw. y, y' dieselben Elemente setzt. Wenn der Linienzug aus mehreren zur x- und y-Achse parallelen Strecken besteht, so kann dieses Verfahren wiederholt angewandt werden.

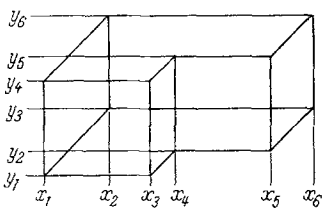


Fig. 4

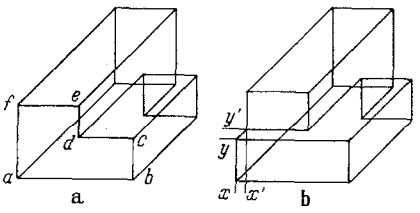


Fig. 5 a u. b

Ebenso folgt, daß die Umkehrungen der $M_3^{\square}$-Bedingungen alle M_1- und M_2-Bedingungen nach sich ziehen. Wir können also aussprechen:

Hilfssatz 7. *Es seien in dem Quasigruppoid $\mathfrak{Q}_{(H;\mathfrak{R}_i)}$ alle Malcevschen Bedingungen und die Umkehrungen derselben erfüllt. Dann sind in $(H; \mathfrak{R}_i)$ alle M-Schließungsbedingungen erfüllt.*

Wenn jede Gerade erster Art eines Halbgewebes mit jeder Geraden zweiter Art einen gemeinsamen Punkt besitzt, dann folgt die Erfüllung der M_1- und M_2-Bedingungen aus dem Erfülltsein der M_3-Bedingungen. Man kann aber dieses Ergebnis noch verschärfen. Ein Halbgewebe heißt *1-2-rechteckig*, wenn aus $p_0 \mathfrak{R}_1 p_1$, $p_0 \mathfrak{R}_2 p_2$ die Existenz eines solchen Punktes q folgt, daß $p_2 \mathfrak{R}_1 q$ und $p_1 \mathfrak{R}_2 q$.

Hilfssatz 8. *Sind in einem 1-2-rechteckigen Halbgewebe alle M_3-Bedingungen erfüllt, so sind auch alle M_1- und M_2-Bedingungen befriedigt.*

Beweis. Es sei U eine M-Konfiguration in einem den Hypothesen des Hilfssatzes genügenden Halbgewebe, bei der die nicht postulierte schließende Relation $p \mathfrak{R}_1 q$ ist. Es gibt $q' \in U$ so, daß $q \mathfrak{R}_3 q'$. Es existieren in U die Punkte $p', p_1, p_1', \ldots, p_{i-1}, p_{i-1}', p_i$ so, daß

$$p \mathfrak{R}_2 p', \quad p' \mathfrak{R}_1 p_1, \quad p_1 \mathfrak{R}_2 p_1', \quad p_1' \mathfrak{R}_1 p_2, \ldots, p_{i-1}' \mathfrak{R}_1 p_i, \quad p_i \mathfrak{R}_2 q.$$

Aus der Rechteckigkeit können wir der Reihe nach die Existenz solcher Punkte $r_1, r_2, \ldots, r_i$ im Halbgewebe ableiten, für welche

$$r_\nu \mathfrak{R}_1 p \quad \text{und} \quad r_\nu \mathfrak{R}_2 p_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, i.$$

Wir ersetzen den Punkt q aus U durch r_i; dadurch wird U zu einer M-Konfiguration U', in welcher $r_i \mathscr{R}_3 q'$ die schließende Relation ist. Da aber die M_3-Bedingungen erfüllt sind, gilt $r_i \mathscr{R}_3 q'$. Es folgt $r_i \mathscr{R}_3 q$; andererseits gilt $r_i \mathscr{R}_2 p_i$, $p_i \mathscr{R}_2 q$, also $r_i \mathscr{R}_2 q$. Wir schließen daraus $r_i = q$, also $q \mathscr{R}_1 p$. Damit ist gezeigt, daß die M_1-Bedingungen erfüllt sind, und ebenso gelangt man zu den M_2-Bedingungen.

6. Isotope Einbettung eines kürzbaren Halbgruppoids in eine Gruppe

Wir beweisen, als eine Anwendung des Satzes 1, den

Satz 2. *Ein kürzbares Halbgruppoid G ist dann und nur dann isotop in eine Gruppe einbettbar, wenn die Malcevschen Bedingungen und ihre Umkehrungen in G erfüllt sind.*

Nehmen wir an, daß eineindeutige Abbildungen f_1, f_2, f_3 des Halbgruppoids $(G,)$ in die Gruppe $(G', \cdot)$ existieren, für welche die Relation

$$(x f_1) \cdot (y f_2) = (x y) f_3 \tag{7}$$

für zwei zusammensetzbare Elemente x, y von G immer gilt. Jede der Gleichungen $x y = x' y'$ bzw. $x y = z$, die unter den Hypothesen einer Malcevschen Bedingung (oder der Umkehrung einer solchen) vorkommt, wird mittels (7) zu einer Gleichung $(x f_1) \cdot (y f_2) = (x' f_1) \cdot (y' f_2)$ bzw. $(x f_1) \cdot (y f_2) = z f_3$. Das ergibt aber die Hypothesen der Malcevschen Bedingung (bzw. ihrer Umkehrung) in G' und damit auch deren Konklusion in G', die nun wegen der Umkehrbarkeit der f_i wieder die Konklusion in G liefert.

Nehmen wir jetzt an, daß die Malcevschen Bedingungen und ihre Umkehrungen in G erfüllt sind. Wir betrachten das Halbgewebe $H = (H^G; \mathscr{R}_i^G)$ (s. § 2) und dessen Geradensysteme Δ_i $(i = 1, 2, 3)$. Das Halbgruppoid G gehört zu H, ist also isotop mit dem Quasigruppoid $(\mathfrak{Q}_H, \circ)$. Es folgt, wenn man noch Hilfssatz 7 in Betracht zieht, daß die M-Konfigurationen in H sich schließen. Also kann H, nach Satz 1, in ein reguläres Gewebe H^* eingebettet werden. Wir bezeichnen mit Δ_i^* $(i = 1, 2, 3)$ die Geradensysteme von H^* und mit $\bullet$ die Operation von $\mathfrak{Q}_{H^*}$; $\Delta_i \subset \Delta_i^*$ und $x \circ y = z \Rightarrow x \bullet y = z$.

Das Quasigruppoid $\mathfrak{Q}_{H^*}$ ist isotop mit einer Gruppe. Wir können den Beweis aus [1] des analogen Resultats für Quasigruppen übernehmen: Wir bemerken zuerst, daß die Gleichungen $x \bullet b = c$, $a \bullet y = c$ je eine einzige Lösung $x \in \Delta_1^*$ bzw. $y \in \Delta_2^*$ besitzen ($a \in \Delta_1^*$, $b \in \Delta_2^*$, $c \in \Delta_3^*$), weil H^* ein *Gewebe* ist. Es sei $(\Delta_3^*, *)$ dasjenige Isotop von $\mathfrak{Q}_{H^*}$, welches mittels

$$(x \bullet b) * (a \bullet y) = x \bullet y \tag{8}$$

definiert ist, wo a und b feste Elemente in Δ_1^* bzw. Δ_2^* sind und $x \in \Delta_1^*$, $y \in \Delta_2^*$. Es seien $\xi, \eta, \zeta \in \Delta_3^*$; wir bestimmen x, y, x', y', x'', y'' so, daß $x \bullet b = \xi$, $a \bullet b = \eta$, $x' \bullet b = x \bullet y$, $a \bullet y' = \zeta$, $x'' \bullet b = \eta$, $a \bullet y'' = x'' \bullet y'$. Da die R-Konfigurationen in H^* sich schließen, ergeben $a \bullet y = x'' \bullet b$, $x \bullet y = x' \bullet b$, $a \bullet y'' = x'' \bullet y'$ die Glei-

chung $x \bullet y'' = x' \bullet y'$. Man berechnet

$$(\xi * \eta) * \zeta = [(x \bullet b) * (a \bullet y)] * \zeta = (x \bullet y) * \zeta$$
$$= (x' \bullet b) * (a \bullet y') = x' \bullet y',$$
$$\xi * (\eta * \zeta) = \xi * [(x'' \bullet b) * (a \bullet y')] = \xi * (x'' \bullet y')$$
$$= (x \bullet b) * (a \bullet y'') = x \bullet y'' = x' \bullet y' = (\xi * \eta) * \zeta.$$

$(\Delta_3^*, *)$ ist also eine assoziative Quasigruppe, d.h. eine Gruppe.

Wenn man die Beziehung (8) nur auf die Elemente $x \in \Delta_1$ und $y \in \Delta_2$, die in $\mathfrak{Q}_H$ zusammensetzbar sind, anwendet, so bemerkt man, daß die eineindeutigen Abbildungen $x \to x \bullet b$, $y \to a \bullet y$ und die identische Transformation eine Isotopie des Quasigruppoids $\mathfrak{Q}_H$ in die Gruppe $(\Delta_3^*, *)$ verwirklichen. Es folgt, daß eine Isotopie auch von G in $(\Delta_3^*, *)$ existiert.

Ein Halbgruppoid G heißt *rechteckig*, wenn aus der Existenz der Produkte $a\,x$, $b\,x$, $a\,y$ die Existenz von $b\,y$ folgt. Man sieht, daß bei rechteckigem G das Halbgewebe $(H^G; \mathfrak{R}_i^G)$ 1-2-rechteckig ist. Hilfssatz 8 führt zu der

Folgerung. *Ein kürzbares rechteckiges Halbgruppoid G ist dann und nur dann in eine Gruppe isotop einbettbar, wenn die Malcevschen Bedingungen in G erfüllt sind.*

7. Isomorphe Einbettung in eine Gruppe

Nehmen wir an, daß das kürzbare Halbgruppoid $(G,)$ ein neutrales Element e enthält, also

$$e\,x = x\,e = x \quad \text{für alle} \quad x \in G.$$

Sind die Malcevschen Bedingungen und ihre Umkehrungen in G erfüllt, so folgt aus dem Satz 2, daß G in eine Gruppe $(G', \circ)$ isotop einbettbar ist, also

$$(x\,f) \circ (y\,g) = (x\,y)\,h \tag{9}$$

für alle zusammensetzbaren $x, y \in G$, wo f, g h, eineindeutige Abbildungen von G in G' sind. Wir setzen zuerst $x = e$ bei beliebigem $y \in G$ (diese Elemente sind zusammensetzbar), danach $y = e$ bei beliebigem $x \in G$:

$$(e\,f) \circ (y\,g) = y\,h,$$
$$(x\,f) \circ (e\,g) = x\,h;$$

es folgt

$$(x\,h) \circ (e\,g)^{-1} \circ (e\,f)^{-1} \circ (y\,h) = (x\,y)\,h.$$

Wir bezeichnen $[(e\,f) \circ (e\,g)]^{-1} = a \in G'$ und multiplizieren die letzte Gleichung von links mit a

$$[a \circ (x\,h)] \circ [a \circ (y\,h)] = a \circ (x\,y)\,h.$$

Die Transformation φ: $x \to a \circ (x\,h)$ bildet G eineindeutig auf $a \circ G f \subset G'$ ab, und es gilt

$$(x\,\varphi) \circ (y\,\varphi) = (x\,y)\,\varphi$$

für alle zusammensetzbaren $x, y \in G$. Wir haben also *eine (isomorphe) Einbettung des Halbgruppoids G in die Gruppe G'* vor uns.

Wenn wir mehr über G voraussetzen, daß nämlich G ein Gruppoid ist, dann ist es sicher rechteckig, und, laut Hilfssatz 8, braucht man zu der Einbettbarkeit in eine Gruppe nur die Malcevschen Bedingungen zu fordern. Wir haben also

Satz 3. *Es sei G ein kürzbares Gruppoid mit neutralem Element. G ist dann und nur dann in eine Gruppe einbettbar, wenn die Malcevschen Bedingungen erfüllt sind.*

Wenn wir über G noch mehr voraussetzen, daß nämlich G eine kürzbare Halbgruppe ist, dann gelangen wir zum Malcevschen Satz. In diesem Fall braucht man aber die Existenz des neutralen Elements nicht zu fordern.

Es sei nämlich $(G,)$ eine kürzbare Halbgruppe ohne neutrales Element, welche die Malcevschen Bedingungen erfüllt. Wir erweitern G zu $\bar{G} = G \cup \{e\}$, wo e ein in G nicht vorkommendes Symbol ist, und setzen

$$e\,x = x\,e = x \quad \text{für} \quad x \in G, \quad \text{und} \quad e\,e = e.$$

In $\bar{G}$ bleibt das assoziative Gesetz offenbar gültig. Die Kürzbarkeit ergibt sich so: Wäre $e\,x_0 = a\,x_0$ für gewisse $a, x_0 \in G$, dann würde für $x \in G$ der Reihe nach folgen: $x_0 = a\,x_0$, $x\,x_0 = x\,a\,x_0$, $x = x\,a$, $x\,x = x\,a\,x$, $x = a\,x$; also wäre a ein neutrales Element in G. Wir behaupten noch, daß in $\bar{G}$ die Malcevschen Bedingungen auch erfüllt sind. Betrachten wir eine Malcevsche Bedingung in $\bar{G}$, welche Gleichheiten der Form $x_1 y_1 = x_2 y_2$ enthält, wo mindestens eines der Elemente x_1, y_1, x_2, y_2 gleich e ist. Wir multiplizieren alle Gleichheiten der Malcevschen Bedingung (Hypothesen und Konklusion) von der linken und der rechten Seite her mit je einem festen Element $a, b \in G$. Wir schließen a und das nebenstehende Element und ebenso b und sein Nachbarelement immer in je eine Klammer ein; die Produkte in den Klammern gehören zu G, wir erhalten also eine Malcevsche Bedingung in G, die erfüllt ist. Durch Kürzen mit a und b geht die Konklusionsgleichheit in die ursprüngliche über, die somit als erfüllt erkannt ist. Also können wir, laut Satz 3, $\bar{G}$, und damit offenbar auch G, in eine Gruppe einbetten.

Damit ist von neuem bewiesen worden der

Satz von Malcev. *Eine kürzbare Halbgruppe G ist dann und nur dann in eine Gruppe einbettbar, wenn die Malcevschen Bedingungen in G erfüllt sind.*

8. Isotope Einbettung der partiellen Gruppen in Gruppen

Ein Brandtsches Gruppoid, das mindestens zwei Einheiten enthält, kann sicherlich nicht in eine Gruppe isomorph eingebettet werden; dagegen gilt

Hilfssatz 9. *Jedes Brandtsche Gruppoid kann in eine Gruppe isotop eingebettet werden.*

Es sei B ein Brandtsches Gruppoid. Man sieht leicht, daß B rechteckig ist. Laut Folgerung des Satzes 2 braucht man also nur einzusehen, daß die Malcevschen Bedingungen in B erfüllt sind.

Man kann die Menge P und die Gruppe G so bestimmen, daß B mit dem auf $P\times G\times P$ durch die folgende Operation definierten Brandtschen Gruppoid isomorph sei [2]:

$$(x, g, y)(y, g', z)=(x, g\,g', z)$$

für $x, y, z\in P$, $g, g'\in G$ und das Produkt $(x, g, y)(y', g', z)$ ist für $y\neq y'$ nicht definiert. Betrachten wir eine mit diesen Elementen aufgeschriebene Malcevsche Bedingung

$$(x_1^{(i)}, g_1^{(i)}, y_1^{(i)})(x_2^{(i)}, g_2^{(i)}, y_2^{(i)})=(x_3^{(i)}, g_3^{(i)}, y_3^{(i)})(x_4^{(i)}, g_4^{(i)}, y_4^{(i)}),\quad (i=1, \dots, p-1)$$
$$\Rightarrow (x_1^{(p)}, g_1^{(p)}, y_1^{(p)})(x_2^{(p)}, g_2^{(p)}, y_2^{(p)})=(x_3^{(p)}, g_3^{(p)}, y_3^{(p)})(x_4^{(p)}, g_4^{(p)}, y_4^{(p)}).$$

Die Existenz der in der Konklusion stehenden Produkte braucht hier nicht bei den Hypothesen hingeschrieben zu werden; sie läßt sich nämlich aus den Hypothesen abgeleiten: Zunächst gilt

$$y_1^{(i)}=x_2^{(i)},\quad i=1, 2, \dots, p-1. \tag{10}$$

Wenn wir in einem entsprechenden Modell einem zur x- und y-Achse parallelen geschlossenen Linienzug folgen, dann erhalten wir

$$y_1^{(p)}=y_1^{(h_1)},\quad x_2^{(h_1)}=x_2^{(h_2)},\quad y_1^{(h_2)}=y_1^{(h_3)}, \dots, x_2^{(h_r)}=x_2^{(p)} \text{ für gewisse } h_1, \dots, h_r<p,$$

also laut (10) $y_1^{(p)}=x_2^{(p)}$. Ebenso folgt $y_3^{(p)}=x_4^{(p)}$. Durch einen analogen Gedankengang schließen wir aus $x_1^{(i)}=x_3^{(i)}$, $y_2^{(i)}=y_4^{(i)}$, $i=1, \dots, p-1$, daß $x_1^{(p)}=x_3^{(p)}$, $y_2^{(p)}=y_4^{(p)}$. Andererseits ist $g_1^{(p)}\,g_2^{(p)}=g_3^{(p)}\,g_4^{(p)}$, weil die aufgeschriebene Bedingung bezüglich der Elemente der Gruppe G sicherlich befriedigt ist. Damit ist das Erfülltsein der Malcevschen Bedingungen gezeigt.

Beispiel. Sei R der Körper der reellen Zahlen und B_0 das Brandtsche Gruppoid, welches auf $R\times R$ durch

$$(x, y)(u, v)=(x, v)\qquad \text{für } y=u \text{ (sonst nicht erklärt)}$$

definiert ist ($x, y, u, v\in R$). Wir wollen die im Hilfssatz 9 sichergestellte isotope Einbettung angeben. Wir erklären dazu die eineindeutigen Abbildungen f, g, h von $R\times R$ auf sich selbst folgendermaßen:

$$(x, y)\,f=(y-x, x),\quad (x, y)\,g=(y-x, y),\quad (x, y)\,h=(y-x, x+y).$$

Wenn $+$ das Additionszeichen im zweidimensionalen Vektorraum R_2 über R bedeutet, dann ist $(y-x, x)+(z-y, z)=(z-x, x+z)$, also

$$(x, y)\,f+(y, z)\,g=(x, z)\,h.$$

Da in diesem Falle alle drei Transformationen f, g, h die Menge B_0 auf dieselbe Menge $R\times R$ abbilden, haben wir ein Isotop von B_0 vor uns, welches in R_2 eingebettet ist. Die Elemente dieses Isotops sind genau die Elemente

von R_2, die Operation ist genau die Addition in R_2, die aber nur für solche Elementenpaare (α, β), (γ, δ) definiert ist, welche der Beziehung $\alpha+\beta+\gamma=\delta$ genügen.

Satz 4. *Jede partielle Gruppe kann in eine Gruppe isotop eingebettet werden.*

Wir zeigen, daß *eine partielle Gruppe G in ein System disjunkter Brandtscher Gruppoide zerfällt.* Jede Malcevsche Bedingung für G muß dann eine Malcevsche Bedingung für ein gewisses Brandtsches Gruppoid sein; sie ist also erfüllt, und die Folgerung des Satzes 2 zieht dann Satz 4 nach sich.

Es sei P die Menge der idempotenten Elemente aus G. Wir erklären eine Relation $\sim$ in P: $e\sim f$, wenn es ein $x\in G$ gibt mit $e\,x=x=x\,f$. Es gilt $e\sim e$ für $e\in P$. Wenn $e\sim f$, dann folgt aus $e\,x=x=x\,f$, daß $f\,\bar{x}=\bar{x}\,e=\bar{x}$, also $f\sim e$. Wenn $e\sim f$, $f\sim g$, dann gibt es $x,y\in G$ so, daß $e\,x=x\,f=x$, $f\,y=y\,g=y$; die linksseitige Einheit von y stimmt also mit der rechtsseitigen von x überein, also existiert $x\,y$; es gilt: $e\,x\,y=x\,y$, $x\,y\,g=x\,y$, also $e\sim g$. Damit ist gezeigt, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation in P ist.

Ein Element $x\in G$ hat eine eindeutig bestimmte linksseitige Einheit e' und eine rechtsseitige e, und $e'\sim e$. Zwei Elemente aus G sollen äquivalent heißen, wenn für ihre Einheiten die Relation $\sim$ gilt. Man sieht sofort ein, daß dadurch wirklich eine Äquivalenz in G definiert ist. Es sollen mit G_i $(i\in I)$ die zugehörigen Äquivalenzklassen bezeichnet werden. Wenn $i\neq i'$, dann ist kein Element aus G_i mit einem Element aus $G_{i'}$ zusammensetzbar. Andererseits, wenn e' und e idempotente Elemente aus G_i sind, dann ist $e'\sim e$, und es existiert $x\in G$ so, daß $e\,x=x\,e'=x$; aber x muß zu G_i gehören, und damit ist gezeigt, daß G_i ein Brandtsches Gruppoid ist.

Literatur

[1] ACZÉL, J., G. PICKERT u. F. RADÓ: Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen. Mathematica **2** (**25**), 5—24 (1960).

[2] BRUCK, R. H.: A Survey of Binary Systems. Ergebnisse der Math., N.F. 20. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

[3] DUBREIL, P.: Algèbre I. 2e éd. Paris: Gauthier-Villars 1954.

[4] LAMBEK, J.: The Immersibility of a Semigroup into a Group. Canad. J. Math. **3**, 34—43 (1951).

[5] MALCEV, A.: Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen. Mat. Sbornik **6** (48), 331—336 (1939); II. Mat. Sbornik **8** (50), 251—264 (1940).

[6] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[7] RADÓ, F.: Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe. Mathematica **2** (**25**), 325—334 (1960).

[8] TAMARI, D.: Monoïdes préordonnés et chaines de Malcev. Bull. Soc. Math. France **82**, 53—96 (1954).

Str. Constanta 16, Cluj (Rumänien)

(Eingegangen am 8. Dezember 1964)