REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE

STR. ACADEMIEI 14 – TELEFON 14.46.53 – BUCUREŞTI

## SUMAR

Seria A, nr. 6, vol. LXXII, iunie 1967

STUDII ŞI NOTE

Pag.

*I. D. V. Ionescu* : Descompunerea unei funcţii raţionale în funcţii raţionale simple şi diferenţe divizate . . . . . 201

ÎNVĂŢĂMÎNT

*2. Gr. Bănescu, E. Georgescu-Buzău* : Funcţii inverse . . . . . 205

*3. A. A. Stoliar* : Limbajul logico-matematic în predarea matematicii . . . 216

VIAŢA ŞTIINŢIFICĂ

*4. * * ** : Congresul internaţional al matematicienilor, Moscova, 16—26 august 1966 . . . . . 223

DATE ASTRONOMICE

*5. V. Daimaca* : Fenomene cereşti în luna iulie . . . . . 240

COMITETUL DE REDACŢIE

Val. Bădin, asist.; Z. Bogdanov, prof.; Gh. Galbură, prof. univ.; E. Georgescu-Buzău, prof.; Şt. Gheorghiţă, conf. univ.; I. Grigore, prof. emerit; A. Hollinger prof. emerit, conf. univ. (redactor responsabil); I. Hasieviei, prof.; S. Marcus, prof. univ.; Alice Motaş, prof.

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA A

PUBLICAŢIE PENTRU STUDIUL ŞI RĂSPÎNDIREA ŞTIINŢELOR MATEMATICE

Volumul LXXII * Nr. 6 iunie 1967

STUDII ŞI NOTE

# DESCOMPUNEREA UNEI FUNCŢII RAŢIONALE ÎN FUNCŢII RAŢIONALE SIMPLE ŞI DIFERENŢE DIVIZATE

D. V. IONESCU

În această lucrare se arată că funcţia raţională

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}\,(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_p)^{\alpha_p}}, \tag{1}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sînt numere naturale astfel ca $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$, iar $P(x)$ este un polinom de gradul $n-1$ cel mult, este identică cu diferenţa divizată a funcţiei de $u$, $\dfrac{P(u)}{x-u}$ pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_p$, multiple de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, adică avem identitatea

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_p)^{\alpha_p}} = \left[\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{\alpha_1},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{\alpha_2},\underbrace{x_p,\ldots,x_p}_{\alpha_p};\frac{P(u)}{x-u}\right]. \tag{2}$$

Dacă scriem diferenţa divizată sub forma unui cît de doi determinanţi, formula (1) devine

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x)^{\alpha_p}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{n-2} & \dfrac{P(x_1)}{x-x_1} \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & {}^{(n-2)}\,x_n^{n-3} & \dfrac{P(x_1)}{(x-x_1)^2}+\dfrac{P'(x_1)}{x-x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ldots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^{n-2} & \dfrac{P(x_2)}{x-x_2} \\ 0 & 1 & 2x_2 \ldots & {}^{(n-2)}\,x_2^{n-3} & \dfrac{P(x_2)}{(x-x_2)^2}+\dfrac{P'(x_2)}{x-x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ldots & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{V\underbrace{(x_1,\ldots,x_1}_{\alpha_1},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{\alpha_2},\ldots,\underbrace{x_p,\ldots,x_p}_{\alpha_p})} \tag{3}$$

BIBLIOTECA FACULT.

unde $V(x_1, \ldots, x_1, \ldots v)$ este determinantul generalizat al lui Vandermonde cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_p$ multiple de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ și $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

Dezvoltînd determinantul din membrul al doilea de la numărător după elementele ultimei coloane, se va obține formula care dă descompunerea funcției raționale (1) în funcții raționale simple.

1. Este evident că pentru demonstrarea identității (3) ne putem mărgini la cazul cînd $P(x) = x^k$ unde $k$ este unul din numerele $0, 1, \ldots, n-1$. Vom face demonstrarea identității (3) în primul rînd pentru cazul cînd nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt distincte.

Avem

$$\left[x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{u^k}{x-u}\right] = \frac{1}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-2} & \dfrac{x_1^k}{x-x_1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} & \dfrac{x_2^k}{x-x_2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} & \dfrac{x_n^k}{x-x_n} \end{vmatrix}$$

sau

$$\left[x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{u^k}{x-u}\right] = \frac{1}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x-x_1 & x_1(x-x_1) & \ldots & x_1^{n-2}(x-x_1) & x_1^k \\ x-x_2 & x_2(x-x_2) & \ldots & x_2^{n-2}(x-x_2) & x_2^k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ x-x_n & x_n(x-x_n) & \ldots & x_n^{n-2}(x-x_n) & x_n^k \end{vmatrix} \tag{4}$$

Se demonstrează fără greutate că

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_1(x-x_1) & \ldots & x_1^{n-2}(x-x_1) & x_1^k \\ x-x_2 & x_2(x-x_2) & \ldots & x_2^{n-2}(x-x_2) & x_2^k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ x-x_n & x_n(x-x_n) & \ldots & x_n^{n-2}(x-x_n) & x_n^k \end{vmatrix} =$$

$$= x^k \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} & -x_1^{k+1} & \ldots & -x_1^{n-1} & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{k-1} & -x_2^{k+1} & \ldots & -x_2^{n-1} & x_2^k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{k-1} & -x_n^{k+1} & \ldots & -x_n^{n-1} & x_n^k \end{vmatrix}$$

adică

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_1(x-x_1) & \ldots & x_1^{n-2}(x-x_1) & x_1^k \\ x-x_2 & x_2(x-x_2) & \ldots & x_2^{n-2}(x-x_2) & x_2^k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ x-x_n & x_n(x-x_n) & \ldots & x_n^{n-2}(x-x_n) & x_n^k \end{vmatrix} = x^k V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$



Formula (4) se reduce prin urmare la

$$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_u; \frac{u^k}{x-u}\right], \tag{5}$$

ceea ce înseamnă că formula (3) este demonstrată.

2. În identitatea

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{P(u)}{x-u}\right],$$

care se mai scrie

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \ldots x_1^{n-2} & \dfrac{P(x_1)}{x-x_1} \\ 1 & x_2 \ldots x_2^{n-2} & \dfrac{P(x_2)}{x-x_2} \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \quad \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \ldots x_n^{n-2} & \dfrac{P(x_n)}{x-x_n} \end{vmatrix}}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

să facem ca $\alpha_1$ noduri să tindă către nodul $x_1$, $\alpha_2$ noduri să tindă către nodul $x_2, \ldots, \alpha_p$ noduri să tindă către nodul $x_p$, nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_p$ fiind distincte. Vom obține identitatea (3).

3. Dacă se dezvoltă determinantul de la numărător din identitatea (3) după elementele ultimei coloane, se obține o formulă de forma

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_p)^{\alpha_p}} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{A_{j,0}}{(x-x_j)^{\alpha_j}} + \frac{A_{j,1}}{(x-x_j)^{\alpha_j-1}} + \ldots + \frac{A_{j,\alpha_j-1}}{x-\alpha_j}\right), \tag{5}$$

unde $A_{j,0}, A_{j,1}, \ldots, A_{j,\alpha_j-1}$ sînt constante și care este tocmai dezvoltarea funcției raționale (1) în funcții raționale simple.

Prin urmare, aplicarea identității (3), pentru obținerea identității (5), constituie o metodă pentru descompunerea funcției raționale (1) în funcții raționale simple.

Vom ilustra această metodă pe un exemplu.

Să considerăm funcția rațională

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)^2}$$

și avînd în vedere descompunerea ei în funcții raționale simple, să aplicăm

identitatea (3). Vom avea

$$f(x)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dfrac{P(x_1)}{x-x_1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dfrac{P(x_1)}{(x-x_1)^2}+\dfrac{P'(x_1)}{x-x_1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dfrac{P(x_2)}{x-x_2} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \dfrac{P(x_2)}{(x-x^2)^2}+\dfrac{P'(x_2)}{x-x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{vmatrix}},$$

în care facem

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad P(x)=x^2+x+1.$$

Numitorul este

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1\,.$$

Vom avea deci

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x} \\ 1 & 1 & 1 & \dfrac{3}{x-1} \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1} \end{vmatrix}$$

şi dezvoltînd acest determinant după elementele ultimei coloane, vom avea

$$f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}-\frac{1}{x}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$



adică

$$f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{6}{x-1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$$

Avem prin urmare descompunerea în funcţii raţionale simple

$$\frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}.$$

ÎNVĂŢĂMÎNT

## FUNCŢII INVERSE

GR. BĂNESCU, E. GEORGESCU-BUZĂU

Acest articol trebuie privit ca o continuare a articolelor noastre: „Noţiunea de funcţie şi predarea ei în liceu" G.M-A nr. 12/1966 şi „Compunerea funcţiilor" G.M-A nr.4/1967.

Deoarece în legătură cu noţiunea de funcţie inversă apar o serie de neclarităţi, ne propunem prin acest articol să aducem precizările de care se simte nevoie.

### I. Inversa la stînga a unei funcţii date

*Definiţie.* Fie aplicaţia $f: E \to F$ şi $e_E$ aplicaţia identică a mulţimii $E$. Dacă există o funcţie $f_s^{-1}: F \to E$ cu proprietatea $f_s^{-1} \circ f = e_E$ se spune că funcţia $f_s^{-1}$ este *inversabilă la stînga*, iar funcţia $f_s^{-1}$ se numeşte *inversă la stînga* a funcţiei $f$.

Pentru a sugera înţelesul definiţiei, vom folosi schema din figura 1.

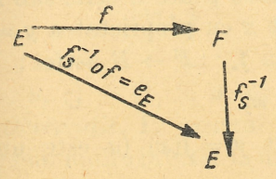



Fig. 1

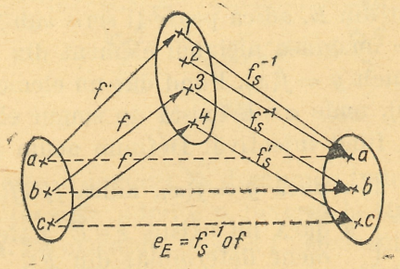



Fig. 2

*Exemplu.* Fie aplicaţia $f: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, definită prin schema din figura 2. În aceeaşi figură s-a pus în evidenţă funcţia $f_s^{-1}: \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$, care este o inversă la stînga a funcţiei $f$.

*Observaţie.* În general, o funcţie care admite o inversă la stînga admite mai multe inverse la stînga. De exemplu, funcţia $f$ reprezentată în figura 2