ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA — FILIALA DIN CLUJ
INSTITUTUL DE CALCUL

Nr. 16

CALCUL PRACTIC

Ciclu de conferinţe ţinute la AGIR în anul 1949

de

Prof. univ. TIBERIU POPOVICIU

CLUJ
15. VI. 1966

don. Șt. BERȚI

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
FILIALA CLUJ
INSTITUTUL DE CALCUL

Nr. 16

C A L C U L P R A C T I C

Ciclu de conferinţe ţinute la AGIR în anul 1949

de

TIBERIU POPOVICIU

C L U J
15. VI. 1966

S U M A R

Pag.

1. Aproximaţie şi interpolaţie 3
2. Cuadraturi aproximative 2o
3. Ortogonalitate. Polinoame ortogonale 36
4. Aproximare în medie patratică.
   Metoda celor mai mici patrate..... 45
5. Completări şi indicaţii bibliografice.... 53

C A L C U L P R A C T I C [1]

1. Aproximaţie şi interpolaţie

1.- De obicei cînd într-o problemă practică intervine o funcţie f(x), care depinde, de ex., de valorile lui x cuprinse într-un interval [a,b], nu avem pentru această funcţie o expresie simplă care să permită calculul uşor al valorii ei exacte pentru orice valoare a variabilei x. În asemenea cazuri se înlocuieşte funcţia f(x) printr-o altă funcţie $\varphi(x)$, de o formă suficient de simplă, ale cărei valori să se preteze uşor la calculele numerice. Pentru o valoare x_0 a lui x, $\varphi(x_0)$ va fi atunci o valoare aproximativă a lui $f(x_0)$. Grafic, procedeul revine la a înlocui curba $y=f(x)$ cu o altă curba $y = \varphi(x)$, a cărei construire să fie posibilă în mod simplu şi cu o suficientă precizie.

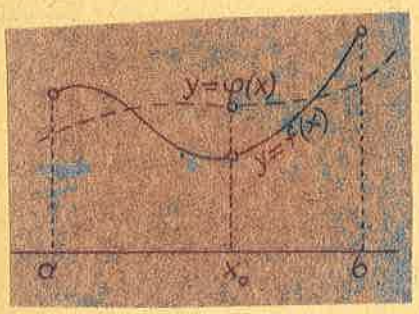


Fig.1

In calculele practice, în afară de simplicitatea funcţiei $\varphi(x)$, care înlocuieşte funcţia dată f(x), ceea ce ne interesează este mărimea erorii $f(x) - \varphi(x)$, care se comite prin această înlocuire. Ne va interesa, în particular, nu atît valoarea exactă a acestei erori, cît mai cu seamă dacă ea rămîne sau nu cuprinsă între anumite limite date. Aceste limite ne sînt impuse de precizia cerută în calculele numerice din problema respectivă. O primă indicaţie ne-o dă orice număr pozitiv ε,

---

1) Conferinţe ţinute la AGIR în anul 1949. Aceste conferinţe sînt publicate aici fără nici o modificare. Unele rezultate inedite au fost ulterior completate şi precizate.

dacă ştim că valoarea absolută a erorii rămîne mai mică decît acest număr şi aceasta,pentru toate valorile lui x cuprinse în intervalul [a,b].

Dacă deci putem demonstra că pentru orice valoare a lui x din intervalul [a,b], inegalitatea

(1) $$| f(x) - \varphi(x) | < \varepsilon$$

e satisfăcută, funcţia $\varphi(x)$ poate servi pentru calculul aproximativ al lui f(x) cu preciziunea cerută.

2.- Funcţia $\varphi(x)$ se poate numi în general o <u>funcţie de aproximare</u> a lui f(x). Dacă notăm cu R(x) diferenţa $f(x) - \varphi(x)$, putem scrie

(2) $$f(x) = \varphi(x) + R(x).$$

Avem atunci o <u>formulă de aproximare</u> a funcţiei f(x),iar R(x) este <u>restul</u> acestei formule .

Pentru a vedea dacă inegalitatea (1) subsistă,trebue să studiem restul R(x) . O alegere convenabilă a funcţiei de aproximare $\varphi(x)$ va permite în general să delimităm pe $| R(x) |$ astfel ca inegalitatea (1) să fie satisfăcută.

În rezumat, pentru ca o formulă de aproximare (2) să fie utilizabilă în calculele practice, se alege funcţia de aproximare $\varphi(x)$ de o formă particulară comodă, cum ar fi de ex., un polinom, o linie poligonală, un polinom trigonometric, etc. Această alegere fiind făcută, diferite indicaţii care le avem asupra funcţiei f(x) ne vor permite delimitarea restului R(x). Asemenea indicaţii asupra funcţiei f(x) rezultă de obicei din relaţiile teoretice la care satisface această funcţie. Dacă de ex., ştim că f(x) satisface o ecuaţie diferenţială de forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

şi dacă ştim că funcţia F(x,y) rămîne cuprinsă între două limite fixe, funcţia f(x) are o derivată care rămîne cuprinsă între aceste limite.

Vom examina mai jos restul în cîteva formule de aproximare.

3.- Cele mai avantoase funcţii de aproximare sînt polinoamele, căci acestea sînt cele mai simple funcţii atît din punct de vedere teoretic cît şi practic [1]. Vom examina deci cîteva probleme de aproximare prin polinoame cari se utilizează în practică.

O formulă clasică de aproximare este bine cunoscută formulă a lui TAYLOR, care se obţine dacă luăm ca polinom de aproximare polinomul

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

unde c este un punct din intervalul [a,b], iar f'(x), f''(x),... sînt derivatele succesive ale funcţiei f(x).

În Analiza matematică se demonstrează că restul formulei de aproximare corespunzătoare

$$f(x) = T_n(x) + R(x) \tag{3}$$

se poate pune, de ex., sub forma [2]

$$R(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta), \tag{4}$$

unde Θ este un număr cuprins între x şi c.

Dacă ştim că există un număr pozitiv M astfel ca să avem $|f^{(n+1)}(x)| < M$, pentru orice x cuprins în intervalul [a,b] şi dacă luăm $c = \frac{a+b}{2}$, din (4) deducem imediat că

$$|R(x)| < \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} M. \tag{5}$$

Marele desavantaj al formulei de aproximare (3) este că polinomul $T_n(x)$ nu depinde decît de valorile funcţiei f(x) şi ale derivatelor sale pe punctul c, deci numai de valorile funcţiei f(x) din imediata apropiere a punctului c. Din această cauză, $T_n(x)$ va diferi în general

prea mult de f(x) din moment ce ne îndepărtăm suficient de punctul c
Din această cauză formula lui TAYLOR rar serveşte pentru calculul aproximativ al funcţiei f(x).

4.- Pentru a înlătura dificultatea de mai sus se întrebuinţează, în loc de polinomul $T_n(x)$, alte polinoame de aproximare şi, în special aşa zisele <u>polinoame de interpolare</u>.

Să considerăm, în intervalul [a,b], n+1 puncte

(6) $$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Există atunci un polinom P(x), de grad cel mult egal cu n, care ia pe punctele (6) aceeaşi valoare ca şi funcţia f(x), astfel deci ca

(7) $$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Aceste condiţii determină complet polinomul P(x), în ipoteza că gradul său nu întrece numărul n [3].

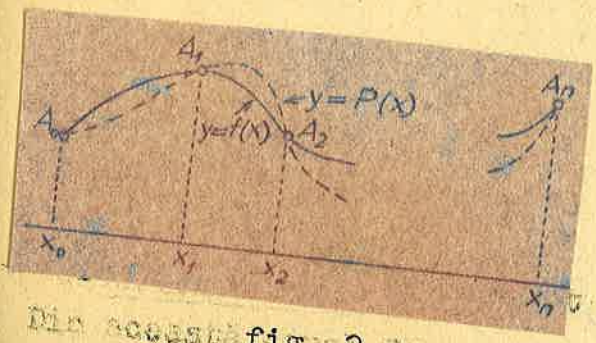


fig. 2.

Polinomul P(x) este atunci un <u>polinom de interpolare</u> al funcţiei f(x), deoarece ne dă valorile lui f(x) pe punctele intermediare, cuprinse între punctele (6). Punctele (6) se mai numesc şi <u>nodurile</u> de interpolare corespunzătoare.

Grafic, este de prevăzut că restricţia ca curba $y = P(x)$ să treacă prin punctele reprezentative $A_0, A_1, \ldots$ ale funcţiei f(x), corespunzătoare nodurilor, va constrînge această curbă să se apropie peste tot de curba $y = f(x)$ şi anume cu atît mai mult, cu cît nodurile de interpolare vor fi mai dese în intervalul [a,b].

Interpolaţia serveşte la determinarea aşa ziselor funcţii

empirice, care sînt cunoscute numai pentru anumite valori (6) ale variabilei x. Valorile funcţiei pe punctele (6) se calculează de obicei experimental. Interpolarea permite atunci să completăm, sau cum se mai zice, să prelungim funcţia pe intervalele parţiale determinate de punctele (6). Polinomul P(x) fiind definit pentru toate valorile (reale) ale lui x, el prelungeşte funcţia şi în afară de aceste intervale şi anume prin extrapolare. Aceste valori aproximative pentru f(x) sînt însă în general mult mai puţin bune. Polinomul $T_n(x)$ este un caz particular al polinomului P(x) şi anume atunci cînd toate cele n+1 noduri se confundă într-un singur punct c. Toate valorile aproximative ale funcţiei f(x), în afară de punctul c, se obţin de fapt prin extrapolare.

Pentru a calcula efectiv polinomul de interpolare P(x), LAGRANGE îl pune sub forma următoare [4],

$$(8) \qquad P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x),$$

unde $L_0(x)$, $L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sînt nişte polinoame de gradul n [5], convenabile şi independente de funcţia f(x).

Formulele (7) ne arată imediat că

$$L_i(x_i) = 1, \quad L_i(x_k) = 0,$$

$$k = 0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n, \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

de unde deducem imediat că

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$i = 0,1,\ldots,n .$$

Pentru a prescurta formulele, fie

$$(9) \qquad \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

polinomul de gradul n+1, cu primul coeficient 1 şi care are ca rădăcini tocmai nodurile de interpolare. Atunci putem scrie

$$L_i(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_i} \cdot \frac{1}{\omega'(x_i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

şi găsim deci, în definitivy

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} \cdot \frac{\omega(x)}{x-x_i}, \tag{1o}$$

de unde rezultă <u>formula de interpolare a lui LAGRANGE</u> ,

$$f(x) = \Sigma \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} \cdot \frac{\omega(x)}{x-x_i} + R(x) . \tag{11}$$

5.- Evaluarea restului în formula (11) se poate face în felul următor. Dacă punem acest rest sub forma

$$R(x) = A\,\omega(x),$$

atunci formula (11) determină complet pe A pentru o valoare dată a lui x (diferită de un nod). Funcţia auxiliară

$$F(z) = f(z) - P(z) - A\,\omega(z)$$

se anulează atunci pentru următoarele valori ale lui z,

$$x_o,\ x_1,\ \ldots,x_n,\ x. \tag{12}$$

Însă, o consecinţă imediată a cunoscutei teoreme a lui ROLLE ne arată că dacă o funcţie se anulează pe n+2 puncte dintr-un interval, derivata sa se anulează pe cel puţin n+1, derivata sa a doua pe cel puţin n,..., derivata sa de ordinul i pe cel puţin n+2-i..., şi în fine derivata sa de ordinul n+1 pe cel puţin 1 punct din acest interval (mai precis din cel mai mic interval care conţine cele n+2 rădăcini ale funcţiei). Aplicînd această proprietate funcţiei F(z), vedem că putem găsi un număr Θ cuprins în cel mai mic interval care conţine punctele (12), astfel ca $F^{(n+1)}(\Theta) = 0$. Avem însă

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - (n+1)!A$$

şi făcînd z = Θ , deducem

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} .$$

În definitiv deci, restul în formula lui LAGRANGE este

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}\omega(x) , \tag{13}$$

unde Θ este cuprins în intervalul $[a,b]$.

Dacă $|f^{(n+1)}(x)| < M$ (M independent de x) pentru orice x din intervalul $[a,b]$ şi dacă α este cea mai mare valoare a lui $|\omega(x)|$ cînd x parcurge acest interval, egalitatea (13) ne dă

$$|R(x)| < \frac{\alpha}{(n+1)!} M. \tag{14}$$

6.- Valoarea constantei α depinde de nodurile de interpolare. Cea mai mică valoare a lui α va fi obţinută atunci cînd maximul lui $|\omega(x)|$ din intervalul $[a,b]$ va fi cel mai mic posibil. Determinarea minimului lui α este una din importantele probleme rezolvate de P.L. CEBÎŞEV în teoria polinoamelor de cea mai bună aproximaţie, creeată de el [6]. CEBÎŞEV a arătat că pentru aceasta trebue să luăm

$$\omega(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos (n+1)[\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}]$$

şi atunci

$$\alpha = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} ,$$

iar nodurile de interpolare devin

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\frac{2i+1}{(n+1)}\pi, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{15}$$

Nodurile fiind astfel alese, delimitarea restului este

$$|\ R(x)\ | < \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} M.$$

Comparînd cu formula (5), se vede că polinoamele de interpolare, cel puţin teoretic, duc la o mai bună aproximare decît formula lui TAYLOR.

7.- Delimitarea restului în formula de interpolare a lui LAGRANGE depinde de delimitarea valorii absolute a derivatei de

ordinul n+1 a funcţiei. Să presupunem însă că funcţia verifică o ipoteză mai generală decît derivabilitatea şi anume că există o constantă K astfel ca

$$|f(x') - f(x'')| < K|x' - x''| , \tag{16}$$

oricare ar fi x', x'' din intervalul [a,b]. O astfel de funcţie se zice că verifică condiţia lui LIPSCHITZ. O funcţie care verifică o astfel de condiţie este totdeauna continuă, însă poate să nu admită derivată pe orice punct al intervalului [a,b]. Pentru funcţiile continue condiţia lui LIPSCHITZ este restrictivă, aşa că o funcţie poate să fie continuă fără ca să verifice o condiţie de forma (16). Dacă însă o funcţie f(x) are o derivată continuă pe intervalul [a,b], ea verifică condiţia lui LIPSCHITZ (16) pe acest interval, iar derivata f'(x) nu poate să întrecă în valoare absolută constanta K. Clasa funcţiilor care verifică o condiţie a lui LIPSCHITZ conţine, în particular, funcţiile a căror reprezentare grafică este o linie poligonală (cu un număr finit de vîrfuri).

Fie polinomul de interpolare (1o). Dacă funcţia se reduce la 1 pe intervalul [a,b], avem P(x) = 1 (mai general avem P(x) = f(x), dacă f(x) este un polinom de gradul n [7]). Deducem deci

$$1 = \sum_{o}^{n} \frac{1}{\omega'(x_i)} \cdot \frac{\omega(x)}{x-x_i}$$

şi, ţinînd seamă de această formulă,

$$R(x) = f(x) - P(x) = \sum_{i=o}^{n} \frac{f(x) - f(x_i)}{\omega'(x_i)} \cdot \frac{\omega(x)}{x-x_i} .$$

Avem deci

$$|R(x)| < \sum_{i=o}^{n} \left| \frac{f(x)-f(x_i)}{\omega'(x_i)} \right| \cdot \left| \frac{\omega(x)}{x-x_i} \right| .$$

Dacă f(x) verifică condiţia lui LIPSCHITZ (16), avem

$$|R(x)| < \sum_{i=0}^{n} \frac{K|x-x_i|}{|\omega'(x_i)|} \cdot \frac{|\omega(x)|}{|x-x_i|},$$

sau

$$|R(x)| < K\beta|\omega(x)| \leq K\beta\alpha, \tag{17}$$

unde

$$\beta = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{|\omega'(x_i)|}. \tag{18}$$

Este inutil să ne oprim mai mult asupra cazului general (8) şi vom considera deci cîteva cazuri particulare.

8.- Fie, în particular, n=1 şi să luăm ca noduri de interpolare chiar extremităţile a, b ale intervalului. Polinomul de interpolare este atunci

$$P(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Sîntem aici în cazul <u>interpolaţiei liniare</u>, cînd curba $y = f(x)$ este înlocuită cu dreapta care leagă punctele A şi B, corespunzătoare absciselor a şi b.

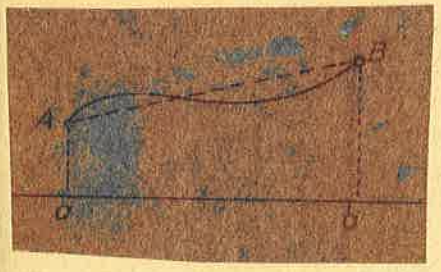


fig.3

Restul R(x) în formula de interpolare corespunzătoare se obţine calculînd pe α şi β. Avem

$$\alpha = \max |\omega(x)| = \max |(x-a)(x-b)| = \frac{(b-a)^2}{4},$$

iar

$$\beta = \frac{2}{b-a}.$$

Avem deci

$$|R(x)| < \frac{(b-a)^2}{8} M. \tag{19}$$

dacă $|f''(x)| < M$ şi

$$|R(x)| < \frac{b-a}{2} K, \tag{2o}$$

dacă f(x) verifică condiţia lui LIPSCHITZ (16).

Să considerăm şi cazul n=2, luînd ca noduri de interpolare punctele a,b şi mijlocul $\frac{a+b}{2}$ al intervalului [a,b].

Polinomul de interpolare este atunci

$$P(x) = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-a)(b-x) + f(b)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

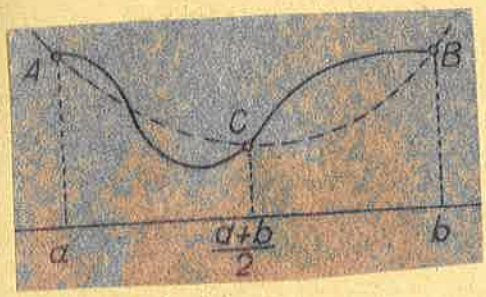


fig.4.

Sîntem aici în cazul <u>interpolaţiei parabolice</u>, cînd curba y = f(x) este înlocuită cu parabola avînd axa verticală şi trecînd prin punctele reprezentative A, B, C, corespunzătoare absciselor a, b, $\frac{a+b}{2}$. Un calcul simplu ne arată atunci că

$$\alpha = \max\left|(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{3}}, \quad \beta = \frac{8}{(b-a)^2}$$

Avem deci

$$|R(x)| < \frac{2(b-a)}{3\sqrt{3}} K,$$

dacă f(x) verifică condiţia LIPSCHITZ (16).

9.- Întrebuinţarea polinomului de interpolare P(x) sub forma (1o) prezintă inconveniente în calculele numerice. Este deci util să se pună acest polinom sub o formă mai comodă în practică. Acest lucru se obţine scriind polinomul de interpolare sub forma

$$(21) \qquad P(x) = \lambda_o + \sum_{i=o}^{n} \lambda_1(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}).$$

Coeficienţii $\lambda_o, \ldots \lambda_n$ se determină atunci printr-un procedeu simplu şi anume cu ajutorul <u>calculului cu diferenţe</u>.

Este inutil să considerăm aici cazul general cînd nodurile de interpolare sînt distribuite într-un mod oarecare în intervalul [a,b].

În calculele numerice este important ca nodurile de interpolare să fie şi ele cît mai simple. Noduri, cum ar fi cele date de formulele (15), conduc la dificultăţi de calcul din cauza numerelor $\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi$, care sînt în general iraţionale. E adevărat că aceste numere se pot calcula odată pentru totdeauna, dar în practică e mai avantajos să întrebuinţa, de ex., noduri echidistante. Dacă de ex. x reprezintă timpul, iar f(x) un rezultat numeric experimental, ne dăm mult mai bine seama de mersul general al fenomenului dacă experienţele se fac la intervale de timp egale.

Să presupunem deci că nodurile de interpolare (6) sînt punctele care împart intervalul [a,b] în n părţi egale. Avem

$$x_i = a+ih, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

În acest caz polinomul (21) devine polinomul de interpolare al lui NEWTON,

$$(22) \quad N_n(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(i-1)h).$$

1o.- Pentru calcularea coeficienţilor λ_i în polinomul de interpolare pus sub forma (22), introducem <u>diferenţele divizate</u> succesive ale funcţiei f(x),

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\Delta^2 f(x) = \frac{\Delta f(x+h) - \Delta f(x)}{h},$$

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^{i+1}(x) = \frac{\Delta^i f(x+h) - \Delta^i f(x)}{h},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Deducem atunci, printr-un calcul simplu

$$\Delta N_n(x) = \lambda_1 + 2\lambda_2(x-a) + 3\lambda_3(x-a)(x-a-h)+\ldots$$

$$\Delta^2 N_n(x) = 2!\lambda_2 + 3.2\lambda_3(x-a) + 4.3\lambda_4 (x-a)(x-a-h) +\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^i N_n(x) = i!\lambda_i + (i+1)i\ldots 2\lambda_{i+1}(x-a) + (\text{termeni care au pe } x-a \text{ ca factor}),$$

. . . . . .

Pentru a obţine aceste formule, ne bazăm pe proprietatea importantă a diferenţelor, care ne spune că diferenţa unei sume este egală cu suma diferenţelor termenilor sumei. Dacă facem $x=a$, deducem

$$\lambda_i = \frac{1}{i!}\Delta^i N_n(a), \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

unde , pentru simplificare, punem $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

Dacă ţinem seama de formulele (7), care în cazul nostru devin

$$N_n(a+ih) = f(a+ih), \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

obţinem

$$\Delta^i N_n(a) = \Delta^i f(a), \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

deci

$$\lambda_i = \frac{1}{i!}\,\Delta^i f(a), \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

şi polinomul de interpolare (22) devine

$$N_n(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i f(a)}{i!}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(i-1)h) \quad (24)$$

Coeficienţii acestui polinom de interpolare se obţin uşor, întrucît formulele (23) permit să calculăm prin operaţii sistematice simple tabloul diferenţelor

$f(a)$				
	$\Delta f(a)$			
$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$		
	$\Delta f(a+h)$			
$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$		
⋮	$\Delta f(a+2h)$		⋱	
	⋮			$\Delta^n f(a)$
$f(a+nh)$		⋯⋯⋯⋯⋯⋯		

Coeficienţii λ_i din (22) sînt, afară de factorii $\frac{1}{i!}$, tocmai diferenţele subliniate din acest tablou.

Conform celor spuse, formula de interpolare a lui NEWTON se poate scrie

$$f(x) = N_n(x) + R(x),$$

unde

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh).$$

In calculele numerice se întrebuinţează polinomul (24) sub diferite alte forme modificate, asupra cărora nu voim să insistăm aici.

11.- Alegînd convenabil nodurile de interpolare precum şi numărul lor, se poate găsi un polinom de interpolare, care să satisfacă inegalitatea (1), pentru un $\varepsilon > 0$ dat dinainte. Acest fapt, adică aproximarea indefinită prin polinoame de interpolare, este adevărat pentru oride funcţie continuă f(x), după cum rezultă din o importantă teoremă a lui WEIERSTRASS şi din proprietăţile polinoamelor de cea mai bună aproximaţie ale lui CEBÎŞEV [9]. Se ştie însă că alegerea în acest fel a nodurilor depinde nu numai de numărul lor ci şi, în mod esenţial, de funcţia f(x) [lo].

Pentru a înlătura aceste dificultăţi se întrebuinţează astfel de polinoame, sau mai general de funcţii, de aproximare.

Pentru a da un prim exemplu, să luăm ca funcţie de aproximare $\varphi(x)$ funcţia care ia valorile $f(x_i)$ pe punctele x_i şi care este liniară pe fiecare din intervalele $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$.

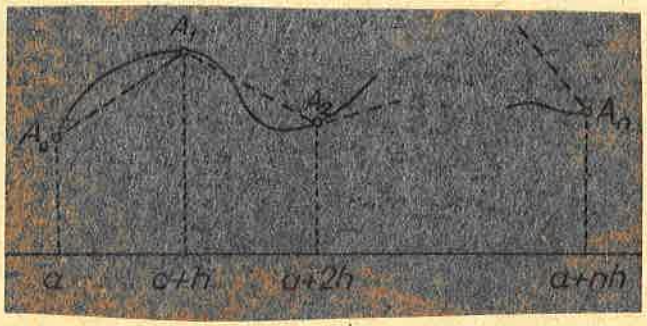


Fig.5

Procedeul revine la a înlocui curba $y = f(x)$ prin o linie poligonală înscrisă

Dacă, pentru simplificare, presupunem că punctele x_i care [illegible] intervalul $[a,b]$ în n părţi egale, în fiecare din intervalele parţiale $[a+(i-1)h, a+ih]$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\varphi(x)$ coincide cu polinomul de interpolare de gradul întîi cu nodurile în extremităţile acestui interval. Ţinînd seama de rezultatele de mai sus, avem atunci

$$\varphi(x) = f(a+(i-1)h) + \Delta f(a+(i-1)h)\ (x-a-(i-1)h),$$

pentru x cuprins între $a+(i-1)h$ şi $a+ih$.

Dacă presupunem că funcţia f(x) verifică condiţia lui LIPSCHITZ (16), restul în formula de aproximare corespunzătoare este delimitat de formula

$$|R(x)| < \frac{b-a}{2n}K. \tag{25}$$

Dacă n creşte indefinit, membrul al doilea al inegalităţii (25) tinde către 0. Rezultă că acest procedeu permite o aproximare indefinită a funcţiei f(x). Acest lucru este de altfel adevărat oricare ar fi funcţia continuă f(x) [11].

Metoda aceasta de aproximare este tot o metodă de interpolare şi anume interpolarea prin linia poligonală înscrisă.

O altă metodă de aproximare, sau de interpolare, în general mai bună, dar mai puţin întrebuinţată în practică, se obţine dacă pe fiecare interval $[a+(i-1)h, a+ih]$ înlocuim funcţia cu polinomul de interpolare de gradul al doilea, avînd ca noduri extremităţile şi mijlocul acestui interval. Restul în formula de aproximare corespunzătoare va fi delimitat de formula

$$|R(x)| < \frac{2(b-a)}{3\sqrt{3}n}K,$$

în cazul cînd funcţia verifică condiţia (16).

12.- Se pot considera şi alte polinoame de aproximare. Generalizînd noţiunea de polinom de interpolare corespunzător unor noduri date (6), putem considera polinoame de forma (8), unde $L_0(x), L_1(x),\ldots,L_n(x)$ sînt polinoame de gradul n, diferite de acelea care intervin în formula de interpolare a lui LAGRANGE. În cazul cel mai interesant al nodurilor echidistante, S. BERNSTEIN a găsit [12] un astfel de polinom, care are importante proprietăţi.

Polinomul lui S. BERNSTEIN este

$$B_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n} f(a+ih)\binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i}, \quad (h = \frac{b-a}{2}) . \tag{26}$$

Pentru ca să evaluăm restul în formula de aproximare

$$f(x) = B_n(x) + R(x)$$

corespunzătoare, observăm întîi că

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i} = (b-a)^n , \tag{27}$$

iar polinoamele $(x-a)^i(b-x)^{n-i}$ rămîn pozitive, cînd x rămîne cuprins între a şi b. Avem atunci

$$R(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n} [f(x) - f(a+ih)]\binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i},$$

de unde

$$|R(x)| \leq \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n} |f(x) - f(a+ih)| \binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i},$$

Presupunînd că funcţia f(x) verifică condiţia lui LEIPSCHITZ (16), vom avea

$$|R(x)| \leq \frac{K}{(b-a)^n} \Psi(x), \tag{28}$$

unde

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{n} |x-a-ih| \binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i}. \tag{29}$$

Pentru a delimita mai departe pe $\Psi(x)$ ne vom folosi de

următoarea inegalitate datorită lui CAUCHY, [13]

$$\alpha_o\beta_o + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n \leq \sqrt{\alpha_o^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_o^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2} .$$

Să punem

$$\alpha_i = |x-a-ih| \sqrt{\binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i}} .$$

$$i = 0,1,\ldots,n .$$

$$\beta_i = \sqrt{\binom{n}{i}(x-a)(b-x)^{n-i}} ,$$

atunci, pe baza formulelor (27), (29),

$$\alpha_o\beta_o + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \Psi(x) ,$$

$$\alpha_o^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = p(x) = \sum_{i=o}^{n} (x-a-ih)^2\binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i},$$

$$\beta_o^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2 = (b-a)^n.$$

Un calcul elementar, pe care nu îl detaliăm, ne dă

$$p(x) = \frac{(b-a)^n}{n}(x-a)(b-x) ,$$

aşa că, în definitiv,

$$\Psi(x) \leq \frac{(b-a)^n}{n}\sqrt{(x-a)(b-x)} .$$

Însă $(x-a)(b-x) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$, x parcurge intervalul [a,b], aşa că avem

$$|R(x)| = |f(x) - B_n(x)| \leq \frac{b-a}{2\sqrt{n}}K .$$

Această formulă ne arată că polinomul lui S. BERNSTEIN permite o aproximare indefinită a funcţiei f(x). Rezultatul este de altfel valabil pentru orice funcţie continuă f(x) [14].

13.- Pentru a pune polinomul (26) sub o formă mai utilizabilă în calcule, să calculăm întîi derivata lui. Avem

$$B_n'(x) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=o}^{n} f(a+ih)\binom{n}{i}[i(x-a)^{i-1}(b-x)^{n-i} -$$

$$- (n-i)(x-a)^i(b-x)^{n-i-1}] ,$$

de unde

$$B_n'(x) = \frac{n}{(b-a)^n}\left[\sum_{i=o}^{n-1} f(a+(i+1)h)\binom{n-1}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-1-i} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih)\binom{n-1}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-1-i}\right],$$

sau, folosind notaţiile (23),

$$(30) \qquad B_n'(x) = \frac{nh}{(b-a)^n}\sum_{i=o}^{n-1} \Delta f(a+ih)\binom{n-1}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-1-i}.$$

Pentru derivatele de ordin superior deducem atunci

$$(31) \qquad B_n^k(x) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)h^k}{(b-a)^n}\sum_{i=o}^{n-k} \Delta^k f(a+ih)\binom{n-k}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-k-i}.$$

Din formula (31) deducem

$$B_n^{(k)}(a) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)h^k}{(b-a)^k}\Delta^k f(a), \quad k=0,1,\ldots,n, \quad [B_n(a)=f(a)].$$

Înlocuind aceste valori în formula lui TAYLOR,

$$B_n(x) = B_n(a) + \frac{B_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{B_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{B_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

obţinem în definitiv,

$$B_n(x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\Delta^k f(a).(x-a)^k.$$

14.- Polinomul lui S. BERNSTEIN se bucură încă de alte proprietăţi importante . Formula (27) ne arată că pentru orice valoare a lui x din intervalul [a, b] , $B_n(x)$ este o medie aritmetică (generalizată) a numerelor f(a+ih), i=0,1,...,n. Rezultă de aici că $B_n(x)$ rămîne totdeauna cuprins între limitele între care rămîne cuprinsă funcţia f(x). Dacă funcţia f(x) este crescătoare, diferenţele divizate $\Delta f(a+ih)$ sînt pozitive şi (30) ne arată că derivata $B_n'(x)$ este de asemenea pozitivă pe intervalul [a,b]. Polinomul $B_n(x)$ este deci crescător, cel puţin pe intervalul [a,b]. Aceste proprietăţi pot să fie încă mult precizate [15]. Polinomul lui S. BERNSTEIN nu numai că

permite o aproximare indefinită a funcţiei f(x), dar se şi apropie foarte mult de alura acestei funcţii.

2. Cuadraturi aproximative.

15.- Una din aplicaţiile calculului integral este evaluarea ariilor. Dîndu-se o funcţie f(x) pe intervalul [a,b], valoarea integralei

(32) $$I = \int_a^b f(x)dx$$

reprezintă, după cum se ştie, aria ABba cuprinsă între axa Ox, curba y = f(x) şi ordonatele punctelor a, b.

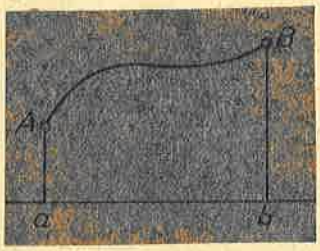


fig.6.

Calculul unei integrale definite este necesar şi în diferite alte probleme practice.

Pentru a calcula o valoare aproximativă a integralei I, în cazul cînd funcţia f(x) este prea complicată, sau cînd ea este cunoscută empiric, putem înlocui această funcţie cu o funcţie de aproximare φ(x) şi lua pentru I ca valoare apropiată pe

(33) $$\int_a^b \varphi(x)dx \ .$$

Dacă notăm cu ρ diferenţa dintre integralele (32) şi (33), obţinem **formula de cuadratură aproximativă**

(34) $$I = \int_a^b \varphi\,(x)dx + \rho \ ,$$

unde ρ , este restul acestei formule. Numărul ρ măsoară precizia cu care integrala (33) reprezintă valoarea integralei (32).

În calculele practice se va alege pentru φ(x) o funcţie simplă, ca integrala (33) să se poată calcula uşor şi cu o suficientă exacti-

tate. După aceasta, va trebui să se studieze restul ρ, pentru a putea determina mărimea aproximaţiei obţinute.

16.- Putem lua ca funcţie de aproximare $\varphi(x)$ polinomul $P(x)$ de interpolare de gradul n cu nodurile (6). Formula de cuadratură aproximativă va fi atunci de forma

$$I = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i) + \rho , \tag{35}$$

unde coeficienţii μ_i sînt daţi de formulele

$$\mu_i = \frac{1}{\omega'(x_i)} \int_a^b \frac{\omega(x)}{x-x_i} dx , \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

întrebuinţînd notaţiile de mai sus.

Nodurile x_i fiind date, coeficienţii μ_i se pot calcula odată pentru totdeauna, iar restul ρ se poate delimita, de ex., cu ajutorul rezultatelor precedente. Astfel, relaţia

$$\int_a^b [f(x) - P(x)]dx$$

ne arată că

$$|\rho| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)|dx$$

şi, dacă ţinem seamă de formula (14), avem

$$|\rho| \leq \frac{\alpha}{(n+1)!} \int_a^b dx = \frac{\alpha\,(b-a)M}{(n+1)!}$$

cu notaţiile de acolo.

17.- Cele mai obişnuite formule de cuadratură aproximativă sînt de forma (35), sau de o formă mai generală care conţine şi valorile derivatelor funcţiei $f(x)$ pe punctele (6) pînă la un anumit ordin,

$$I = \sum_{i=0}^{n} [\mu_i f(x_i) + \mu_i' f'(x_i) + \ldots + \mu_i^{(k)} f^{(k)}(x_i)] + \rho . \tag{36}$$

Într-o astfel de formulă se aleg, pe de o parte, punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ în mod convenabil în intervalul [a,b] şi, pe de altă parte, se determină coeficienţii μ , astfel ca formula să fie exactă pentru $\rho = 0$, cînd f(x) se reduce la un polinom oarecare de grad cel mult egal cu un anumit număr l. De ex. în formula (35), în cazul cînd luăm pentru $\varphi(x)$ polinomul de interpolare P(x), μ_i sînt determinaţia tocmai prin condiţia ca ρ să fie nul dacă f(x) se reduce la un polinom oarecare de gradul n.

Mai general se pot considera formule (36) în care anumite derivate să nu figureze în unele din punctele x_i , deci formule în care coeficienţi μ sînt daţi egali cu 0 dinainte. De asemenea, se consideră formule (36), în care se măreşte numărul l de mai înainte prin anumite condiţii suplimentare impuse nodurilor (6).

Ne vom mărgini aici la un caz destul de general, cînd putem găsi o expresie simplă pentru exprimarea restului ρ .

Diferenţa

$$U[f] = I - \sum_{i=o}^{n} \mu_i f(x_i),$$

sau mai general,

$$U[f] = I - \sum_{i=o}^{n} [\mu_i f(x_i) + \mu_i' f'(x_i) + \mu_i^{(k)} f^{(k)}(x_i)],$$

este ceea ce se numeşte o <u>funcţională liniară</u>. O astfel de funcţională are o valoare numerică care depinde de funcţia f(x) şi se bucură de proprietatea că avem

$$U[\alpha f + \beta g] = \alpha U[f] + \beta U[g] , \tag{37}$$

dacă f(x), g(x) sînt două funcţii definite pe intervalul [a,b] , iar α , β două constante oarecare. Despre funcţiile pe care le considerăm, vom presupune că verifică proprietăţile de continuitate şi de derivabilitate care intervin. Aceste proprietăţi sînt aproape totdeauna verificate în aplicaţii.

Dacă o funcţională liniară se bucură de proprietatea că nu se anulează pentru nici o funcţie f(x) care admite o derivată de ordinul n+1 diferită de 0 pe intervalul [a,b], putem găsi o formă convenabilă a valorii acestei funcţionale cu ajutorul acestei derivate.

Fie U[f] o astfel de funcţională. Funcţia x^{n+1} are derivata de ordinul n+1 egală cu (n+1)!, deci $\neq 0$, prin urmare

$$U[x^{n+1}] \neq 0.$$

Formula (37) ne arată acum că dacă

$$F(x) = U[x^{n+1}]f(x) - U[f]x^{n+1},$$

avem

$$U[F] = U[U[x^{n+1}]f(x) - U[f]x^{n+1}] = U[x^{n+1}]U[f] - U[f]U[x^{n+1}] = 0.$$

Rezultă de aici că $F^{(n+1)}(x)$ trebue să se anuleze în intervalul [a,b]. Avem deci $F^{(n+1)}(\Theta) = 0$, unde Θ este cuprins în intervalul [a,b]. Dar

$$F^{(n+1)}(x) = U[x^{n+1}]\, f^{(n+1)}(x) - (n+1)!U[f]$$

şi deducem

$$U[f] = \frac{U[x^{n+1}]}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\Theta). \tag{38}$$

Pentru a deduce acest rezultat e necesar să putem verifica că $U[f] \neq 0$ pentru $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ (pentru orice $a \leq x \leq b$). Avem aici un criteriu simplu pe care va fi suficient să-l enunţăm [16].

Dacă avem

$$\left.\begin{aligned} &U[1] = U[x] = \dots = U[x^n] = 0, \quad U[x^{n+1}] > 0, \\ &U\left[\left(\frac{|x-\lambda| + x - \lambda}{2}\right)^n\right] \geq 0, \text{ pentru } a \leq \lambda \leq b, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

atunci avem $U[f] > 0$, dacă $f^{(n+1)}(x) > 0$ pentru orice x din [a,b].

Rezultă că în ipotezele (39), formula (38) este valabilă.

La fel este şi dacă semnele $>$ şi $\geq$ se înlocuiesc respectiv cu $<$ şi $\leq$ în (39).

Vom face acum cîteva aplicaţii ale generalităţilor de mai sus.

18.- Să considerăm formula de cuadratură aproximativă

$$I = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \rho \,, \tag{40}$$

numită <u>formula trapezului</u>. Această formulă se obţine luînd pentru $\varphi(x)$ polinomul de interpolare $N_1(x)$ de gradul 1. Formula revine deci la înlocuirea ariei cerute I prin aria trapezului ABba. În cazul nostru



fig.7.

$$U[f] = I - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

şi luînd $n = 1$, deducem

$$U[1] = U[x] = 0, \quad U[x^2] = \frac{(b-a)^3}{6} < 0,$$

$$U\left[\frac{|x-\lambda| + x-\lambda}{2}\right] = \frac{(b-\lambda)(a-\lambda)}{2} \leq 0, \quad a \leq \lambda \leq b.$$

Formula (38) se aplică şi avem

$$\rho = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\Theta) \,.$$

Formula trapezului aproximează integrala I totdeauna în acelaşi sens, cînd $f''(x)$ este de semn constant. Pentru a găsi o aproximare de sens contrar, putem proceda prin diferite modificări ale formulei trapezului. Una dintre aceste modificări constă în a corecta formula, prin adăugarea unui termen de forma

$$\nu[f'(a) - f'(b)],$$

ν fiind o constantă convenabilă.

Pentru formula corectată avem

$$U[1] = U[x] = 0, \quad U[x^2] = -\frac{(b-a)^3}{6} - 2\nu(a-b),$$

$$U\left[\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right] = \frac{(b-\lambda)(a-\lambda)}{2} + \nu .$$

Dacă luăm $\nu = \frac{(b-a)^2}{8}$, avem

$$U[x^2] = \frac{(b-a)^3}{12} > 0, \qquad U\left[\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right] = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{a+b}{2})^2 \geq 0$$

şi deducem formula de cuadratură aproximativă

$$I = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{8}[f'(a) - f'(b)] + \rho , \tag{41}$$

unde restul e dat de formula

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\Theta) .$$

Rezultă că dacă $f''(x)$ este de semn constant, integrala I este cuprinsă între

$$\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \tag{42}$$

şi

$$\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{8}[f'(a) - f'(b)] . \tag{43}$$

În fine, se poate modifica formula trapezului, înlocuind nodurile a,b prin altele.

Să luăm ca noduri punctele $a_1 (= a + \frac{b-a}{4})$, $b_1 (= b - \frac{b-a}{4})$, care împreună cu mijlocul $\frac{a+b}{2}$, împart intervalul $[a,b]$ în patru părţi egale. Să considerăm formula de cuadratură aproximativă,

$$I = \frac{b-a}{2}[f(a_1) + f(b_1)] + \rho , \tag{44}$$

Făcînd calculele, în acest caz avem

$$U[1] = U[x] = 0, \; U[x^2] = \frac{(b-a)^3}{48} > 0,$$

$$U\left[\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right] = \begin{cases} \frac{(a-\lambda)^2}{2} \geq 0, & a \leq \lambda \leq a_1, \\ \frac{1}{2}(\lambda - \frac{a+b}{2})^2 \geq 0, & a_1 \leq \lambda \leq b_1 , \\ \frac{(b-\lambda)^2}{2} \geq 0, & b_1 \leq \lambda \leq b. \end{cases}$$

Criteriul de mai sus se aplică şi restul este de forma

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{96} f''(\theta) .$$

Se vede că în general formula (44) este mai bună decît formula (41). Dacă $f''(x)$ rămîne de semn constant, integrala I este cuprinsă între numerele (42) şi

(45) $$\frac{b-a}{2}[f(a_1) + f(b_1)].$$

Expresia (43) are o interpretare geometrică interesantă. Fie A_o punctul unde ordonata lui a_1 tae tangenta în A la curbă, iar B_o punctul unde ordonata lui b_1 taie tangenta în B la curbă. Fie apoi A'_o , B'_o proecţiile punctelor A_o, B_o pe ordonatele punctelor a, b respectiv. Expresia (43) reprezintă atunci aria trapezului A'B'ba.

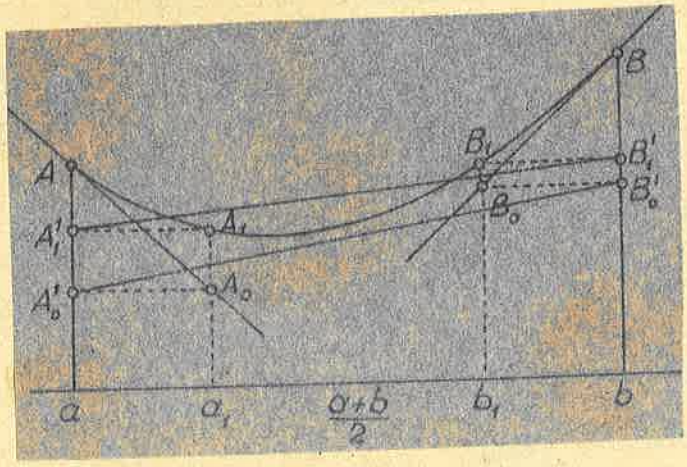


fig.8.

Fie A_1, B_1 punctele reprezentative ale curbei, pentru $x = a_1$, b_1 respectiv şi A'_1, B'_1 proecţiile punctelor A_1, B_1 pe ordonatele punctelor a, b respectiv. Expresia (45) reprezintă atunci aria trapezului $A'_1B'_1ba$.

19.- Pentru a utiliza formula trapezului, precum şi celelalte formule modificate, în calculele numerice ale integralei I, se împarte în prealabil intervalul [a,b] în n părţi egale şi se aplică fiecărui interval parţial formulele, ţinînd seamă de descompunerea

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx, \qquad h = \frac{b-a}{n} .$$

Deducem atunci

$$I = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} [f(a+(i-1)h) + f(a+ih)] + \rho ,$$

unde

$$\rho = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \ldots + f''(\theta_n)}{n},$$

iar θ_i este un punct din intervalul $[a+(i-1)h, a+ih]$. Insă o proprietate cunoscută a derivatelor [17] ne arată că putem scrie

$$\frac{f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \ldots + f''(\theta_n)}{n} = f''(\theta) ,$$

θ fiind cuprins în intervalul $[a,b]$. Avem deci

$$(46) \quad I = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} [f(a+(i-1)h) + f(a+ih)] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot$$

La fel deducem din (41)

$$(47) \quad I = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} [f(a+(i-1)h + f(a+ih)] + \frac{(b-a)^2}{8n^2}[f'(a) - f'(b)] + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\theta).$$

In sfîrşit, aplicînd fiecărui interval $[a+(i-1)h, a+ih]$ formula (44), deducem

$$(48) \quad I = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(a + \frac{2i-1}{4}h) + \frac{(b-a)^3}{96n^2} f''(\theta) .$$

2o.- O altă formulă de cuadratură aproximativă este

$$(49) \quad I = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] + \rho ,$$

numită <u>formula lui SIMPSON</u>. Această formulă se obţine luînd pentru $\varphi(x)$ polinomul de interpolare $N_2(x)$ de gradul 2, cu nodurile în punctele a, $\frac{a+b}{2}$, b. Procedeul de aproximare revine deci la înlocuirea ariei cerute prin aria cuprinsă între axa Ox, parabola $y = N_2(x)$, cu axa verticală şi ordonatele punctelor a,b. De aceea această metodă se mai numeşte şi metoda

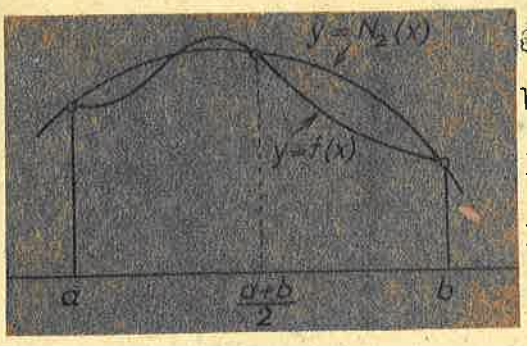


fig.9

parabolei. Avem în acest caz (n = 3),

$$U[1] = U[x] = U[x^2] = U[x^3] = 0, \quad U[x^4] = -\frac{(b-a)^5}{120} < 0,$$

$$U\left[\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right)^3\right] = \begin{cases} \frac{(a-\lambda)^3(a+2b-3\lambda)}{12} \leq 0, & \text{pentru } a \leq \lambda \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-\lambda)^3(2a+b-3\lambda)}{12} \leq 0, & \text{pentru } \frac{a+b}{2} \leq \lambda \leq b. \end{cases}$$

Formula (38) e aplicabilă şi avem

$$\rho = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\Theta).$$

Dacă $f^{(IV)}(x)$ rămîne de semn neschimbat pe intervalul [a,b], formula parabolei aproximează integrala, totdeauna într-un acelaşi sens determinat. Ca şi în cazul formulei trapezului, putem modifica formula pentru a obţine atunci o aproximare de sens contrar.

Să corectăm formula, cu un termen de forma

$$\nu[f'''(a) - f'''(b)]$$

ν fiind o constantă convenabilă.

Pentru formula care se obţine adăogînd această corecţie, avem

$$U[1] = U[x] = U[x^2] = U[x^3] = 0, \quad U[x^4] = -\frac{(b-a)^5}{120} + 24\nu(a-b),$$

$$U\left[\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right)^3\right] = \begin{cases} \frac{(a-\lambda)^3(a+2b-3\lambda)}{12} + 6\nu & \text{pentru } a \leq \lambda \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-\lambda)^3(2a+b-3\lambda)}{12} + 6\nu & \text{pentru } \frac{a+b}{2} \leq \lambda \leq b. \end{cases}$$

Dacă luăm $\nu = \frac{(b-a)^4}{1152}$, avem

$$U[x^4] = \frac{(b-a)^5}{80} > 0,$$

$$U\left[\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{3}\right)^3\right] = \begin{cases} \frac{1}{144}\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)^2[(7a-b-6\lambda)^2+2(b-a)^2] \geq 0, & a \leq \lambda \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{144}\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)^2[(7b-a-6\lambda)^2+2(b-a)^2] \geq 0, & \frac{a+b}{2} \leq \lambda \leq b \end{cases}$$

şi deducem formula corectată a parabolei,

$$(5o) \quad I = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] + \frac{(b-a)^4}{1152}[f'''(a) - f'''(b)] + \frac{(b-a)^5}{1920} f^{(IV)}(\theta).$$

In sfîrşit, o modificare a formulei parabolei se obţine prin alegerea convenabilă a nodurilor. Dacă luăm valoarea aproximativă

$$\frac{b-a}{27}[8f(a_2) + 11f(\frac{a+b}{2}) + 8f(b_2)],$$

unde $a_2 = a + \frac{b-a}{8}$, $b_2 = b - \frac{b-a}{8}$, găsim, făcînd calculele

$$U[1] = U[x] = U[x^2] = U[x^3] = 0, \quad U[x^4] = \frac{(b-a)^5}{1280} > 0,$$

$$U\left[\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right)^3\right] = \begin{cases} \frac{(a-\lambda)^4}{4} \geq 0, & a \leq \lambda \leq a_2, \\ \frac{1}{2^4 \cdot 3^6}\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)^2[(49a+5b-54\lambda)^2+2(b-a)^2] \geq 0, & a_2 \leq \lambda \leq \frac{a+b}{2}, \\ \frac{1}{2^4 \cdot 3^6}\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)^2[(5a+49b-54\lambda)^2+2(b-a)^2] \geq 0, & \frac{a+b}{2} \leq \lambda \leq b_2, \\ \frac{(b-\lambda)^4}{4} \geq 0, & b_2 \leq \lambda \leq b. \end{cases}$$

şi obţinem formula de cuadratură aproximativă,

$$(51)\quad I = \frac{b-a}{27}\left[8f(a_2) + 11f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 8f(b_2)\right] + \frac{(b-a)^5}{30720} f^{(IV)}(\Theta),$$

care în general este mai bună decît (5o).

Formulele (49), (5o), (51) se pot aplica în fiecare din intervalele $[a+(i-1)h,\ a+ih]$ şi obţinem atunci formulele de cuadratură aproximativă.

$$(52)\quad I = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(a+i-1\ h) + 4f\left(a+\frac{2i-1}{2}\right) + f(a+ih)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(IV)}(\Theta)$$

$$(53)\quad I = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(a+i-1\ h) + 4f\left(a+\frac{2i-1}{2}\right) + f(a+ih)\right] + \frac{(b-a)^4}{1152n^4}\left[f'''(a) - f'''(b)\right] + \frac{(b-a)^5}{1920n^4} f^{(IV)}(\Theta),$$

$$(54)\quad I = \frac{b-a}{27n}\left[8\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a+\frac{8i-1}{8}h\right) + f\left(a+\frac{8i-7}{8}h\right)\right) + 11\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)\right] + \frac{(b-a)^5}{30720n^4} f^{(IV)}(\Theta).$$

Împărţind intervalul $[a,b]$ într-un număr suficient de părţi egale, formulele precedente permit o aproximare oricît de bună a lui I.

Bineînţeles că formulele (46), (47), (48), (52), (53), (54) se pot stabili şi direct, aplicînd criteriul de la Nr. 17.

21.- Fie 2k un număr par şi să luăm ca funcţie $\varphi(x)$ polinomul lui TAYLOR $T_{2k-1}(x)$ corespunzător mijlocului $c = \frac{a+b}{2}$ al intervalului $[a,b]$. Avem atunci formula de cuadratură aproximativă

$$I = \sum_{j=o}^{k-1} \frac{(b-a)^{2j+1}}{2^{2j}(2j+1)!} f^{(2j)}(c) + \frac{(b-a)^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)!} f^{(2k)}(\Theta).$$

Pentru $k = 1,2$, obţinem respectiv formulele

$$I = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\Theta),$$

$$I = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^5}{1920}f^{(IV)}(\Theta) .$$

Aceste formule dau în general aceiaşi precizie ca şi formulele (41) şi (50).

Dacă luăm ca funcţie de aproximare polinomul (26) al lui S. BERNSTEIN şi dacă observăm că

$$\int_a^b (x-a)^i (b-x)^{n-i} dx = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

deducem formula de cuadratură aproximativă

$$I = \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=o}^{n} f(a+ih) - \frac{(b-a)^3}{12n}f''(\Theta).$$

Această formulă este mai simplă decît (46), dar în general mai puţin precisă.

22.- Într-o formulă generală de cuadratură aproximativă de forma (36) intervin cele n+1 puncte, sau noduri, $x_o, x_1, \ldots, x_n$ precum şi (k+1)(n+1) coeficienţi $\mu_i, \mu_i', \ldots, \mu_i^{(k)}$, $i = 0,1,\ldots,n$. Aceste puncte şi aceşti coeficienţi vor putea fi determinaţi în general astfel ca ρ să fie egal cu 0 pentru orice polinom f(x) de grad cel mult egal cu (k+2)(n+1)-1. Pentru aceasta e necesar şi suficient ca să avem $\rho = 0$ pentru $f(x) = x^j$, $j = 0,1,\ldots, (k+2)(n+1) -1$. Aceste condiţii se scriu

$$(54) \quad \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1} = \sum_{i=o}^{n} [\mu_i x_i^j + j\mu_i' x_i^{j-1} + \ldots + j(j-1)\ldots(j-k+1)\mu_i^{(k)} x_i^{j-k}],$$

$$j = 0,1,\ldots,(k+2)(n+1) - 1.$$

Pentru a nu complica lucrurile ne vom limita la cazul $k = 0$. Atunci condiţiile (54) devin

$$(55)\qquad \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_i^j , \quad j = 0,1,\ldots,2n+1.$$

Să demonstrează că acest sistem are o soluţie bine determinată.

Pentru a obţine această soluţie să considerăm polinomul de interpolare generalizat $P(x)$ de gradul $2n+1$ şi care verifică condiţiile

$$P(x_i) = f(x_i),\ P'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n .$$

Acest polinom poate fi considerat ca limita polinomului de interpolare a lui LAGRANGE corespunzător nodurilor $x_0, x_0', x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n'$ cînd $x_i' \to x_i$, $i = 0,1,\ldots,n$. Deducem de aici că dacă continuăm să punem

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

avem

$$(56)\qquad f(x) - P(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\Theta)}{(2n+2)!}[\omega(x)]^2.$$

În sfîrşit, polinomul $P(x)$ se poate pune sub forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} [L_i(x)f(x_i) + M_i(x)f'(x_i)],$$

unde polinoamele $L_i(x)$, $M_i(x)$ sînt de gradul $2n+1$ şi sînt determinate de condiţiile

$$(57)\qquad \begin{cases} L_i(x_i) = 1, \quad L_i(x_k) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n \\ L_i'(x_k) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n; \quad i = 0,1,\ldots,n . \end{cases}$$

$$(58)\qquad \begin{cases} M_i(x_k) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n, \\ M_i'(x_i) = 1, M_i'(x_k) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n, \\ \qquad\qquad i = 0,1,\ldots,n. \end{cases}$$

Dacă alegem nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ astfel ca să avem

(59) $$\int_a^b M_i(x)dx = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

atunci, punînd,

(60) $$\mu_i = \int_a^b L_i(x)dx, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

condiţiile (55) sînt realizate.

23.- Polinomul $M_i(x)$, pe baza formulelor (58), este dat de formula

(61) $$M_i(x) = \frac{1}{\omega'^2(x_i)} \cdot \frac{\omega^2(x)}{x-x_i}, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

aşa că (59) devine

(62) $$\int_a^b \omega(x)\frac{\omega(x)}{x-x_i}dx = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Aceste condiţii determinăt complet nodurile $x_0,x_1,\ldots,x_n$, care se arată uşor că sînt distincte.

Dacă $Q(x)$ este un polinom oarecare de grad cel mult egal cu n, formula de interpolare a lui LAGRANGE ne dă

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Q(x_i)}{\omega'(x_i)} \cdot \frac{\omega(x)}{x-x_i}$$

şi, pe baza formulelor (61), avem

(63) $$\int_a^b Q(x)\omega(x)dx = 0.$$

Se ştie că polinomul $\omega(x)$ este complet determinat de această proprietate. El este dat de formula

(64) $$\omega(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} D^{n+1}\Phi(x),$$

unde, pentru prescurtare, am pus $D = \frac{d}{dx}$ şi $\Phi(x) = [(x-a)(x-b)]^{n+1}$.

Acest polinom are toate rădăcinile reale, distincte şi cuprinse în intervalul $[a,b]$ şi care sînt tocmai nodurile căutate $x_0,x_1,\ldots x_n$.

Formulele (57) ne dau şi

$$L_i(x) = -\frac{\omega''(x_i)}{\omega'^3(x_i)} \cdot \frac{\omega^2(x)}{x-x_i} + \frac{1}{\omega'^2(x_i)}\left[\frac{\omega(x)}{x-x_i}\right]^2, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

şi ţinînd seamă de (61), (62), deducem valorile coeficienţilor (60),

$$\mu_i = \frac{1}{\omega'^2(x_i)} \int_a^b \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i}\right]^2 dx \,. \tag{65}$$

Se vede că aceşti coeficienţi sînt toţi pozitivi.

24.- În rezumat, dacă $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului (64) şi μ_i sînt daţi de formulele (65), deducem formula

$$I = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(x_i) + \rho \,,$$

care este <u>formula de cuadratură aproximativă a lui GAUSS</u> [18].

Formula (56) ne arată că în cazul formulei lui GAUSS, $U[f]$ se bucură de proprietatea că dacă $f^{(2n+2)}(x)$ este diferit de 0 pe intervalul $[a,b]$, avem $U[f] \neq 0$ [19]. Pe de altă parte, ţinînd seamă de (56),

$$U[x^{2n+2}] = \int_a^b [x^{2n+2} - P(x)]dx = \int_a^b \omega^2(x)dx \,.$$

Pentru a calcula această integrală, ţinem seamă de (64) şi avem, integrînd succesiv prin părţi,

$$\int_a^b \omega^2(x)dx = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \int_a^b \omega(x) D^{n+1} \Phi(x)dx =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\{[\omega(x)D^n\Phi(x) - \omega'(x)D^{n-1}\Phi(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \omega^{(n)}(x)\Phi(x)]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b \omega^{(n+1)}(x)\Phi(x)dx\} \,.$$

Toate derivatele lui $\omega(x)$, pînă la ordinul n inclusiv, se anulează în a şi în b, aşa că ne rămîne numai ultimul termen care este diferit de zero. Pentru a calcula acest termen, observăm că avem $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ şi

$$\int_a^b (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}dx = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!^2}{(2n+3)!}(b-a)^{2n+3} \,.$$

Deducem deci

$$U[x^{2n+2}] = \frac{[(n+1)!]^4}{(2n+2)!(2n+3)!}(b-a)^{2n+3},$$

iar restul în formula lui GAUSS se va scrie

$$\rho = \frac{[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^2(2n+3)!}(b-a)^{2n+3} f^{(2n+2)}(\Theta) .$$

Fie, de ex., n=1. În acest caz rădăcinile polinomului (64) sînt

$$\frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(b-a)$$

şi formula lui GAUSS devine

$$I = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{(b-a)^5}{4320} f^{(IV)}(\Theta) ,$$

care este mai precisă decît formula lui SIMPSON. Avantajul practic al formulei lui SIMPSON constă însă şi în faptul că nodurile x_i din intervalul [a,b] sînt simple.

25.- Să facem o aplicaţie numerică. Fie integrala

(66) $$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} ,$$

a cărei valoare este egală cu log 2, logaritmul fiind cel neperian. Calculul aproximativ al integralei (66) ne va da valori aproximative pentru log 2.

În cazul nostru, a = 0, b = 1, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Pe intervalul [0,1] considerat, f''(x) nu schimbă de semn, rămînînd pozitivă. Aplicînd formulele (46), (47), avem deci

(67) $$S_n + \frac{3}{4n} - \frac{3}{32n^2} < \log 2 < S_n + \frac{3}{4n} ,$$

unde

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} .$$

Dacă, mai exact, observăm că f''(x) rămîne cuprinsă între

$\frac{1}{4}$ şi 2, formulele (46), (47) permit să înlocuim limitele (67) cu următoarele

$$(68) \qquad S_n + \frac{3}{4n} - \frac{1}{12n^2} < \log 2 < S_n + \frac{3}{4n} - \frac{1}{48n^2},$$

mai precise.

Luînd, de ex. n=3, inegalităţile (68) ne dau

$$0{,}6907\ldots < \log 2 < 0{,}6976\ldots$$

deci pe log 2 cu 2 zecimale exacte.

Formula (48) dă pentru log 2 valoarea aproximativă $2S_{4n} - S_{2n}$, care, pentru n=2, ne dă pe log 2 cu două zecimale exacte.

Dacă observăm că

$$f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

şi că $f^{(IV)}(x)$ rămîne pozitiv pe intervalul [0,1], formulele (52), (53) ne dau

$$\frac{4}{3} S_{2n} - \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{4n} - \frac{5}{1024\, n^4} < \log 2 < \frac{4}{3} S_{2n} - \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{4n}$$

Luînd n = 3, obţinem log 2 = 0,6931..., cu 4 zecimale exacte.

3. Ortogonalitate. Polinoame ortogonale.

26.- Vom regăsi formula de cuadratură aproximativă a lui GAUSS, făcînd nişte consideraţiuni mai generale. Aceste consideraţiuni ne conduc şi la alte formule de aproximare care pot să fie utile în practică.

Să considerăm o funcţională liniară U[f] definită în particular pentru orice funcţie continuă f(x) definită într-un anumit interval, sau numai pentru anumite valori pe un interval. Despre această funcţională liniară vom presupune că ea este pozitivă şi anume că avem

(69) $$U[f] \geq 0,$$

dacă $f(x) \geq 0$, egalitatea în (69) avînd loc dacă şi numai dacă $f(x)$ se anulează identic. În această caracterizare se ţine seamă natural de felul cum e definită funcţia $f(x)$. Dacă de ex. funcţionala este de forma

(70) $$U[f] = \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) ,$$

unde p_i sînt nişte constante date (diferite de zero), independente de funcţia $f(x)$, nu considerăm decît funcţii definite pe punctele x_i. Pentru o funcţională de forma (70) pozitivitatea lor este echivalentă cu pozitivitatea tuturor coeficienţilor p_i.

Numerele

(71) $$c_i = U[x^i] , \qquad i = 0,1,...$$

se numesc <u>momentele</u> corespunzătoare funcţionalei $U[f]$.

Avem

(72) $$U[a_0x^i + a_1x^{i-1} +...+a_i] = a_0c_i + a_1c_{i-1} +...+ a_ic_0.$$

Reciproc, un şir infinit de numere $c_0, c_1,...$, defineşte o funcţională liniară $U[f]$, care se aplică cel puţin polinoamelor prin formula (72). Această funcţională va fi de tipul celei de mai sus, dacă numerele c_n sînt supuse la anumite condiţii restrictive. Aici însă nu vom examina asemenea probleme, numite <u>probleme ale momentelor</u>.

27.- Funcţionalei liniare $U[f]$ se ataşează un şir de polinoame

(73) $$P_0, P_1,...,P_n,... ,$$

unde fiecare este de grad egal cu indicele corespunzător şi care verifică următoarele două proprietăţi:

1° $U[P_iP_j] = 0$, pentru $i \neq j$.

2° $U[P_i^2] = 1, \quad i = 0,1,...$

Proprietatea 1° exprimă <u>ortogonalitatea</u> polinoamelor (73), iar 2° <u>normalitatea</u> lor. Sirul (73) este atunci şirul de polinoame

ortogonale şi normale ataşat funcţionalei U[f]. Acest şir este complet determinat şi polinoamele (73) se pot calcula cu ajutorul momentelor (71). Polinomul P_n este caracterizat de ecuaţiile [20]

$$U[x^i P_n] = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-1, \quad U[P_n^2] = 1,$$

aşa că dacă punem

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

şi observăm că

$$U[P_n^2] = a_o U[x^n P_n],$$

deducem sistemul

$$(74) \quad \begin{cases} a_o c_{i+n} + a_1 c_{i+n-1} + \ldots + a_n c_i = 0, & i = 0,1,\ldots,n-1, \\ a_o(a_o c_{2n} + a_1 c_{2n-1} + \ldots + a_n c_n) = 1. \end{cases}$$

Fie

$$(75) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Rezolvînd sistemul (74) găsim

$$(76) \quad P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\,\Delta_n}} \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \quad P_o = \frac{1}{\sqrt{\Delta_o}}$$

28.- Determinanţii (75) şi polinomul (76) se pot exprima elegant cu ajutorul funcţionalei U[f], întrebuinţînd un artificiu datorit lui HEINE [21]. Pentru aceasta să notăm cu $U_x[f]$ funcţionala U[f], punînd în evidenţă variabila x de care depinde argumentul

f(x) al acestei funcţionale. Funcţia f(x) poate eventual să depindă şi de alte variabile independente. Dacă f este o funcţie care depinde de mai multe variabile $t_o, t_1, \ldots, t_n$, operaţia repetată $U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n}[f]$ are un sens bine determinat şi, cel puţin în cazurile care ne interesează, este independentă de ordinea operaţiilor $U_{t_o}, U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$. Este clar că $U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n}[f]$ este tot o funcţională liniară.

Linia de ordinul i a determinantului Δ_n se poate scrie

$$U_{t_{i-1}}[t_{i-1}^{i-1}] \quad U_{t_{i-1}}[t_{i-1}^{i}] \ldots U_{t_{i-1}}[t_{i-1}^{i+n-1}],$$

aşa că avem

$$\Delta_n = U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n}[t_1 t_2^2 \ldots t_n^n V(t_o, t_1, \ldots, t_n)],$$

unde

$$V(t_o, t_1, \ldots t_n) = \begin{vmatrix} 1 & t_o & t_o^2 & \ldots & t_o^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{vmatrix}$$

Această formulă rămîne valabilă dacă permutăm oricum între ele literele $t_o, t_1, \ldots, t_n$. Ţinînd atunci seamă de faptul că ordinea operaţiilor $U_{t_o}, U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ este indiferentă şi ţinînd seamă de proprietăţile bine cunoscute ale determinanţilor relativ la schimbarea liniilor ordinei, deducem

$$\Delta_n = \frac{1}{(n+1)!} U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n}[V^2(t_o, t_1, \ldots, t_n)].$$

formulă care arată că în general, $\Delta_n > 0$ [22].

Acelaşi procedeu aplicat polinomului (76) ne dă

$$P_n(x) = \frac{1}{n!(\Delta_{n-1}\Delta_n)^{1/2}} U_{t_1} U_{t_2} \ldots U_{t_n}[V^2(t_1, t_2, \ldots, t_n) \prod_{i=1}^{n} (x - t_i)]$$

care e o elegantă exprimare a polinomului P_n.

È de observat că şirul (73) poate să fie şi un şir finit. Astfel în cazul (7o), şirul se termină cu polinomul P_{n+1}. În acest caz ($p_i > 0$), $\Delta_o, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1}$ sînt pozitivi, iar $\Delta_k = 0$ pentru $k > n+1$ şi determinarea polinoamelor P_k, $k > n+1$ nu are sens. Este inutil să intrăm în detalii asupra acestor proprietăţi.

29.- Polinoamele ortogonale (73) ataşate funcţionalei liniare U[f] se bucură de o importantă proprietate de minimum pe care ne propunem a o pune în evidenţă.

Să ne propunem a determina polinomul

(77) $\qquad P(x) = x^{n+1} + \ldots$

de gradul n+1, cu primul coeficient egal cu 1, pentru care $U(P^2]$ devine minimum. Pentru aceasta, observăm că P(x) se poate scrie sub forma

$$P(x) = a_o P_o + a_1 P_1 + \ldots + a_{n+1} P_{n+1}, \qquad a_{n+1} = \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)^{1/2}$$

şi atunci proprietăţile de ortogonalitate şi de normalitate ne dau

$$U[P^2] = a_o^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 ,$$

de unde, se vede, că minimul este atins dacă şi numai dacă $a_o = a_1 = \ldots = a_n = 0$, prin urmare

$$\min \; U[P^2] = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$$

şi este atins dacă şi numai dacă $P = \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)^{1/2} P_{n+1}$.

Din proprietatea de ortogonalitate a polinomului P_{n+1} rezultă că toate rădăcinile acestui polinom sînt reale şi distincte. Într-adevăr, în cazul contrar, se poate găsi un polinom Q(x) de grad cel mult egal cu n, adtfel ca produsul $Q(x)P_{n+1}(x)$ să fie ≥ 0 şi neidentic nul şi avem atunci o contradicţie cu ortogonalitatea. Această proprietate se poate preciza în anumite cazuri. Dacă, de ex., U[f] este de forma (importantă în practică)

$$U[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx \qquad (p(x) \geq 0 \text{ pe } [a,b])$$

rădăcinile polinoamelor (73) sînt situate toate în intervalul [a,b]. Acest fapt are loc deoarece avem U[f] = U[g] dacă f = g pe intervalul [a,b].

30.- Fie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului P_{n+1} şi fie Q(x) un polinom de gradul n. Formula de interpolare a lui LAGRANGE

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Q(x_i)}{P'_{n+1}(x_i)} \cdot \frac{P_{n+1}(x)}{x-x_i}$$

ne dă

$$U[Q^2] = \sum_{i=0}^{n} \mu_i Q^2(x_i) ,$$

unde

$$\mu_i = U\left[\left(\frac{P_{n+1}(x)}{P'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}\right)^2\right] , \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Aceste inegalităţi ne arată faptul important că

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$$

este şirul ortogonal şi normal ataşat funcţionalei liniare pozitive

$$U[f] = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i).$$

Această proprietate caracterizează structura şirului (73).

31.- Coeficienţii μ_i intervin în formula de cuadratură generală, întrucît P(x) este polinomul de interpolare de gradul 2n+1 care coincide, împreună cu derivata sa, cu f(x) resp. cu f'(x) pe punctele x_i, deducem ca şi în § precedent,

$$U[f] = \mu_i f(x_i) + \rho ,$$

unde $\rho = U[f-P]$. Raţionamentele făcute în § precedent ne arată atunci că dacă U[f] este o funcţională pozitivă, corecţia ρ se exprimă cu ajutorul derivatei de ordinul 2n+2 prin formula

$$\rho = \frac{f^{(2n+2)}(\Theta)}{(2n+2)!} U[x^{2n+2}] .$$

32.- Problema de minimum relativă la un polinom se generalizează prin căutarea minimului expresiei $U[f-P)^2]$, unde f(x) este o funcţie oarecare, iar P(x) un polinom convenabil de gradul n. Căutăm iarăşi polinomul minimizant sub forma

$$P(x) = a_o P_o + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n .$$

Avem atunci

$$U[(f-P)^2] = U[f^2] - 2\sum_{i=o}^{n} a_i U[fP_i] + \sum_{i=o}^{n} a_i^2 =$$

$$= U[f^2] + \sum_{i=o}^{n}(a_i - U[fP_i])^2 - \sum_{i=o}^{n}(U[fP_i])^2 .$$

Minimul are loc pentru

$$a_i = U[fP_i], \quad i = 0,1,\ldots,n$$

şi avem

$$\min U[(f-P^2] = U[f^2] - \sum_{i=o}^{n}(U[fP_i])^2 .$$

Pentru a pune acest minim sub altă formă, considerăm un caz ceva mai general. Fie determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \ldots & c_n & U[g] \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} & U[xg] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} & U[x^n g] \\ U[f] & U[xf] & \ldots & U[x^n f] & U[fg] \end{vmatrix}$$

unde f(x) şi g(x) sînt două funcţii de x.

Vom dezvolta acest determinant în două feluri.

Pe de o parte, prin combinări de linii şi coloane, ţinînd seamă de ortogonalitatea şi normalitatea polinoamelor (73), deducem

$$(78)\qquad \Delta = \Delta_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & U[gP_0] \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & U[gP_1] \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & U[gP_2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & U[gP_n] \\ U[fP_0] & U[fP_1] & U[fP_2] & \dots & U[fP_n] & U[fg] \end{vmatrix} =$$

$= \Delta_n \left(U[fg] - \sum_{i=0}^{n} U[fP_i]U[gP_i]\right)$. Pe de altăparte, din

ced. de la Nr.28,

$$(79)\qquad \Delta = \frac{1}{(n+2)!} \cdot$$

$$U_{t_0} U_{t_1} \dots U_{t_{n+1}} [W(t_0,t_1,\dots,t_{n+1};f)W(t_0,t_1,\dots,t_{n+1};g)],$$

unde

$$W(t_0,t_1,\dots,t_{n+1};\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^n & \varphi(t_0) \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^n & \varphi(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n & \varphi(t_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

In sfîrşit, dacă $P(f;x)$ este polinomul lui Lagrange de gradul n relativ la funcţia $f(x)$ cu nodurile $t_0,t_1,\dots,t_n$, avem

$$W(t_0,t_1,\dots,t_{n+1};\varphi) = V(t_0,t_1,\dots,t_n)[P(\varphi;t_{n+1}) - \varphi(t_{n+1})]$$

şi (79) devine

$$(80)\qquad \Delta = \frac{1}{(n+2)!} \cdot$$

$$\cdot U_{t_0} U_{t_1} \dots U_{t_{n+1}} [V^2(t_0,t_1,\dots,t_n)(P(f;t_{n+1})-f(t_{n+1}))(P(g;t_{n+1})-g(t_{n+1}))].$$

Din (78) şi (80) deducem

$$(81)\qquad U[fg] - \sum_{i=0}^{n} U[fP_i]\, U[gP_i] = \frac{1}{(n+2)!} \cdot$$

$$\cdot U_{t_0} U_{t_1} \dots U_{t_{n+1}} [V^2(t_0,t_1,\dots,t_n)(P(f;t_{n+1})-f(t_{n+1}))(P(g;t_{n+1}) - g(t_{n+1}))].$$

În cazul particular $f = g$, deducem

$$\min U[(f-P)^2] =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!\Delta_n} U_{t_0} U_{t_1} \dots U_{t_{n+1}} [V^2(t_0,t_1,\dots,t_n)(P(f;t_{n+1})-f(t_{n+1})^2] .$$

33.- Să reluăm expresia

$$A[f,g] = U[fg] - \sum_{i=0}^{n} U[fP_i]U[gP_i].$$

Am văzut că dacă $\varphi^{(n+1)}(x) \neq 0$, diferenţa $\varphi(x) - P(\varphi;x)$ este tot timpul de acelaşi semn cu $\varphi^{(n+1)}(x)$. Dacă presupunem funcţia $g(x)$ dată şi $g^{(n+1)}(x) \neq 0$, $A[f,g]$ este o funcţională liniară, căreia se pot aplica rezultatele de la Nr. 17. Avem, din (81),

$$A[1,g] = A[x,g] = \dots = A[x^n,g] = 0$$

şi pe baza observaţiei de mai sus, $A[f,g] \neq 0$, dacă $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Deducem deci

$$A[f,g] = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} B[g] , \tag{82}$$

unde

$$B[g] = A[x^{n+1},g] = U[x^{n+1}g] - \sum_{i=0}^{n} U[x^{n+1}P_i]U[gP_i] .$$

Dar $B[g]$ este tot o funcţională liniară care verifică condiţiile cerute, deci

$$B[g] = \frac{g^{(n+1)}(\Theta_1)}{(n+1)!} A[x^{n+1},x^{n+1}]. \tag{83}$$

Rezultatele de la Nr. 29 ne arată însă că

$$A[x^{n+1},x^{n+1}] = U[x^{2n+2}] - \sum_{i=0}^{n} (U[x^{n+1}P_i])^2 =$$

$$= \min U[(x^{n+1}-P)^2] = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} .$$

Ţinînd seamă de (82) şi (83), deducem deci

$$A[f,g] = \frac{1}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} f^{(n+1)}(\Theta) g^{(n+1)}(\Theta_1), \tag{84}$$

unde, în anumite cazuri, se poate încă preciza intervalul unde trebue să rămînă cuprinse numerele Θ , Θ_1 [23].

4. Aproximare în medie patratică. Metoda celor mai mici patrate.

34.- Dacă înlocuim o funcţie dată f(x), definită de ex. pe intervalul [a,b], prin o funcţie de aproximare $\varphi(x)$, precizia în această aproximare depinde de restul $R(x) = f(x) - \varphi(x)$.

De obicei este important ca acestă precizie să fie măsurată printr-un număr γ, care depinde, bine înţeles, de $R(x)$. Precizia va fi deci dată de valoarea unei funcţionale $A[R]$. Funcţionala A care se introduce astfel va depinde de natura problemei practice care se studiază. Ne vom limita la cazul important cînd funcţionala $A[f]$ este de forma $U[f^2]$, unde $U[f]$ este o funcţională liniară.

In particular, în aplicaţii, se întîlnesc, de ex., următoarele cazuri particulare

$$1^{o}. \quad U[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx ,$$

$$2^{o}. \quad U[f] = \sum_{i=o}^{n} p_i f(x_i) ,$$

unde $p(x)$ este o funcţie (≥ 0) dată, p_i nişte numere pozitive date iar $x_o, x_1, \ldots x_n$ sînt puncte date în intervalul [a,b]. Aceste cazuri particulare corespund cazurilor cînd precizia aproximării lui f(x) prin funcţia $\varphi(x)$ este măsurată de numărul

$$1^{o}. \quad \gamma = \int_a^b p(x)R^2(x)dx = \int_a^b p(x)[f(x) - \varphi(x)]^2 dx ,$$

$$2^{o}. \quad \gamma = \sum_{i=o}^{n} p_i R^2(x_i) = \sum_{i=o}^{n} p_i [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 ,$$

respectiv.

O astfel de aproximare se numeşte o aproximare <u>în medie patratică</u>, deoarece numărul

$$1^{o} \quad \left(\frac{\gamma}{\int_a^b (x)dx}\right)^{1/2}, \qquad 2^{o} \quad \left(\frac{\gamma}{\sum_{i=o}^{n} p_i}\right)^{1/2}$$

este o valoare medie a funcţiei $|R(x)|$ pe intervalul $[a,b]$ resp. a valorilor $|R(x_0)|, \ldots, |R(X_n)|$ [24].

E de notat că în cazul 2° funcţiile considerate nu intervin decît prin valorile lor pe punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$, deci e inutil să fie definite în afară de aceste puncte.

35.- Funcţiile de aproximare $\varphi(x)$ se aleg de obicei dintr-o clasă de funcţii care sînt în general combinaţii liniare de nişte alte funcţii date

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) . \tag{85}$$

Funcţia de aproximare $\varphi(x)$ va fi atunci de forma

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x), \tag{86}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt constante.

Precizia aproximării se măsoară atunci prin numărul $U[(f-\varphi)^2]$ care va depinde în general de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Se pune imediat, aici, o problemă de cea mai bună aproximare şi anume determinarea constantelor $a_0, a_1, \ldots a_n$ astfel ca $U[(f-\varphi)^2]$ să aibă cea mai mică valoare posibilă. În cazul particular cînd (85) sînt puterile succesive ale lui x, problema revine la aceea a polinoamelor ortogonale, tratată în § precedent.

Problema noastră de minimum este o problemă algebrică, deoarece $U[(f-\varphi)^2]$ se reduce la un polinom de gradul al doilea în $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Într-adevăr, pe baza liniarităţii lui $U[f]$, avem

$$U[(f-\varphi)^2] = U[f^2] - 2U[f\varphi] + U[\varphi^2],$$

unde

$$U[f^2\varphi] = \sum_{i=0}^{n} a_i U[f\varphi_i], \qquad U[\varphi^2] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j U[\varphi_i\varphi_j] .$$

Problema va depinde în primul rînd de natura formei

patratice $U[\varphi^2]$. Dacă această formă este definită şi pozitivă, condiţie care în general va fi verificată în aplicaţii, problema de minimum are o soluţie unică şi bine determinată. Acest lucru are loc, în particular, dacă $U[f]$ este o funcţională liniară pozitivă, iar funcţiile (85) îndeplinesc anumite condiţii de independenţă liniară. In acest caz, minimul se determină prin derivare şi coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt daţi de sistemul

$$(87)\quad a_0 U[\varphi_i\varphi_0] + a_1 U[\varphi_i\varphi_1] + \ldots + a_n U[\varphi_i\varphi_n] = U[f\varphi_i], \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

şi atunci valoarea γ a minimului căutat este

$$(88)\quad \gamma = U[f^2] - U[f\varphi],$$

de unde

$$(89)\quad a_0 U[f\varphi_0] + a_1 U[f\varphi_1] + \ldots + a_n U[f\varphi_n] = U[f^2] - \gamma .$$

36.- Din formulele (87), (88) eliminînd pe $a_0, a_1, \ldots, a_n$, găsim valoarea lui γ sub forma cîtului a doi determinanţi

$$(90)\quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} & & & U[f\varphi_0] \\ & D & & U[f\varphi_1] \\ & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & U[f\varphi_n] \\ U[f\varphi_0] & U[f\varphi_1] & \cdots & U[f^2] \end{vmatrix}}{D}$$

unde

$$D = \| U[\varphi_i\varphi_j] \|_{i,j = 0,1,\ldots,n} .$$

(presupunînd bineînţeles că D nu se anulează).

Putem aplica procedeul de la Nr. 28 celor doi determinanţi din membrul al doilea al formulei (90). Dacă notăm în general,

$$W\begin{pmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \\ t_0, t_1, \ldots, t_k \end{pmatrix} = \| \varphi_i(t_j) \|_{i,j = 0,1,\ldots,k}$$

deducem atunci

$$\gamma = \frac{U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n} U_t [W^2 (\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f)]}{U_{t_o} U_{t_1} \ldots U_{t_n} [W^2 (\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)]}$$

Sub forme analoage se pot obţine şi coeficienţii a_i care fac minimă expresia $U[(f-\varphi)^2]$! Aceste formule rar pot fi utile însă în practică. În problemele practice este mai uşor să rezolvăm sistemul (87) direct prin eliminarea succesivă a necunoscutelor [25]. Valoarea lui γ se calculează apoi cu ajutorul formulei (88).

37.- În cazul cînd $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0,1,\ldots,n$, problema minimului se simplifică prin introducerea polinoamelor ortogonale corespunzătoare funcţionalei $U[f]$. Aceeaşi simplifcare se poate face şi în cazul general, înlocuind funcţiile (85) prin nişte alte funcţii

(91) $$\Psi_o(x), \Psi_1(x), \ldots, \Psi_n(x),$$

care să fie combinaţii liniare de funcţiile (85), deci în general de forma

$$\Psi_i(x) = b_{io}\varphi_o(x) + b_{i1}\varphi_1(x) + \ldots + b_{in}\varphi_n(x) .$$

Coeficienţii constanţi b_{ij} sînt aleşi odată pentru totdeauna astfel ca funcţiile (91) să formeze un sistem ortogonal şi normal, deci astfel ca să avem

$$U[\Psi_i \Psi_j] = 0, \; i \neq j, \quad U[\Psi_i^2] = 1, \quad i,j = 0,1,\ldots,n .$$

Funcţia de aproximare $\varphi(x)$ o căutăm atunci sub forma

$$\varphi(x) = c_o\Psi_o(x) + c_1\Psi_1(x) + \ldots + c_n\Psi_n(x).$$

Vom avea, ca şi la Nr. 32,

$$\min U[(f-\varphi)^2] = U[f^2] - \sum_{i=o}^{n} (U[f\Psi_i])^2 ,$$

iar coeficienţii c_i ai combinaţiei minimizante sînt daţi de

$$c_i = U[f\Psi_i], \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Formarea şirului (91), ortogonal şi normal, se face printr-un procedeu numit ortogonalizare, asupra căruia nu insistăm aici.

38.- O aplicaţie importantă a celei mai bune aproximări în medie patratică o avem în metoda celor mai mici patrate.

Să presupunem că într-o problemă practică avem de determinat valoarea numerică a n necunoscute $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Instrumentele de care dispunem ne permit să facem direct o serie de observaţii şi măsurători pentru determinarea acestor valori sau, mai general, pentru determinarea valorilor unor funcţii cunoscute $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,$ $f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de variabilele $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Fie $b_1,b_2,\ldots,b_m$ valorile numerice astfel obţinute.

Problema este ca din aceste date (funcţiile f_i şi valorile b_i) să deducem cele mai plauzibile valori ale necunoscutelor $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Problema noastră revine la considerarea următorului sistem de ecuaţii

$$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{92}$$

Acest sistem însă nu-l putem considera ca un sistem obişnuit de m ecuaţii cu n necunoscute pentru următoarele motive:

1^o. Ecuaţiile (92) nu sînt nişte ecuaţii în sensul riguros al algebrei, întrucît valorile b_i se obţin, în mod practic, numai cu o anumită precizie. Valorile lor sînt totdeauna afectate de erori, astfel încît b_i nu reprezintă valoarea lui $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ chiar dacă $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ar fi înlocuite cu valorile lor reale, decît cu o anumită aproximaţie. Sistemul (92) este deci, în general, din punct de vedere strict algebric, incompatibil.

2^{o}. Numărul m al ecuaţiilor este în general mult mai mare decît numărul n al necunoscutelor deoarece, principial se presupune că, cu cît mărim numărul observaţiilor şi măsurătorilor pentru determinarea $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu atît mai mult erorile se vor compensa şi se vor elimina.

Trebue să observăm aici că este vorba numai de erorile aşa zise accidentale şi nu de erorile sistematice, provenite din anumite imperfecţiuni ale instrumentelor de observaţie.

Sistemul (92) va trebui deci "rezolvat" printr-un anumit procedeu, care aplicat ne va da valorile $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ cele mai plauzibile ale necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Problema noastră s-a redus la găsirea unui astfel de procedeu de rezolvare. Acest procedeu va fi ales astfel încît erorile

$$\varepsilon_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) - b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{93}$$

să fie cele mai acceptabile, din punctul de vedere al ideii noastre ce ne-o facem despre precizia unor măsurători.

39.- Din punct de vedere matematic, acceptabilitatea erorilor (93) va fi caracterizată de un anumit număr γ, dedus într-un mod determinat din aceste erori. Pe scurt, va fi caracterizată de valoarea unei anumite funcţii $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Cu cît acest număr ε este mai mic (îl presupunem pozitiv), cu atît valorile $\bar{x}_i$ sînt mai plauzibile pentru x_i.

Dacă înlocuim $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ respectiv prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în (93), $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ devine o funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi problema noastră, în definitiv, revine la determinarea minimului acestei funcţii.

Metoda celor mai mici patrate consistă tocmai în procedeul de a lua pentru ε suma patratelor erorilor (93), deci

(94) $$\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_m^2 ,$$

făcînd aici încă o ipoteză suplimentară şi anume că toate măsurătorile influienţează în mod egal calculele noastre, deci că au aceeaşi "greutate". În cazul contrar, se modifică puţin formula (94), introducînd lîngă fiecare patrat ε_i^2 cîte un coeficient pozitiv, reprezentînd greutatea erorii respective.

În conformitate cu această metodă, cele mai plauzibile valori ale necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt acelea care fac minimă expresia,

(95) $$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_i]^2 .$$

Nu este locul să insistăm aici asupra motivelor pentru care tocmai (94) şi nu o altă funcţie de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ (cum ar fi de ex., $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m|$ sau $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_m|$) se aplică în practică. Această motivare se face în calculul probabilităţilor [26].

4o.- Se arată în teoria erorilor de observaţie că putem totdeauna reveni la cazul cînd funcţiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sînt liniare şi omogene în $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deci sînt de forma

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n ,$$

unde a_{ij} sînt numere cunoscute.

Problema noastră revine atunci la un caz particular al problemei de minim tratată la începutul acestui §. Pentru aceasta e destul să luăm m puncte $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (cari nu vor interveni de altfel explicit) şi să definim funcţiile $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ pe aceste puncte prin formulele

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(y_j) &= a_{ji} \\ f(y_j) &= b_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,m .$$

Problema revine atunci la determinarea minimului lui $U[(f-\varphi)^2]$, unde

$$U[f] = \sum_{j=1}^{m} f(y_i), \quad \varphi(x) = x_1\varphi_1(x) + x_2\varphi_2(x) + \ldots + x_n\varphi_n(x).$$

Valorile cele mai plauzibile x_i şi minimul căutat γ se obţine rezolvînd sistemul

$$[\varphi_i\varphi_1]x_1 + [\varphi_i\varphi_2]x_2 + \ldots + [\varphi_i\varphi_n]x_n = [f\varphi_i], \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{96}$$

şi

$$\gamma = [f^2] - [f\varphi_1]x_1 - [f\varphi_2]x_2 - \ldots - [f\varphi_n]x_n ,$$

unde

$$[f^2] = \sum_{r=1}^{m} b_r^2 , \quad [f\varphi_i] = \sum_{r=1}^{m} b_r a_{ri}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$[\varphi_i\varphi_j] = \sum_{r=1}^{m} a_{ri}a_{rj} , \quad i,j = 1,2,\ldots,n .$$

Diferite procedee, constînd în diverse combinaţii ale ecuaţiilor (92) şi în diferite înlocuiri ale variabilelor x cu altele, simplifică calculele efective care trebuiesc executate.

41.- Pentru a termina, dăm o aplicaţie numerică, tratată chiar de GAUSS, creatorul metodei celor mai mici patrate.

Măsurătoarea (în metri) a diferenţelor de înălţimi între puncte Q, R, S, T şi între înălţimea vîrfului P a observatorului din Göttingen au dat ca rezultat

$$Q = P + 64,334 \; ; \quad R = P + 349,366 \; ; \quad R = Q + 283,596 \; ; \tag{97}$$

$$S = Q + 206,580 \; ; \quad S = R - 76,108 \; ; \quad T = R + 648,427 \; ;$$

$$T = S + 719,612 .$$

Acesta este sistemul (92).

Bineînţeles că din aceste ecuaţii nu se vor putea deduce decît înălţimile relative Q-P, R-P, S-P, T-P şi nu înălţimile absolute P, Q, R, S, T.

Pentru a simplifica calculele, în loc de necunoscutele Q-P, R-P, S-P, T-P se pot lua altele, legate în mod simplu de acestea.

Luăm ca necunoscute pe q, r, s, t legate de primele prin ecuaţiile

$$Q = P + 64{,}336 + q, \quad R = P + 348{,}648 + r,$$

(98)

$$S = P + 271{,}727 + s, \quad T = P + 994{,}207 + t.$$

Atunci, exprimînd totul în mm., ecuaţiile (97) devin

$$\begin{aligned} q \qquad\quad &= 0, \\ r \qquad\quad &= 718, \\ q - r \qquad\quad &= 718, \\ q \quad - s \qquad &= 813, \\ r - s \qquad &= -813, \\ r \quad - t &= -2868, \\ s - t &= 2868. \end{aligned}$$

Sistemul (96) devine

$$\begin{aligned} 3q - r - s \qquad &= 1531, \\ -q + 4r - s - t &= -3681, \\ -q - r + 3s - t &= 2868, \\ -r - s + 2t &= 0, \end{aligned}$$

care rezolvat ne dă valorile cele mai plauzibile ale lui q, r, s, t (calculele se fac prin eliminări succesive),

$$q = 991{,}1\ldots, \quad r = -193{,}1\ldots, \quad s = 1395{,}7\ldots, \quad t = 506{,}0\ldots$$

Valorile diferenţelor Q-P, R-P, S-P, T-P se deduc atunci în mod simplu din (98).

5. Completări şi indicaţii bibliografice.

[1].- Calculul valorii unui polinom pentru o valoare dată a variabilei nu necesită decît 3 operaţii fundamentale ale aritmeticei: adunarea, scăderea şi înmulţirea. În problemele practice se utilizează mai cu seamă aşa zise funcţii elementare. Din punct de vedere practic o funcţie este elementară dacă valorile ei se pot obţine

prin operaţii aritmetice aritmetice simple sau cu ajutorul unor tabele dinainte construite şi suficient de extinse.

[2].- Aceasta este forma lui LAGRANGE a restului. Demonstraţia rezultă din cele ce urmează Nr. 5.

[3].- Unicitatea polinomului P(x) se demonstrează astfel. Dacă ar mai exista un polinom Q(x), tot de grad cel mult egal cu n, care să verifice condiţiile (7), diferenţa P(x)-Q(x) ar fi un polinom de grad cel mult egal cu n care s-ar anula în cele n+1 puncte (6). Dar acest lucru nu se poate decît dacă P(x) este identic cu Q(x). Existenţa a cel puţin unui polinom P(x), care verifică condiţiile impuse, rezultă din cele ce urmează.

[4].- A priori nu este evident că P(x), mai precis coeficienţii acestui polinom, se exprimă liniar şi omogen în raport cu valorile $f(x_i)$ ale funcţiei f(x). Se poate însă demonstra acest lucru prin inducţie completă. Să presupunem că proprietatea este adevărată cînd avem numai n noduri $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Fie atunci Q(x) polinomul de interpolare corespunzător. Prin ipoteză Q(x) este de forma

$$Q(x) = A_0 Q_0(x) + A_1 Q_1(x) + \ldots + A_{n-1} Q_{n-1}(x) ,$$

unde $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$ sînt polinoame independente de funcţia f(x), iar $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sînt independenţi de x şi depind liniar şi omogen de valorile $f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Diferenţa P(x)-Q(x) este un polinom de gradul n care se anulează pentru $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Avem deci

$$P(x) - Q(x) = A(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}), \qquad (7')$$

unde A este independent de x. Făcînd $x = x_n$, deducem

$$f(x_n) - Q(x_n) = A(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1}),$$

de unde se vede că A este deasemenea liniar şi omogen în $f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$. Formula (ᵞ) ne arată atunci că proprietatea este adevărată şi pentru n+1 noduri. Pentru $n = 0$, deci pentru un singur nod, proprietatea este imediată.

[5].- Printr-un polinom de gradul n se înţelege un polinom de grad efectiv cel mult egal cu n. Primul coeficient al unui polinom poate să fie egal şi cu 0.

[6].- P.L. CEBÎŞEV a creat teoria celei mai bune aproximaţii studiind mecanismele formate din bare articulate. Cercetările lui CEBÎŞEV, reunite în 4 volume [P.L. CEBÎŞEV, "Polnoe sobranie socinenii, Tom I-IV, Moskva-Leningrad, 1946-1948] au avut şi continuă să aibă o mare influienţă asupra dezvoltării matematicii moderne. Ideile şi rezultatele lui CEBÎŞEV în teoria numerelor, teoria celei mai bune aproximaţii şi în calculul probabilităţilor au deschis noi drumuri spre progresul acestor ramuri ale ştiinţei.

Polinomul căutat aici este polinomul $\omega(x) = x^{n+1} + \ldots$ de gradul n+1, deci cu primul coeficient egal cu 1, care diferă cel mai puţin de zero pe intervalul [a,b]. CEBÎŞEV a arătat că acest polinom e caracterizat de proprietatea că maximul L a lui $|\omega(x)|$, pe intervalul [a,b], este atins cel puţin (deci exact) de n+2 ori. Punctele unde maximul este atins sînt atunci, extremităţile a, b ale intervalului precum şi rădăcinile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale derivatei $\omega'(x)$, care rădăcini sînt neapărat reale, distincte şi cuprinse în intervalul [a,b]. De aici rezultă egalitatea

$$(n+1)^2[L^2 - \omega^2(x)] = (x-a)(b-x)[\omega'(x)]^2,$$

de unde

$$(n+1)\sqrt{L^2 - \omega^2(x)} = \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\omega'(x),$$

deci

$$(n+1)\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{L^2-\omega^2}} ,$$

din care se deduce, efectuînd integralele, forma căutată a lui $\omega(x)$ (precum şi valoarea lui L).

[7].- Proprietatea rezultă din unicitatea polinomului P(x).

[8].- Dacă, în particular, luăm nodurile (15), găsim

$$\beta\alpha = \frac{b-a}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

care rămîne cuprins între $\frac{b-a}{\pi}$ şi $\frac{b-a}{2}$.

[9].- După teorema lui WEIERSTRASS "Über die analytische darstellbarkeit sogenannter Willkürlicher Functionen reeller Argumente", Sitzungsber. Akad. Wissensch. Berlin,
dacă f(x) este o funcţie continuă şi ε un număr pozitiv, putem găsi un polinom P(x) astfel ca

$$(\gamma) \qquad |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

pentru orice x cuprins în [a,b]. Fie n gradul polinomului P(x) şi T(x) polinomul de cea mai bună aproximaţie a lui CEBÎŞEV de gradul n, deci acel polinom de gradul n pentru care $\max_{[a,b]} |f(x)-P(x)|$ este cel mai mic posibil. Din (γ) rezultă atunci

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Însă se ştie că f(x) - T(x) atinge maximul valorii sale absolute pe cel puţin n+2 puncte cu semne alternate, aceste puncte fiind situate în intervalul [a,b]. De aici rezultă că diferenţa f(x) - T(x) se anulează pe cel puţin n+1 puncte distincte din [a,b]. Luînd n+1 astfel de puncte ca noduri, T(x) este polinomul de interpolare a lui LAGRANGE corespunzător. Din vasta bibliografie a polinoamelor de cea mai bună aproximaţie cităm: P.L. CEBÎŞEV, loc. cit.

[6] , tom III ; Serge BERNSTEIN "Leçons sur les propriétés extrémales les,...", Paris 1926; E.BOREL "Leçons sur les fonctions de variables réelles", Paris 1905; T. POPOVICIU "Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame", Cluj 1937.

[10].- Să considerăm pentru fiecare n, un număr de n+1 noduri

(٢٧) $$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$$

Fie atunci $P_n(x)$ polinomul lui LAGRANGE a funcţiei f(x) relativ la nodurile (٢٧). Oricum ar fi alese nodurile (٢٧) se poate găsi o funcţie continuă f(x), pentru care $P_n(x)$ nu tinde către f(x) pe toate punctele intervalului, cînd $n \to \infty$. Acest lucru a fost demonstrat în cazul nodurilor echidistante de către C. RUNGE "Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten" Zeitschr für Math. u. Phy., 46, 224-243, 1901. Pentru cazul general a se vedea G. FABER "Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen" Jahresb. d. D. Math. Ver., 23, 192-210, 1914.

[11].- Numărul $\omega(\delta) = \max |f(x')-f(x'')|$ cînd $|x'-x''| \leq \delta$, se numeşte modulul de oscilaţie al funcţiei f(x). Dacă funcţia este continuă pe intervalul [a,b], avem

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0 .$$

Din definiţia lui $\omega(\delta)$ rezultă inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x'-x''|)$$

şi că $\omega(\delta)$ este o funcţie nedescrescătoare, deci că $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$, pentru $\delta_1 < \delta_2$.

Pentru funcţia de aproximare considerată avem deci

(٢٧٧) $$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a+(i-1)h) + \Delta f(a+(i-1)h).(x-a-(i-1)h)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(a+(i-1)h)| + |\Delta f(a+(i-1)h)|\,|x-a-(i-1)h| ,$$

pe intervalul $[a+(i-1)h, a+ih]$. Dar, pe acest interval,

$$| f(x) - f(a+(i-1)h) | \leq \omega (|x-a-(i-1)h|) \leq \omega(h) ,$$

$$|\Delta f(a+(i-1)h)| \leq \frac{\omega(h)}{h} , \quad | x-a-(i-1)h | \leq h$$

şi deci din (٢٢٢) deducem

$$| f(x) - \varphi(x) | \leq 2\omega(h) = 2\omega(\frac{b-a}{n}) ,$$

formula care este valabilă pe tot intervalul $[a,b]$. Proprietatea cerută rezultă dacă $f(x)$ este o funcţie continuă, întrucît

$$\lim_{n \to \infty} \omega (\frac{b-a}{n}) = 0 .$$

[12].- Serge BERNSTEIN "Démonstration du théorème de WEIERSTRASS fondée sur le calcul des probabilités". Soc. math. Kharkow, (2) 13, 1-2 (1912).

[13].- Această inegalitate clasică se poate demonstra astfel. Polinomul de gradul al doilea

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i x + \beta_i)^2 = Ax^2 + 2Bx + C,$$

rămîne nenegativ, deci $B^2 - AC \leq 0$, de unde $B^2 \leq AC$, deci $B \leq | B | \leq \sqrt{AC}$. Dar,

$$A = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 , \quad B = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_i , \quad C = \sum_{i=0}^{n} \beta_i^2 .$$

[14].- A se vedea articolul citat a lui S. BERNSTEIN [12]. Polinoamele lui S. BERNSTEIN dau deci o demonstraţie extrem de elegantă teoremei lui WEIERSTRASS [9].

Demonstraţia se aplică cu puţine modificări oricărei funcţii continue. Reluînd modul de oscilaţie $\omega(\delta)$ [11], observăm că avem şi

$$\omega(k\delta) \leq (k+1)\omega(\delta) ,$$

oricare ar fi numărul pozitiv k. Avem atunci

$$\omega(|x-a-ih|) \leq \left(\frac{|x-a-ih|}{\delta} + 1\right) \omega(\delta)$$

de unde

$$|R(x)| \leq \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n} \omega(|x-a-ih|)\binom{n}{i}(x-a)^i(b-x)^{n-i} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\psi(x)}{\delta(b-a)^n} + 1\right) \omega(\delta) \leq \left(\frac{b-a}{2\sqrt{n}} + 1\right)\omega(\delta).$$

Dacă luăm $\delta = \frac{b-a}{\sqrt{n}}$, deducem

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Pentru acest rezultat a se vedea T. POPOVICIU "Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieurs", Mathematica, 1o, 49-54 (1934) şi "Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par des polinomes", Annales Sci. Univ. Jassy, 28, 2o8 (1942).

[15].- Vezi prima noastră lucrare citată mai sus [14] sau cărticică citată la [9].

[16].- A se vedea T. POPOVICIU "Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)", Bull. Math. Soc. Roumaine des Sci., 43,85-141 (1942).

[17].- Orice functie derivată se bucură de proprietatea că ia toate valorile cuprinse între două valori alei ei. Membrul întîi fiind media aritmetică a valorilor $f''(\theta_i)$, este cuprinsă între cel mai mare şi cel mai mic dintre aceste numere. Pe baza proprietăţii de mai sus există deci un θ cuprins în cel mai mic interval (deci, à fortiori, în intervalul [a,b]) care conţin punctele θ_i.

[18].- Metoda prin care am obţinut formula lui GAUSS se datoreşte lui A.A. MARKOFF, "Sur la méthode de GAUSS pour le calcul approché des intégrales", Math. Annalen, 25, 427-432 (1885) sau "Differenzenrechnung", Leipzig 1896.

[19].- Acest lucru rezultă din proprietatea semnalată la [17] pe baza căreia, dacă o funcţie derivată este diferită de zero pe un interval [a,b] , ea îşi păstrează semnul pe acest interval.

[2o].- Relaţiile de ortogonalitate determină polinomul P_n, afară de un factor constant. Normalitatea are de scop a fixa această constantă.

[21].- Vezi: Gábor SZEGÖ, "Orthogonal polynomials", 1939, p. 26.

[22].- Formula ne arată, pe baza ipotezei făcute asupra lui U[f], că Δ_n nu poate fi negativ. Pozitivitatea lui Δ_n pentru orice n nu are loc decît în anumite cazuri şi anume, atunci cînd U[f] nu se reduce la forma finită (7o). În general, pentru funcţiile continue f(x), U[f] se exprimă sub forma unei integrale a lui STIELTJES

$$U[f] = \int_{\infty}^{+\infty} f(x)d\alpha(x) ,$$

unde $\alpha(x)$ este o funcţie nedescrescătoare. Avem $\Delta_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, dacă şi numai dacă $\alpha(x)$ nu se reduce la o funcţie avînd un număr finit de discontinuităţi, fiind constantă pe intervalele dintre aceste discontinuităţi.

[23].- Formula în esenţă este datorită lui P.L. CEBÎŞEV. Vezi loc. cit. [6] tom III, sau T. POPOVICIU loc. cit. [16].

[24].- Deci o valoare cuprinsă între maximul şi minimul acestor valori.

[25].- Pentru discuţia sistemelor liniare, determinanţii constituie un instrument teoretic foarte util. În calculele numerice ele prezintă însă complicaţii inutile şi din această cauză au o importanţă minimă.

[26].- Numărul $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m|$ este inacceptabil, întrucît poate fi foarte mic şi în acelaşi timp cîteva din erorile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots,$

foarte mari în valoare absolută. Numărul $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_m|$ este inacceptabil, întrucît în cazuri foarte simple, poate duce la nedeterminarea necunoscutelor. Astfel $\min (|x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|) =$ $= 4$ şi are loc pentru orice valoare a lui x cuprinsă între 1 şi 2. Dacă se ia (94), în cazul cînd avem o singură necunoscută x_1 pentru care s-au măsurat direct valorile $b_1, b_2, \ldots, b_m$, avem

$$\min \sum_{i=1}^{m} (x_1 - b_i)^2$$

tocmai pentru media aritmetică

$$\bar{x}_1 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m}$$

a valorilor măsurate, deci tocmai valoarea cea mai probabilă a lui x_1.