ASUPRA TEORIEI CODURILOR GRUPALE ȘI APLICAȚIILE LOR LA SINTEZA MULTIPOLILOR CU CONTACTE ȘI RELEE

DE

ION MUNTEAN

În această lucrare se aprofundează studiul legăturii între codurile grupale și funcțiile booleene pusă în evidență în [3], și se dă un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcțiile booleene în coduri grupale.

Rezultatele obținute se folosesc la sinteza multipolilor cu contacte și relee.

I

1.1. Fie K un cod grupal cu matricea de cod

$$K = (\alpha_{ij}) \qquad \begin{matrix} i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^m - 1 \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l \end{matrix}$$

în care notăm cu α_i liniile și cu β_j coloanele.

Liniile codului K pot fi ordonate astfel încît

$$\alpha_{2^s+t} = \alpha_{2^s} \oplus \alpha_t \tag{1}$$

pentru orice $0 \leqslant s \leqslant m-1$, $0 \leqslant t < 2^s$, unde „$\oplus$" este suma modulo 2 a l-punctelor formate de liniile codului K;

$$\alpha_i \oplus \alpha_k = \alpha_t \Rightarrow \alpha_{i,j} + \alpha_{k,j} = \alpha_{t,j} \pmod 2 \qquad \begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1, \\ j = 1,\ 2, \ldots, l \end{matrix} \tag{2}$$

Liniile codului K pot fi scrise sub una din formele:

$$\alpha_i = (\alpha_{i1},\ \alpha_{i2}, \ldots,\ \alpha_{il}) \tag{3}$$

$$\alpha_i = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\alpha_{ij}}, \text{ unde } \beta_j^{\alpha_{ij}} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } \alpha_{ij} = 0 \\ \beta_j \text{ dacă } \alpha_{ij} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1247–1257, BUCUREȘTI, 1966

Prin θ am notat elementul nul, cu proprietatea $\theta\beta = \beta\theta = \beta$.

1.2. Pentru forma (4) de scriere a liniilor α_i vom introduce operația

$$\alpha_i \oplus \alpha_k = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\alpha_{ij} \oplus \alpha_{kj}} \tag{5}$$

Dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt variabile booleene, atunci (4) este un produs de variabile booleene, și ținînd seama de faptul că între (3) și (4) se poate stabili o corespondență biunivocă, care păstrează operația (5), se obține rezultatul:

LEMA 1. *Mulțimea A_l a produselor de l variabile booleene, poate fi organizată ca grup, cu operația „$\oplus$", izomorf cu grupul B_l generat de l-punctele*

$$\alpha_{2i-1} = (\alpha_{2i-1,1}, \alpha_{2i-1,2}, \ldots, \alpha_{2i-1,l}) \tag{6}$$

$$\alpha_{2i-1,k} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq k \\ 1 \text{ dacă } i = k \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, l$$

Demonstrație. Avînd în vedere (3) și (4), fiecărui l-punct îi putem pune în corespondență, biunivoc, un produs de variabile booleene. Apoi, ținînd seama de (5) și de faptul că l-punctele (6) generează un grup B_l, se obține lema 1.

Observație. Grupul A_l este un spațiu l-dimensional peste corpul $z/2$, format din 0 și 1, în care înmulțirea cu scalari este dată de relația:

$$\lambda\alpha_i = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\lambda\alpha_{ij}} \tag{7}$$

ceea ce rezultă din faptul că B_l este însuși spațiu vectorial peste corpul $z/2$.

1.3. DEFINIȚIA 1. Elementele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se zice că sînt liniar independente dacă egalitatea:

$$\lambda_1 \alpha_1 \oplus \lambda_2 \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_k \alpha_k = \bigoplus_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i = \theta, \tag{8}$$

unde

$$\lambda_i \alpha_i = \begin{cases} \alpha_i \text{ pentru } \lambda_i = 1 \\ \theta \text{ pentru } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

are loc numai dacă toți $\lambda_i = 0$, și sînt liniar dependente în caz contrar.

Avînd în vedere lema 1, calculele se pot face fie în spațiul A_l, fie în spațiul B_l.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ un sistem maximal de implicanți primi liniar independenți ai unei funcții booleene F și să construim un cod grupal K, generat de acest sistem de implicanți primi.

DEFINIȚIA 2. Numim cod K generat de o funcție booleană F, codul generat de mulțimea implicanților primi ai funcției F.

Evident, pentru construcția codului generat de funcția booleană F este suficient un sistem maximal de implicanți primi ai lui F.

1.4. Fie funcția booleană F_p, obținută din F prin înmulțire cu variabila booleană p

$$F_p = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i p \tag{9}$$

și să construim codul K_p, generat de funcția F_p.

DEFINIȚIA 3. Spunem că funcției F i se asociază un cod grupal K_p dacă toate liniile codului K_p care conțin 1 în coloana p sînt sau implicanți primi ai funcției F_p sau se absorb în astfel de implicanți primi.

Observație. Dacă D_F este un dipol fără repetiție a cărui funcție de lucru este F și dacă între poli conectăm variabila p, atunci α_{ip} sînt cicluri simple ale acestui dipol.

În [3] am arătat că funcțiilor de lucru ale dipolilor fără repetiție, scrise ca reuniune a tuturor implicanților lor primi, le corespund coduri grupale și că mulțimea liniilor codului K_p corespunde mulțimii ciclurilor simple ale multipolului obținut din dipolul D_F prin conectarea între poli a laturii p. De asemenea am arătat exemple de funcții care se realizează prin scheme cu repetiție cărora le corespund coduri grupale.

Presupunem că funcției booleene F i se asociază un cod grupal K_p și să notăm cu K_p^* codul generat de funcția F^*, duala lui F, unde $F^* = \overline{F(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_l)}$.

LEMA 2. *Dacă funcției booleene F i se asociază un cod grupal K_p și dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$ sînt coloanele codului K_p iar $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{kl})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ sînt liniile codului K_p^*, atunci avem relațiile:*

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \gamma_{kj} \beta_j = \theta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \tag{10}$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm egalitatea (10) pentru o bază a codului K_p^*.

Presupunem că există un produs

$$\prod_{k=1}^{s} \beta_{j_k}^{\alpha_{i,j_k}} = \beta_{j_1} \beta_{j_2} \ldots \beta_{j_s}, \qquad s \leqslant l \tag{11}$$

astfel încît

$$\bigoplus_{k=1}^{s} \beta_{j_k} = \theta \tag{12}$$

și că există un indice, fie de exemplu s, astfel încît $\beta_{j_s} = p$.

Dar atunci produsul

$$\prod_{k=1}^{s-1} \beta_{j_k}^{\alpha_{i,j_k}} = \beta_{j_1} \beta_{j_2} \ldots \beta_{j_{s-1}} \tag{13}$$

este un implicant al lui F^*. Într-adevăr, codul K_p fiind codul grupal asociat lui F, coloana p are 1 în toate liniile care sînt implicanți ai lui F și 0 în restul de linii. Ținînd seama de acest lucru și de relația (12), rezultă că fiecare linie α_i care este implicant a lui F conține 1 într-una măcar dintre coloanele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$. Adică fiecare implicant al lui F conține

cel puțin una dintre variabilele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$ și deci se obțin implicațiile :

$$\begin{aligned} &\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \ldots = \beta_{j_{s-1}} = 0, \ F = 0 \\ &\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \ldots = \beta_{j_{s-1}} = 1, \ F^* = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

ceea ce demonstrează că (13) este implicant al lui F^* și că există relația (10).

Invers, fie γ un implicant prim al funcției F^*. Să arătăm că verifică relația (12) respectiv (10).

În caz contrar există cel puțin o linie a codului K_p, fie α_i, care are 1 în coloana p și conține un număr par de 1 în coloanele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$. Fie $\beta'_{j_1}, \beta'_{j_2}, \ldots, \beta'_{j_{2r}}$ coloanele respective în care linia α_i are 1. Deoarece γ este un implicant prim al lui F^*, înlăturarea oricăreia dintre variabilele β_j din (13) conduce la anularea implicației (14), ceea ce arată că în codul K_p există, pentru fiecare β_j din γ, o linie α_i, care conține 1 în coloana p și care are 0 în toate coloanele din γ diferite de β_j și 1 în coloana β_j. Fie $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{2r}}$ liniile care conțin 1 în coloanele $\beta'_{j_1}, \beta'_{j_2}, \ldots, \beta'_{j_{2r}}$ și 0 în restul de coloane ale lui γ.

Atunci

$$\alpha_{i_1} \oplus \alpha_{i_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i_{2r}} \oplus \alpha_i$$

nu conține 1 în nici una dintre coloanele cuprinse în γ deși are 1 în coloana p și este un implicant prim al lui F sau se include într-un astfel de implicant prim, ceea ce contrazice implicațiile (14). Deci γ verifică relația (12) respectiv (10).

Întrucît γ a fost ales arbitrar, rezultă că orice implicant prim al lui F^* verifică relația (10). Apoi, deoarece orice linie a codului K_p^* este o combinație liniară de implicanți primi ai lui F^*, se obține relația (10), ceea ce demonstrează lema.

1.5. Ținînd seama de lema 2 și de definiția 3 se obține :

TEOREMA 1. *Dacă unei funcții booleene F i se asociază un cod grupal K_p, atunci funcției duale F^* i se asociază de asemenea un cod grupal K_p^*.*

Demonstrație. Din lema 2 rezultă că orice linie a codului K_p^* verifică relația (10) și deoarece s-a arătat că orice produs care verifică relația (10) și conține variabila p este un implicant al lui F^*, rezultă că orice linie a codului K_p^*, care conține 1 în coloana p, este un implicant prim al lui F^* sau se include într-un astfel de implicant prim, ceea ce, avînd în vedere definiția 3, demonstrează teorema.

Inversînd rolurile funcțiilor F și F^* se obține următoarea lemă duală lemei 2.

LEMA 3. *Dacă funcției booleene F^* i se asociază un cod grupal K_p^* și dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt coloanele codului K_p^* iar $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{il})$ $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1$, sînt liniile codului K_p generat de F, atunci există relațiile*

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} \beta_j = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1 \tag{15}$$

Or, întrucît dacă uneia măcar dintre funcțiile F sau F^* i se asociază un cod grupal, atunci și celeilalte i se asociază un cod grupal, rezultă că relațiile (10) și (15) au loc în același timp.

1.6. DEFINIȚIE. Numim coduri duale, codurile grupale K_p și K_p^* asociate funcțiilor booleene duale F și F^*.

LEMA 4. *Dacă K_p și K_p^* sînt coduri duale, între liniile acestora există relațiile*

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} \gamma_{kj} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \end{matrix} \tag{16}$$

Demonstrație. Relațiile (16) se obțin imediat din (10) sau (15). Într-adevăr, relațiile (10) și (15) sînt relații vectoriale, iar (16) reprezintă tocmai componentele vectorilor respectivi.

1.7. TEOREMA 2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un cod grupal K să admită un cod dual K^* este dată de condiția ca ecuațiile (15) să aibă soluție, unde $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{il})$ sînt liniile codului K iar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sînt variabile booleene asociate coloanelor codului K. Găsirea liniilor codului K^* se reduce la rezolvarea unui sistem de $m-1$ ecuații cu l necunoscute.*

Demonstrație. Condiția este necesară, după cum rezultă din lema 3 și din definiția codurilor duale.

Să demonstrăm suficiența condiției. Presupunem că ecuațiile (15) admit soluție și fie $(\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_l^k)$ una dintre soluții pe care s-o notăm $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{kl})$, unde $\gamma_{kl} = 1$ dacă $\beta_j^k = 1$ și $\gamma_{kj} = 0$ dacă $\beta_j^k = 0$. Apoi înlocuind γ_k în (15), obținem (16) și deci dacă γ_k și γ_r sînt două soluții ale lui (15), avem și

$$\gamma_k \oplus \gamma_r = \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} (\gamma_{kj} \oplus \gamma_{rj}) = 0, \tag{17}$$

adică $\gamma_k \oplus \gamma_r$ este de asemenea o soluție, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

Partea a doua a teoremei rezultă din faptul că codul K este grupal și că este generat de $m-1$ dintre liniile sale.

Sîntem acum în măsură să dăm definiția codurilor duale independente de funcțiile booleene care le generează.

1.8. DEFINIȚIA 5. Spunem că două coduri grupale sînt duale dacă între liniile lor există relațiile (16).

Fie K un cod grupal și $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ variabile booleene asociate coloanelor lui K. Să notăm cu F_β funcția booleană obținută ca sumă a produselor de forma (4) corespunzătoare liniilor codului K în care în coloana β se află 1, după ce s-a înlăturat β din aceste produse. Funcția F_β poate fi interpretată ca funcția de lucru a unui dipol D_β, variabila β jucînd rolul variabilei p din aliniatele precedente.

Dacă scriem liniile codului K sub forma (4), atunci suma liniilor lui K se poate scrie sub forma

$$F = \sum_{j=1}^{l} \beta_j F_{\beta_j} \tag{18}$$

unde F_{β_j} este, pentru fiecare j, funcția de lucru a unui dipol D_{β_j} ai cărui poli sînt nodurile la care este conectat β_j.

DEFINIȚIA 6. Dacă F_{β_j}, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt funcțiile de lucru ale l subdipoli ai unui multipol dat, atunci funcția F definită de relația (18) o vom numi funcția de lucru a multipolului respectiv.

Observație. Implicațiile $F=1$ și $F=0$, în cazul multipolilor, nu mai are semnificația din cazul dipolilor, întrucît nu mai au sens noțiunile „multipolul conduce" sau „multipolul nu conduce". Astfel, implicația $F = 1$ arată că cel puțin un subdipol al multipolului conduce, iar $F = 0$ arată că nici măcar un subdipol al multipolului nu conduce.

De asemenea, operația de dualitate în cazul multipolilor se face deosebit de cazul dipolilor.

DEFINIȚIA 7. Dacă F este funcția de lucru a unui multipol căruia i se asociază un cod grupal K, atunci duala F^* a lui F este dată de suma liniilor codului K^*, dualul lui K.

TEOREMA 3. *Dacă funcția de lucru F a unui multipol căruia i se asociază un cod grupal este dată de relația (18), atunci F^*, duala lui F, este dată de relația :*

$$F^* = \sum_{j=1}^{l} \beta_j F^*_{\beta_j} \tag{19}$$

Demonstrație. Fie F_{β_j} funcția de lucru a dipolului D_{β_j} și K_{β_j} codul grupal asociat lui F_{β_j}. Codul grupal K_{β_j} este inclus în K sau este egal cu acesta. Dar atunci, avînd în vedere teorema 1, codul $K^*_{\beta_j}$, dualul lui K_{β_j}, este grupal și este generat de β_j, $F^*_{\beta_j}$ și deci este inclus în codul K^*.

Apoi, deoarece β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, parcurge întreaga mulțime de variabile a lui F, codurile K_{β_j} vor conține toate liniile codului K și deci codurile $K^*_{\beta_j}$ vor conține toate liniile codului K^*, adică funcția F^* dată de relația (19) generează codul K^*, ceea ce demonstrează teorema.

II

2.1. În capitolul precedent ne-am ocupat de problema asocierii de coduri grupale funcțiilor de lucru a multipolilor.

Se poate verifica cu ușurință că nu orice funcție de lucru admite un cod grupal.

În acest capitol vom da un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcțiile de lucru în coduri grupale.

2.2. Fie V_l spațiul vectorial l-dimensional peste corpul $z/2$ generat de vectorii 1, 2, $2^2, \ldots, 2^{l-1}$.

Punînd în corespondență biunivocă vectorului 2^k, l-punctul $(0, 0, \ldots, \underbrace{0, 1,}_{k+1} 0, \ldots, 0)$ din corpul B_l, care are toate coordonatele nule în afară de cea de ordin $k + 1$, se stabilește un izomorfism între spațiul V_l și B_l. Apoi, ținînd seama de teorema 1, izomorfismul se extinde la spațiul A_l al produselor de l variabile booleene.

Fie α_{2^i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, linii ale unui cod K astfel încît cele m linii să constituie o bază care generează pe K.

DEFINIȚIA 8. Numim rang al coloanei β_j în codul grupal K generat de liniile α_{2^i}, numărul dat de expresia :

$$\nu_j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i, j}\, 2^{m-i-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l \tag{21}$$

Similar vom introduce, pentru codurile duale K^*, rangurile :

$$\mu_j = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{2^k, j}\, 2^{n-k-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l \tag{22}$$

Introducînd în relațiile (10) și (15) rangurile ν_j respectiv μ_j, în locul variabilelor β_j, și ținînd seama de (16), obținem relațiile :

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \gamma_{kj}\, \nu_j = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \tag{23}$$

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \alpha_{ij}\, \mu_j = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1. \tag{24}$$

Observație. Rangurile ν_j și μ_j puteau fi aflate prin însumare la întreaga mulțime de linii ale codurilor K și K^*, nu numai la cîte o bază a acestor coduri, dar în acest caz s-ar fi obținut ranguri prea mari. În orice caz, relațiile (23) și (24) ar fi existat și în acest caz.

Din teorema 2 și din corespondența între relațiile (10) și (15) cu (23) respectiv (24) se obține :

TEOREMA 4. *Condiția necesară și suficientă pentru ca două coduri K și K^* pentru care se definesc rangurile coloanelor conform lui (21) și (22) să fie duale este dată de îndeplinirea uneia oricare dintre relațiile (23) și (24).*

2.3. Sîntem în măsură acum să dăm un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcțiile de lucru în coduri grupale, astfel :

1. Se scriu F și F^* ca reuniuni a tuturor implicanților lor primi și apoi se calculează rangurile ν_j și μ_j ale variabilelor, dînd în mod arbitrar implicanților primi ai lui F și F^* ponderile 1, 2, $2^2, \ldots, 2^k, \ldots$ și aplicînd relațiile (21) și (22).

Observație. Variabilele x și $\bar{x}$ se consideră diferite și li se asociază coloane diferite în codurile grupale asociate.

2. Se calculează expresiile :

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \gamma_{kj}\, \nu_j = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \tag{25}$$

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \alpha_{ij}\, \mu_j = q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^m - 1. \tag{26}$$

Dacă funcțiile F și F^* li se asociază coduri grupale, atunci $p_k = 0$, $q_i = 0$, oricare ar fi k și i. Dacă măcar un $p_k \neq 0$ și un $q_i \neq 0$, atunci se introduc variabile suplimentare în modul următor :

Presupunem că am calculat (26). Se consideră toți $q_i \neq 0$ și aceștia se renumerotează primind indici de forma $l + 1$, $l + 2, \ldots l + s$, astfel încît toți q_i egali între ei să primească același indice. Fie q_{l+1}, $q_{l+2}, \ldots$

$\ldots, q_{l+s}$ diferiți între ei. Se asociază lui q_{l+r} o variabilă y_r care va apare în toți implicanții funcției F pentru care $q_i = q_{l+r}$. Apoi dacă

$$q_{l+r} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{2k,\, l+r}\, 2^{n-k-1},$$

y_r va apare în toți implicanții funcției F^* pentru care $\gamma_{2k,\, l+r} = 1$.

Dacă F și F^* depind de variabilele $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ prin adăugarea variabilelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ în modul arătat mai sus, aceste funcții se vor transforma în niște funcții Φ și Φ^* care depind de $l + s$ variabile:

$$\Phi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_s)$$

$$\Phi^*\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_s)$$

pe care le vom numi funcțiile extinse ale lui F respectiv F^*.

Funcția Φ conține reuniunea implicanților primi ai lui F completați cu $y_1, y_2, \ldots, y_s$ ca mai sus, la care se adaugă combinațiile liniare ale acestor implicanți; analog se obține Φ^* din F^*.

Pentru anume valori particulare ale necunoscutelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ în funcție de necunoscutele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ unele dintre aceste valori putînd fi constantele 0 și 1, funcțiile Φ și Φ^* se reduc la F respectiv F^*.

Teorema 5. *Necunoscutele $y_1, y_2, \ldots, y_s$ se determină în funcție de necunoscutele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ rezolvînd ecuațiile*:

$$\Phi\overline{F} + \overline{\Phi}F = 0 \tag{27}$$

$$\Phi^*\overline{F}^* + \overline{\Phi}^*\, F^* = 0 \tag{28}$$

unde prin „—” am notat operația de negație a funcțiilor $\overline{F} = \overline{F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)}$.

Demonstrație. Egalitățile

$$\Phi = F, \tag{29}$$

$$\Phi^* = F^*, \tag{30}$$

ținînd seama de cele arătate în [1], Cap. X, § 9, sînt echivalente cu (27) respectiv (28).

Observație. Ecuațiile (27) și (28) sînt de aceeași formă și anume dacă notăm cu $\varphi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ partea stîngă a ecuației (27) și cu $\psi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ partea stîngă a ecuației (28), între φ și ψ există relația

$$\varphi\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1, y_2, \ldots, y_s) = \psi\ (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_l;\ \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s) \tag{31}$$

și deci orice soluție a ecuației (28) se obține dintr-o soluție a ecuației (27) în care schimbăm variabilele β_j și y_r prin $\overline{\beta}_j$ respectiv $\overline{y}_r$.

Evident, pentru aflarea necunoscutelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ este suficient să rezolvăm una oricare dintre ecuațiile (27) sau (28). În scopul introducerii unui număr minim de variabile suplimentare, vom înlătura din funcțiile extinse toate variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_s$ egale cu constante, egalîndu-le cu 0 respectiv cu 1, după caz.

Observație. Problema rezolvării ecuațiilor (27) și (28) se va trata într-o lucrare viitoare.

2.4. Fie Φ funcția extinsă a funcției F, după înlăturarea variabilelor suplimentare egale cu constante. Pornind de la această funcție se va construi un multipol M_Φ, folosind algoritmul dat în [3], pe care-l vom descrie, aici, pe scurt:

1. Se alege un implicant prim α_i, de lungime minimă, pe care să-l notăm α_1 și se atașază fiecărei variabile din α_1 rangul 1.

Convenim să scriem nodurile multipolilor sub forma:

$$\frac{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)}{(\beta_{\mu_1}, \beta_{\mu_2}, \ldots, \beta_{\mu_r})} \tag{32}$$

unde la numitor sînt scrise în ordine arbitrară variabilele conectate la nodul respectiv, iar la numărător rangurile respective.

Atunci lui α_1 i se asociază un multipol în care în fiecare nod apar două variabile, rangul fiecăreia fiind 1, deci un ciclu.

2. Dacă notăm cu S_k multipolul obținut în pasul k al procesului de iterație, implicantul prim α_{2k-1}, folosit în acest pas, va trebui să îndeplinească următoarele condiții:

i) Fiecare nod conține cel mult două variabile din α_{2k-1} și în general din oricare implicant prim al lui Φ.

ii) Fiecare variabilă din α_{2k-1} apare în două și numai în două noduri ale lui S_k.

Nodurile multipolului S_{k-1} le împărțim în 3 clase, C_1, C_2, C_3, referitoare la α_{2k-1}, astfel: în clasa C_1 includem nodurile din S_{k-1}, care nu conțin nici o variabilă din α_{2k-1}, în clasa C_2 includem nodurile lui S_{k-1} care conțin două variabile din α_{2k-1} și în clasa C_3 nodurile care conțin o singură variabilă din α_{2k-1}.

Dacă μ^{k-1} este rangul variabilei β_μ în multipolul S_{k-1}, calculăm rangul μ^k al variabilei β_μ în multipolul S_k, folosind, relația [3]:

$$\mu^k = 2\mu^{k-1} + \alpha_{2k-1,\,\mu}. \tag{33}$$

Evident, în fiecare pas al iterației trebuie să fie indeplinită relația (24). Se verifică ușor că în clasele C_1 și C_2 această relație se păstrează după transformarea (33) a rangurilor, deoarece în clasa C_1 rangurile se dublează, iar în clasa C_2 rangurile se dublează și apoi la un număr par dintre acestea se adaugă 1. În nodurile din clasa C_3, după dublarea rangurilor, se adaugă 1 la unul singur dintre ranguri. Pentru restabilirea relației (24) în nodurile din clasa C_3, în pasul k al iterației, se adaugă cîte o variabilă nouă din α_{2k-1}, cu ponderea 1.

Se poate demonstra ușor că variabilele care au ranguri egale sînt conectate, fiecare în parte, la cel puțin un nod binar, înțelegînd prin noduri binare, nodurile care conțin numai două variabile.

3. Dacă într-un pas oarecare k al iterației apare 1 în mai multe noduri decît de două ori, numărul variabilelor noi cuprinse în α_{2k-1}, prin permutări corespunzătoare ale variabilelor care apar în noduri binare, se poate înlătura acest inconvenient. Dacă acest lucru nu se întîmplă, funcția Φ se realizează prin scheme cu repetiție.

Se caută variabilele care se repetă, printre variabilele lui α_{2k-1}, care apar de două ori în nodurile ce conțin 1, sau se adaugă variabile noi în α_{2k-1}.

Înlocuind apoi în α_{2k-1} variabilele care se repetă cu litere noi, se reduce numărul de noduri în care apare 1 la numărul dorit.

Procesul încetează cînd fiecare variabilă apare în cel puțin un S_k și cînd adăugarea de noi implicanți ai lui Φ nu mai conduce la apariția lui 1. Acest lucru se întîmplă în urma folosirii unui sistem maximal de implicanți primi liniar independenți ai lui Φ.

În multipolul S_k obținut în ultimul pas al iterației se înlocuiesc variabilele suplimentare cu variabilele inițiale corespunzătoare, sau se înlocuiesc unele variabile cu constante, dacă e cazul, și se obține multipolul M_Φ căutat, în general nu în mod unic.

Exemplu :

$$F = ac + b\bar{d} + axd$$

$$F^* = ab + cd + ad + bxc.$$

Asociem implicanților primi ai lui F^* ponderi : $pab \Leftrightarrow 1$, $pcd \Leftrightarrow 2$, $pad \Leftrightarrow 4$, $pbxc \Leftrightarrow 8$ și calculăm rangurile variabilelor : $\mu_a = 5$, $\mu_b = 9$, $\mu_c = 10$, $\mu_d = 6$, $\mu_x = 8$, $\mu_p = 15$.

Înlocuind rangurile găsite în relațiile (24), obținem succesiv :

$$acp \Rightarrow \mu_a \oplus \mu_c \oplus \mu_p = 5 \oplus 10 \oplus 15 = \Phi$$

$$bpd \Rightarrow \mu_b \oplus \mu_d \oplus \mu_p = 9 \oplus 6 \oplus 15 = 0$$

$$axdp \Rightarrow \mu_a \oplus \mu_x \oplus \mu_d \oplus_p \mu = 5 \oplus 8 \oplus 6 \oplus 15 = 4 = \alpha$$

și funcția extinsă a lui F va fi :

$$\Phi = ac + b\bar{d} + ax\alpha d + bx\alpha c.$$

Apoi din egalitatea

$$\Phi = F \text{ sau } \bar{\Phi}F + \Phi\bar{F} = 0$$

ținînd seama că :

$$\bar{\Phi} = \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d}\bar{x} + \bar{a}\bar{d}\bar{\alpha} + \bar{b}\bar{c}\bar{a} + \bar{b}\bar{c}\bar{\alpha}$$

și

$$F = \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{x}\bar{c}$$

se obține mai departe :

$$(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d}\bar{x} + \bar{a}\bar{d}\bar{\alpha} + \bar{b}\bar{c}\bar{x} + \bar{b}\bar{c}\bar{\alpha})(ac + bd + axd) +$$

$$+ (ac + bd + ax\alpha d + bx\alpha c)(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{x}\bar{c}) =$$

$$= a\bar{b}\bar{c}dx\bar{\alpha} + \bar{a}bc\bar{d}x\alpha = 0$$

sau simplificînd cu x se obține :

$$a\bar{b}\bar{c}d\bar{\alpha} + \bar{a}bc\bar{d}\alpha = 0$$

Deoarece

$$a\bar{b}\bar{c}d \cdot \bar{a}bc\bar{d} = 0,$$

ecuația precedentă are soluție și ne dă pe α de forma :

$$\alpha = \overline{\bar{a}bc\bar{d}} + a\bar{b}\bar{c}d = a + \bar{b} + \bar{c} + d$$

obținîndu-se patru soluții la care corespund schemele din figurile 1—4.

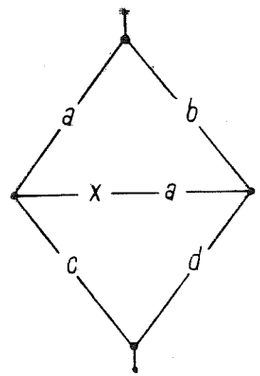


Fig. 1

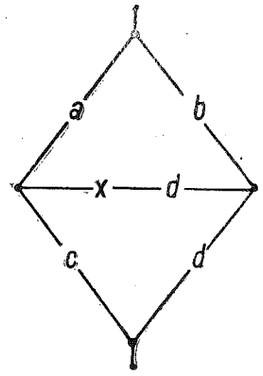


Fig. 2

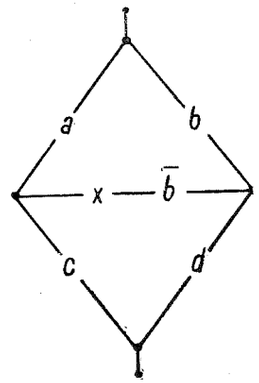


Fig. 3

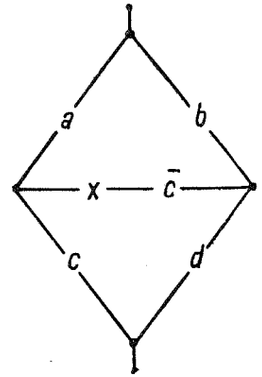


Fig. 4

Primită la redacție la 1 martie 1966

Comitetul de Stat al Planificării

BIBLIOGRAFIE

1. GARRETT BIRKHOFF, *Lattice theory*. New York, 1948.
2. ION MUNTEAN, *Contribuții la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte și relee* (I). St. cerc. mat., **15**, *4* (1964).
3. ION MUNTEAN, *Contribuții la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte și relee* (II). St. cerc. mat., **18**, *1* (1966).