E 17

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 437-439 (6 mars 1967). Série A

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Contributions à l'étude qualitative des oscillations non linéaires. Oscillations harmoniques.* Note (*) de M. **Ioan Muntean**, présentée par M. Henri Villat.

Dans cette Note, on donne pour certains systèmes différentiels des critères d'existence d'une oscillation harmonique au moins, c'est-à-dire d'une solution périodique ayant la même période que les seconds membres (1).

Théorème 1. — *Soit le système d'équations différentielles*

$$\dot{x} = h(y) - \mathrm{F}(x) + \mathrm{E}(t), \qquad \dot{y} = -g(x), \tag{1}$$

pour lequel les conditions suivantes sont remplies : les fonctions E, F, g, $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *sont continues, satisfont à une hypothèse assurant l'unicité de chaque solution du problème de Cauchy pour le système* (1), *la fonction* E *est périodique de période* $\lambda \neq 0$ *et il existe des nombres positifs* a, b, c *et* y_0, *avec* $a < b$, *tels que*

(i) $|x| \geqq a \Rightarrow \mathrm{F}(x) \operatorname{sign} x > \alpha$;

(ii) $|x| \geqq b \Rightarrow \mathrm{F}(x) \operatorname{sign} x > \alpha + \max(\delta, \varepsilon)$, *où*

$$\alpha = \sup_{t \in \mathrm{R}} |\mathrm{E}(t)|, \qquad \beta = \max_{|x| \leqq a} |\mathrm{F}(x)|, \qquad \gamma = \max_{|x| \leqq a} |g(x)|, \qquad \varepsilon = \max_{|y| \leqq c} |h(y)|$$

et

$$\delta = (\alpha + \beta)(1 + \gamma);$$

(iii) $|x| \geqq a \Rightarrow g(x) \operatorname{sign} x > 0$;

(iv) $\lim_{|x| \to \infty} \mathrm{G}(x) = \infty$, *où* $\mathrm{G}(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$;

(v) $y \neq 0 \Rightarrow h(y) \operatorname{sign} y > 0$, $|y| \geqq c \Rightarrow h(y) \operatorname{sign} y > \delta$, $a \leqq c\delta$;

(vi) $\mathrm{H}(-y_0) \geqq \mathrm{H}(y_0) \geqq d + \max[\mathrm{H}(c), \mathrm{H}(-c)]$, *où*

$$\mathrm{H}(y) = \int_0^y h(\eta)\, d\eta \qquad \textit{et} \qquad d = a(1 + \gamma) + \max[\mathrm{G}(b), \mathrm{G}(-b)].$$

Alors le système (1) *possède au moins une solution harmonique.*

Remarque 1. — Le théorème précédent constitue une extension, même pour le cas $h(y) = y$, d'un résultat de G. E. Reuter (6). Des résultats analogues ont été annoncés par W. Müller (4) pour le système

$$\dot{x} = h(y) - \mathrm{F}(x) + p(t, x, y), \qquad \dot{y} = -(gx) + q(t, x, y).$$

Théorème 2. — *Soit le système d'équations différentielles*

$$\dot{x} = h(y), \qquad \dot{y} = -g(x) - \mathrm{F}(y) + e(t), \tag{2}$$

pour lequel les conditions suivantes sont remplies : les fonctions e, F, g, $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *sont continues, satisfont à une hypothèse assurant l'unicité de*

9999 70

chaque solution du problème de Cauchy pour le système (2), *la fonction e est périodique de période* $\lambda \neq 0$, *et*

(i) *il existe des nombres positifs* ε *et* $\overline{Y}$, *tels que*

$$|y| \geqq \overline{Y} \quad \Rightarrow \quad F(y)\operatorname{sign} y \geqq m + 2\varepsilon, \qquad \inf_{|y| \geqq \overline{Y}} h(y)\operatorname{sign} y > 0;$$

(ii) *il existe* $\overline{X} > 0$ *tel que* $2\overline{Y} \leqq \varepsilon \overline{X}$ *et*

$$|x| \geqq \overline{X} \quad \Rightarrow \quad g(x)\operatorname{sign} x > (1 + \overline{h})(m + \overline{F}) + \varepsilon,$$

où

$$\overline{F} = \max_{|y| \leqq \overline{Y}} |F(y)|, \qquad \overline{h} = \max_{|y| \leqq \overline{Y}} |h(y)|, \qquad m = \sup_{t \in R} |e(t)|.$$

Alors le système (2) *possède au moins une solution harmonique.*

Remarque 2. — Le théorème 2 est une généralisation d'un résultat de S. Mizohata et M. Yamaguti (2).

Théorème 3. — *Soit donné le système d'équations différentielles*

$$\dot{x} = h(y), \qquad \dot{y} = -f(x, y)\, y - g(x) + e(t) \tag{3}$$

assujetti aux conditions suivantes :

(i) *Les fonctions* $f : R^2 \to R$, $e, g, h : R \to R$ *sont continues, satisfont à une hypothèse assurant l'unicité de chaque solution du problème de Cauchy pour le système* (3) *et la fonction e est périodique;*

(ii) *Il existe des nombres positifs a, b,* M *tels que*

$$|x| \geqq b, \qquad 0 \leqq y \operatorname{sign} x \leqq a \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \geqq -M;$$
$$x^2 + y^2 \geqq b^2, \qquad |y| \geqq a \quad \Rightarrow \quad |y| f(x, y) > E + A,$$

où

$$E = \sup_{t \in R} |e(t)|, \qquad A = \max_{|x| \leqq a} |g(x)| + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \varepsilon > 0;$$

(iii) $\lim\limits_{|x| \to \infty} g(x)\operatorname{sign} x > Ma + E$:

(iv) $y \neq 0 \Rightarrow yh(y) > 0$ *et* $\lim\limits_{|y| \to \infty} \int_0^y h(\eta_1)\, d\eta_1 = \infty$.

Alors le système (3) *possède au moins une solution harmonique.*

Remarque 3. — Le théorème 3 contient les résultats établis par I. Muntean (3) et Z. Opial (5).

Théorème 4. — *Si pour le système* (3) *la condition* (i) *du théorème* 3 *est remplie et, de plus, ont lieu les conditions :*

A. *Il existe des nombres positifs a et* δ *et le nombre réel* M, *tels que*

$$|x| < a; |x| > a \quad \text{et} \quad 0 \leqq y \operatorname{sign} x \leqq a \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \geqq -M,$$
$$x \geqq a \quad \text{et} \quad y \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y)\, y + g(x \geqq e_1 + \delta,$$
$$x \leqq -a \quad \text{et} \quad y \leqq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y)\, y + g(x) \geqq e_2 - \delta,$$

où

$$e_1 = \sup_{t \in R} e(t), \qquad e_2 = \inf_{t \in R} e(t);$$

B. $|x| > a$ *et* $y \operatorname{sign} x \leqq -a \Rightarrow f(x, y) \geqq \delta$;

C. $|x| > a$ *et* $y \operatorname{sign} x \geqq z \operatorname{sign} x > a \Rightarrow f(x, -y) + f(x, z) \geqq \delta$;

D. $|x| > a \Rightarrow g(x) \operatorname{sign} x \geqq 0$;

E. *La fonction h est impaire, non décroissante,*

$$y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{h(y)} \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y \to \infty} h(y) = \infty.$$

Alors le système (3) *possède au moins une solution harmonique.*

Remarque 4. — Le théorème 4 est une généralisation d'un théorème de G. Villari (7).

Pour démontrer les théorèmes précédents on prouve au début que toutes les solutions des systèmes considérés sont relativement bornées (ou même globalement bornées) dans un ensemble compact et simplement connexe K du plan x, y. Pour les théorèmes 1, 2 et 3 la frontière de l'ensemble K est donnée par l'équation $V(x, y) = c$, où $c > 0$ et

$$V(x, y) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi + \int_0^y h(\eta)\, d\eta + U(x, y),$$

avec une fonction U linéaire par morceaux et convenablement choisie. Dans le cas du théorème 4, cette frontière est formée des arcs de trajectoires des certains systèmes autonomes attachés au système (3).

L'existence des solutions harmoniques est déduite ensuite du principe bien connu de Brouwer sur les points fixes.

(*) Séance du 20 février 1967.

(1) *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 397.
(2) S. Mizohata et M. Yamaguti, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto*, 27, 1952, p. 109-113.
(3) I. Muntean, *Solutions bornées et solutions périodiques pour certains systèmes d'équations différentielles* (*Lucrările celui de al IV-lea Congres al Matematicienilor Romîni*, 1956, p. 156-157, Édit. Acad. R. P. R., Bucureşti, 1960).
(4) W. Müller, *Beschränktheitssätze für die Lösungen eines Systems von zwei Differentialgleichungen* (*Internat. Congress of Math.*, Moscow, 1966; *Abstract of brief Sc. Commun.*, sect. 6, p. 13).
(5) Z. Opial, *Ann. Polon. Math.*, 7, 1960, p. 241-246.
(6) G. E. Reuter, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47, 1951, p. 48-54.
(7) G. Villari, *Ann. di mat. pura ed appl.*, 65, 1964, p. 153-166.

(*Institutul de Calcul, Str. Republici* nº 37,
Cluj, République Socialiste de Roumanie.)