# EIN FÄRBUNGSPROBLEM DER KNOTENPUNKTE EINES GRAPHEN BEZÜGLICH DER DISTANZ $p$

VON

FLORICA KRAMER und HORST KRAMER

(Cluj)

In dieser Arbeit betrachten wir ein Färbungsproblem der Kontenpunkte eines ungerichteten Graphen, in dem je zwei Knotenpunkte deren Distanz kleiner als eine gegebene natürliche Zahl $p$ ist, stets verschiedene Farben zugeordnet werden.

Ein Graph $G = (X,U)$ besteht aus einer nichtleeren Menge $X$, deren Elemente Knotenpunkte genannt werden, und einer Menge $U$, deren Elemente nichtgeordnete Paare $(x, y)$ mit $x \in X$ und $y \in X$ sind und Kanten genannt werden. Eine Schlinge ist eine Kante der Form $(x, x)$. In dem nun folgenden betrachten wir nur endliche, ungerichtete, schlingenlose Graphen, in denen jedes Knotenpunktepaar höchstens durch eine Kante verbunden ist. Ein Graph $G$ ist vollständig, falls in ihm je zwei Knotenpunkte stets durch eine Kante verbunden sind. Wir wollen einen Graphen $G'$ Teilgraph eines Graphen $G$ nennen, falls die Knotenpunkte bzw. die Kanten von $G'$ zugleich Knotenpunkte bzw. Kanten von $G$ sind.

Ein Weg in einem Graphen $G$ ist eine abwechselnde Folge von Knotenpunkten und Kanten des Graphen $G$ der Form:

$$a_1,\ (a_1, a_2),\ a_2, (a_2, a_3),\ a_3, \ldots,\ a_{m-1},\ (a_{m-1}, a_m),\ a_m$$

d.h. jede Kante der Folge verbindet die beiden danebenstehenden Knotenpunkte und in der Folge wiederholt sich kein Knotenpunkt. Ein Kreis ist ein geschlossener Weg, d.h. sein erster und letzter Knotenpunkt fallen zusammen. Die Länge eines Weges bzw. eines Kreises soll gleich der Kantenanzahl des Weges bzw. des Kreises sein. Ein Graph $G$ heißt zusammenhängend, wenn zu je zwei Knotenpunkten stets ein Weg exi-

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIV, N° 7, P. 1031–1038. BUCAREST, 1969

stiert, der die beiden Knotenpunkte verbindet. Ein Baum ist ein endlicher, zusammenhängender, kreisloser Graph. Ist ein Knotenpunkt $a$ der Endpunkt sämtlicher Kanten eines Baumes, so heißt der Baum ein Stern und $a$ sein Zentrum. Unter dem Grad $g(a)$ eines Knotenpunktes $a$ in einem Graphen $G$ verstehen wir die Anzahl der Kanten, die den Knotenpunkt $a$ als Endpunkt besitzen. Die Anzahl der Knotenpunkte eines Graphen $G = (X,U)$ bezeichnen wir mit $|X|$.

Unter der Distanz $d(x, y)$ zweier Knotenpunkte $x$ und $y$ eines Graphen $G$ verstehen wir die Länge des kürzesten Weges in $G$, der die beiden Knotenpunkte verbindet. Sind zwei Knotenpunkte $x$ und $y$ eines Graphen $G$ durch keinen Weg verbunden so wird die Distanz $d(x, y)$ gleich $\infty$ genommen. Der Diameter eines Graphen $G = (X,U)$ ist gleich der größten Distanz zweier Knotenpunkte aus $X$ und wird mit $D(G)$ bezeichnet. Es ist

$$D(G) = \max_{x,\, y \in X} d(x, y).$$

Ist $a$ ein Knotenpunkt des Graphen $G$ so bezeichnen wir mit $G-a$ den Graphen, den man aus $G$ durch das Entfernen des Knotenpunktes $a$ und aller Kanten, die $a$ als Endpunkt besitzen, erhält.

Wir betrachten nun folgendes Färbungsproblem der Knotenpunkte eines Graphen:

Es sei $G = (X,U)$ ein endlicher, schlingenloser Graph und $p$ sei eine natürliche Zahl. Man erhält eine zulässige Färbung der Knotenpunkte des Graphen $G$ bezüglich der Distantz $p$, indem man jedem Knotenpunkt eine Farbe so zuordnet, daß dabei je zwei Knotenpunkte $x$ und $y$ stets verschiedene Farben erhalten, falls $1 \leqq d(x, y) \leqq p$ gilt. Die kleinste Anzahl der Farben, mit der eine zulässige Färbung bezüglich der Distanz $p$ für den Graphen $G$ möglich ist, bezeichnen wir mit $K(p,G)$. Sind $G_1, G_2, \ldots, G_m$ die zusammenhängenden Bestandteile eines nichtzusammenhängenden, schlingenlosen Graphen, so ist offensichtlich:

$$K(p, G) = \max_{i = 1,2,\ldots,m} K(p, G_i).$$

Offensichtlich ist für einen jeden endlichen, schlingenlosen Graphen $G = (X,U)$ die Ungleichung $K(p, G) \leqq |X|$ erfüllt. Wir werden nun untere Schranken für die Zahl $K(p, G)$ angeben. Es gilt:

(1) Ist $G = (X, U)$ ein schlingenloser, endlicher, zusammenhängender Graph, der mindestens $(p + 1)$ Knotenpunkte enthält, so ist

$$K(p, G) \geqq p + 1.$$

Enthält nämlich $G$ einen Weg der Länge $p$ $a_1, (a_1, a_2), a_2, \ldots, a_p, (a_p, a_{p+1}), a_{p+1}$ so müssen die Knotenpunkte $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p + 1)$ in jeder zulässigen Färbung des Graphen $G$ mit $p + 1$ verschiedenen Farben gefärbt werden.

Enthält $G$ keinen Weg der Länge $p$, so ist $D(G) \leqq p$ und somit müssen alle $|X|$ Knotenpunkte des Graphen $G$ mit $|X|$ verschiedenen Farben gefärbt werden.



Es gilt folglich für jeden endlichen, schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen $G = (X, U)$ die Ungleichung:

$$\min \{p + 1, |X|\} \leqq K(p, G) \leqq |X|. \tag{1}$$

Aus dem obigen folgt auch die Gültigkeit des Satzes 1.

SATZ 1. *In einem endlichen, schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen $G = (X,U)$ ist $K(p, G) = |X|$ genau dann, wenn $D(G) \leqq p$.*

In dem nun folgenden suchen wir diejenigen Graphen, für die $K(p, G) = p + 1$ ist. Es gilt der

SATZ 2. *Es sei $G = (X, U)$ ein endlicher, schlingenloser, zusammenhängender Graph und $p$ eine natürliche Zahl, $p \geqq 2$. Es ist $K(p,G) = p + 1$ genau dann, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:*

(a) $|X| = p + 1$,
(b) *Der Graph $G$ besteht aus einem Weg der Länge $> p$,*
(c) *Der Graph $G$ besteht aus einem Kreis, dessen Länge ein Vielfaches von $p + 1$ ist.*

*Beweis.* I. Es sei $G = (X,U)$ ein Graph, der die Bedingung (a) erfüllt. Da $|X| = p + 1$ ist und da $G$ zusammenhängend ist, folgt $D(G) \leqq p$ und somit nach Satz 1 $K(p, G) = |X| = p + 1$.

$G$ erfülle die Bedingung (b), d.h. $G$ bestehe aus dem Weg $a_1, (a_1, a_2), a_2, (a_2, a_3), a_3, \ldots, a_p, (a_p, a_{p+1}), a_{p+1}, \ldots, a_{m-1}, (a_{m-1}, a_m), a_m$ dessen Länge größer als $p$ ist. Auf Grund der Ungleichung (1) folgt $K(p, G) \geqq p + 1$. Eine zulässige Färbung mit $(p + 1)$ Farben ist folgende: der Knotenpunkt $a_i$ wird mit der Farbe $F_h$ gefärbt falls $(i - h)$ durch $(p + 1)$ teilbar ist $(h = 1, 2, \ldots, p, p + 1)$. Es folgt $K(p, G) = p + 1$.

Es sei nun $G$ ein Graph, der die Bedingung (c) erfüllt, also ein Kreis dessen Länge ein Vielfaches von $(p + 1)$ ist:

$$a_1, (a_1, a_2), a_2, (a_2, a_3), a_3, \ldots, a_{(mp+1)}, (a_{m(p+1)}, a_1), a_1.$$

Ebenso wie vorher folgt aus $|X| \geqq p + 1$, daß $K(p, G) \geqq p + 1$ ist. Und die Färbung, in der der Knotenpunkt $a_i$ mit der Farbe $h$ $(h = 1, 2, \ldots, p + 1)$ gefärbt wird, falls $(i - h)$ durch $(p + 1)$ teilbar ist, ist eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von $G$ mit $(p + 1)$ Farben. Es folgt auch in diesem Falle $K(p, G) = p + 1$.

II. Es sei $G = (X, U)$ ein endlicher, schlingenloser, zusammenhängender Graph mit $K(p, G) = p + 1$.

Ist $D(G) \leqq p$, so folgt nach Satz 1 $K(p, G) = |X|$. Es ist somit auf Grund unserer Voraussetzung $|X| = p + 1$ und wir sind im Falle (a).

Ist $D(G) > p$, so gibt es in $G$ einen Weg, der länger als $p$ ist. Es sei $W = a_1, (a_1, a_2), a_2, (a_2, a_3), a_3, \ldots, a_n, (a_n, a_{n+1}), a_{n+1}$ einer der längsten Wege des Graphen $G$. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ sei die Menge der Knotenpunkte des Weges $W$.

Wir nehmen an es sei $A \neq X$. Da der Graph $G$ zusammenhängend ist und $W$ einer der längsten in $G$ enthaltenen Wege ist, folgt aus $A \neq X$,

die Existenz eines Knotenpunktes $b$ aus $X$, der in $G$ mit einem der Knotenpunkte $a_2, a_3, \ldots, a_n$ des Weges $W$ durch eine Kante verbunden ist. Es sei $a_i$ der Knotenpunkt des Weges $W$ mit dem $b$ durch eine Kante verbunden ist. Es sei $W'$ ein Teilweg von $W$ der Länge $p$, der die Knotenpunkte $a_{i-1}$, $a_i$, $a_{i+1}$ enthält, und es sei $G'$ der Teilgraph des Graphen $G$, der aus dem Weg $W'$, dem Knotenpunkt $b$ und der Kante $(b, a_i)$ besteht. $G'$ ist also ein zusammenhängender Teilgraph von $G$ mit $(p+2)$ Knotenpunkten und $D(G') = p$. Folglich ist $K(p, G') = p+2$. Dann wäre aber auch $K(p, G) \geqq p+2$. Unsere Annahme $A \neq X$ führt somit zu einem Widerspruch. Es folgt $A = X$. Die Kantenmenge des Weges $W$ bezeichnen wir mit $V$. Es können zwei Fälle eintreten:

1) $V = U$. In diesem Falle ist also $G$ mit dem Weg $W$ identisch. Der Graph $G$ erfüllt somit die Bedingung (b).

2) $V \neq U$. Dann gibt es eine Kante $(a_i, a_j)$ $(j - i > 1)$, so daß $(a_i, a_j) \in U$ und $(a_i, a_j) \notin V$. Wir nehmen an wir hätten nicht $i = 1$, $j = n+1$. Ist $j - i \geqq p$, so ist der Teilgraph $G'$, der aus dem Teilweg von $W$ zwischen den Knotenpunkten $a_{i-1}$ und $a_{i+p-1}$ (falls $i \neq 1$ ist) bzw. zwischen den Kontenpunkten $a_{j-(p-1)}$ und $a_{j+1}$ (falls $i = 1$ ist) und der Kante $(a_i, a_j)$ und dem Knotenpunkt $a_j$ in dem ersten Fall bzw. dem Kontenpunkt $a_i$ in dem zweiten Fall, gebildet wird, ein Graph mit $(p+2)$ Knotenpunkten und mit $D(G') = p$. Wir hätten dann wieder $K(p, G) \geqq p+2$. Ist $j - i < p$, so sei $W'$ ein Teilweg von $W$ der Länge $(p+1)$ und der die beiden Knotenpunkte $a_i$ und $a_j$ enthält. Es sei dann $G'$ der Teilgraph von $G$, der aus $W'$ und der Kante $(a_i, a_j)$ gebildet wird. Der Graph $G'$ enthält ebenfalls $(p+2)$ Knotenpunkte und es ist $D(G') \leqq p$. Es folgt wieder $K(p, G) \geqq p+2$. Unsere Annahme, wir hätten nicht $i = 1$, $j = n+1$, führte in beiden Fällen zu einem Widerspruch.

Es sei also $i = 1$ und $j = n+1$. Dann bildet der Weg $W$ zusammen mit der Kante $(a_1, a_{n+1})$ einen Kreis $C$. Auf Grund des eben Bewiesenen, folgt, daß der Graph $G$ keine anderen Knotenpunkte und Kanten außer denen des Kreises $C$ enthalten kann. $G$ ist also ein Kreis. Aus $K(p, G) = p+1$, folgt, daß die Länge dieses Kreises ein Vielfaches von $(p+1)$ sein muß. Der Graph $G$ erfüllt somit die Bedingung (c). Damit ist Satz 2 bewiesen.

SATZ 3. *Es sei $G = (X, U)$ ein endlicher, schlingenloser, zusammenhängender Graph und $h$ eine natürliche Zahl, $1 \leqq h \leqq |X| - (p+1)$. Ist $K(p, G) = |X| - h$, so ist $p < D(G) \leqq p + h$.*

*Beweis.* Wir nehmen an, es sei $D(G) > p + h$. Dann gibt es in $G$ zwei Knotenpunkte $a_0$ und $a_{p+h+1}$, so daß $d(a_0, a_{p+h+1}) = p + h + 1$ ist. Es sei dann $W = a_0, (a_0, a_1), a_1, (a_1, a_2), a_2, \ldots, a_{p+h}, (a_{p+h}, a_{p+h+1}), a_{p+h+1}$ einer der kürzesten Wege zwischen den Kontenpunkten $a_0$ und $a_{p+h+1}$. Es gibt dann eine zulässige Färbung der Knotenpunkte des Graphen $G$ mit $(|X| - h - 1)$ Farben und zwar diejenige Färbung in der $a_0$ und $a_{p+1}$ mit derselben Farbe $F_1$ gefärbt werden, $a_1$ und $a_{p+2}$ mit derselben Farbe $F_2, \ldots,$ $a_h$ und $a_{h+p+1}$ mit derselben Farbe $F_{h+1}$ und die restlichen $|X| - 2(h+1)$ Knotenpunkte mit $|X| - 2(h+1)$ verschiedenen Farben gefärbt werden. Es folgt $K(p, G) \leqq |X| - h - 1$ und wir sind somit zu einem Widerspruch gelangt. Damit ist Satz 3 bewiesen. Es muß noch unterstrichen werden, daß die Ungleichung



$D(G) \leqq p + h$ in Satz 3 genau ist, in dem Sinne, daß es Graphen gibt für die $K(p, G) = |X| - h$ und $D(G) = p + h$ ist.

SATZ 4. *In einem endlichen, schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen $G = (X, U)$ ist $K(p, G) = |X| - 1$ genau dann, wenn es zwei Knotenpunkte $a$ und $b$ aus $X$ gibt, so daß $d(a, b) = p + 1$ ist und aus $d(x, y) = p + 1$ entweder $x = a$ oder $y = a$ folgt.*

I. Es sei $K(p, G) = |X| - 1$. Nach Satz 3 folgt sofort die Bedingung $D(G) = p + 1$, somit auch die Existenz zweier Knotenpunkte, deren Distanz $p + 1$ ist. Es sei $M$ die Menge der Knotenpunktepaare, für welche die Distanz gleich $(p+1)$ ist.

Wir nehmen an, es gäbe in $M$ zwei Knotenpunktepaare $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, so daß $a, b, c, d$ vier verschiedene Knotenpunkte sind und folglich $d(a, b) = p + 1$ und $d(c, d) = p + 1$ ist. Färbt man die Knotenpunkte $a$ und $b$ mit der Farbe $F_1$, $c$ und $d$ mit der Farbe $F_2$, die $(|X| - 4)$ übriggebliebenen Knotenpunkte mit $(|X| - 4)$ verschiedenen Farben $F_3, F_4, \ldots, F_{|X|-2}$, so erhält man eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von $G$ bezüglich der Distanz $p$ mit $(|X| - 2)$ Farben und wir sind somit zu einem Widerspruch gelangt.

Wir nehmen an, $M$ enthielte drei Knotenpunktepaare der Form $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ und $\{c, a\}$. Da $d(a, b) = p + 1$, $d(b, c) = p + 1$ und $d(c, a) = p + 1$ ist, können die Knotenpunkte $a$, $b$ und $c$ mit derselben Farbe $F_1$ gefärbt werden, die restlichen $(|X| - 3)$ Knotenpunkte mit $(|X| - 3)$ verschiedenen Farben $F_2, F_3, \ldots, F_{|X|-2}$. So hätten wir wieder eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von $G$ bezüglich der Distanz $p$ mit $(|X| - 2)$ Farben und somit sind wir wieder zu einem Widerspruch gelangt. Es folgt, daß alle Knotenpunktepaare aus $M$ einen Knotenpunkt a enthalten müssen.

II. Es sei $G = (X, U)$ ein endlicher, schlingenloser, zusammenhängender Graph, in dem es zwei Kontenpunkte $a$ und $b$ gibt, so daß $d(a, b) = p + 1$ ist und daß für jedes Knotenpunktepaar $x, y$, für welches $d(x, y) = p + 1$ ist, entweder $x = a$ oder $y = a$ folgt. Aus $d(a, b) = p + 1$ folgt $D(G) \geqq p + 1$. Wir nehmen nun an, es gäbe in $G$ zwei Knotenpunkte $a_1$ und $a_{p+3}$, so daß $d(a_1, a_{p+3}) = p + 2$ ist. Es sei dann

$$W = a_1, (a_1, a_2), a_2, (a_2, a_3), a_3, \ldots, a_{p+2}, (a_{p+2}, a_{p+3}), a_{p+3}$$

einer der kürzesten Wege zwischen $a_1$ und $a_{p+3}$. Dann ist $d(a_1, a_{p+2}) = p + 1$ und $d(a_2, a_{p+3}) = p + 1$ und wir sind zu einem Widerspruch gelangt. Es folgt, daß der Diameter des Graphen $G$ $D(G) = p + 1$ ist.

In jeder zulässigen Färbung der Knotenpunkte von $G$ bezüglich der Distanz $p$ müssen die $(|X| - 1)$ Knotenpunkte aus $X - a$ mit $(|X| - 1)$ verschiedenen Farben gefärbt werden. Eine zulässige Färbung mit $(|X| - 1)$ Farben ist z.B. diejenige in der die Knotenpunkte $a$ und $b$ mit derselben Farbe $F_1$ gefärbt werden und die übriggebliebenen $(|X| - 2)$ Knotenpunkte mit $(|X| - 2)$ verschiedenen Farben $F_2, F_3, \ldots, F_{|X|-1}$. Es ist somit $K(p, G) = |X| - 1$ und damit ist Satz 4 bewiesen.

SATZ 5. *Es sei $G = (X, U)$ ein endlicher, schlingenloser Graph und $p$ eine natürliche Zahl, $p \geqq 2$. $G'$ sei der Graph, den man aus $G$ erhält indem man für jedes Knotenpunktepaar $x, y$, für welches in $G$ die Un-*

*gleichung* $1 < d(x, y) \leqq p$ *gilt eine Kante* $(x,y)$ *zu den Kanten von* $G$ *hinzufügt. Dann ist*:

$$K(p, G) = K(1, G').$$

Der Beweis dieses Satzes ist unmittelbar, weil jede in $G$ zulässige Färbung der Knotenpunkte bezüglich der Distanz $p$ zugleich eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von $G'$ bezüglich der Distanz 1 ist und umgekehrt.

*Definition.* Ist für einen Knotenpunkt $a$ eines endlichen, schlingenlosen Graphen $G = (X, U)$ $K(p, G - a) < K(p, G)$, so nennen wir $a$ einen $p$-kritischen Knotenpunkt der Ordnung $O(p, a) = K(p, G) - K(p, G - a)$.

*Definition.* Ist ein jeder Knotenpunkt eines endlichen, schlingenlosen Graphen $p$-kritisch, so nennen wir den Graphen selbst $p$-kritisch.

Es folgt sofort aus dieser Definition, daß ein $p$-kritischer Graph zusammenhängend ist.

SATZ 6. *Ist* $a$ *ein* $p$*-kritischer Knotenpunkt der Ordnung* $O(p, a)$ *eines endlichen, schlingenlosen Graphen* $G = (X, U)$, *so gilt für* $p \geqq 2$ *die Ungleichung*:

$$1 \leqq O(p, a) \leqq |X| - 1. \tag{2}$$

*Es ist* $O(p, a) = |X| - 1$ *für* $|X| \geqq 3$ *genau dann, wenn der Graph* $G$ *ein Stern und* $a$ *sein Zentrum ist.*

*Beweis.* Die Ungleichung (2) folgt sofort aus $1 \leqq K(p, G) \leqq |X|$, aus $1 \leqq K(p, G - a) \leqq |X| - 1$ und aus $K(p, G - a) < K(p, G)$.

Ist $G$ ein Stern mit dem Zentrum $a$, so ist $D(G) = 2$ und folglich ist für $p \geqq 2$ $K(p, G) = |X|$. $G - a$ besteht aus $(|X| - 1)$ zusammenhängenden Bestandteilen und zwar aus den $(|X| - 1)$ Knotenpunkten mit denen $a$ durch Kanten in $G$ verbunden ist. Es ist somit $K(p, G-a)=1$, also $O(p, a) = |X| - 1$.

Es sei nun $G = (X, U)$ ein schlingenloser, endlicher Graph, $a$ ein $p$-kritischer Knotenpunkt des Graphen $G$, so daß $O(p, a) = |X| - 1$ ist. Es ist also $K(p, G) - K(p, G - a) = |X| - 1$. Aus $1 \leqq K(p, G - a)$ und aus $K(p, G) \leqq |X|$ folgt $K(p, G) = |X|$ und $K(p, G - a) = 1$. Dann besteht $G - a$ aus $(|X| - 1)$ zusammenhängenden Bestandteilen. Es folgt, daß ein jeder der Knotenpunkte aus $X - a$ ein zusammenhängender Bestandteil des Graphen $G - a$ ist und somit in $G - a$ ein isolierter Knotenpunkt ist. Aus $K(p, G) = |X|$ folgt, daß $G$ zusammenhängend ist und also jeder Knotenpunkt aus $X - a$ mit $a$ durch je eine Kante verbunden ist, d.h. $G$ ist ein Stern und $a$ sein Zentrum.

SATZ 7. *Ein endlicher, schlingenloser Graph* $G = (X, U)$ *enthält einen* $p$*-kritischen Teilgraphen* $G'$ *für welchen* $K(p, G') = K(p, G)$.

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes erfolgt ebenso wie der des entsprechenden Satzes für $p = 1$ (siehe [1], [3]). Ist $G$ selbst $p$-kritisch, so ist $G$ der gesuchte Teilgraph. Ist $G$ nicht $p$-kritisch, so gibt es in $G$ einen Knotenpunkt $a$, der nicht $p$-kritisch ist. Dann ist $K(p, G - a) = K(p, G)$. Ist $G - a$ $p$-kritisch, so setzen wir $G' = G - a$. Ist $G - a$ nicht $p$-kritisch, so gibt es in $G - a$ wiederum einen Knotenpunkt $b$, welcher nicht $p$-kritisch ist und somit $K(p, G - a - b) = K(p, G - a) = K(p, G)$ ist.



Wegen der Endlichkeit der Knotenpunktemenge des Graphen $G$ müssen wir nach einer endlichen Anzahl solcher Schritte zu einem Teilgraphen $G'$ von $G$ gelangen für den $K(p, G') = K(p, G)$ gilt.

Anschließend geben wir einen Satz bezüglich der Abhängigkeit des Diameters eines Graphen von dem Grad der Knotenpunkte.

SATZ 8. *Es sei* $G = (X, U)$ *ein endlicher, schlingenloser, zusammenhängender Graph, in dem jedes Knotenpunktepaar höchstens durch eine Kante verbunden ist. Ist der Grad eines jeden Knotenpunktes aus* $X$ *mindestens gleich* $\left[\frac{|X|}{h}\right]$, *wobei* $h$ *eine natürliche Zahl ist,* $2 \leqq h \leqq \frac{|X| + 3}{3}$, *so gilt* $D(G) \leqq 3h - 4$. Und es gibt Graphen, für die die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist und für welche $D(G) = 3h - 4$ gilt.

*Beweis.* Wir nehmen an, es sei $D(G) > 3h - 4$. Dann gibt es in $X$ zwei Knotenpunkte $a_1$ und $a_{3h-2}$, so daß $d(a_1, a_{3h-2}) = 3h - 3$ ist. Es sei

$$W = a_1, (a_1, a_2), a_2, (a_2, a_3), a_3, \ldots, a_{3h-3}, (a_{3h-3}, a_{3h-2}), a_{3h-2}$$

einer der kürzesten Wege in $G$ zwischen $a_1$ und $a_{3h-2}$. Es sei $C_i$ die Menge der Knotenpunkte $x$ aus $X$, für welche $d(x, a_{3i-2}) \leqq 1$ gilt:

$$C_i = \{x \mid x \in X,\ d(x, a_{3i-2}) \leqq 1\} \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Aus $g(a_{3i-2}) \geqq \left[\frac{|X|}{h}\right]$ folgt, daß in $C_i$ mindestens $\left[\frac{|X|}{h}\right] + 1$ Knotenpunkte sind. Wir nehmen an, es gäbe zwei Indizes $i$ und $j$, $1 \leqq i < j \leqq h$, so daß $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Es sei dann $a$ ein Knotenpunkt aus $C_i \cap C_j$. Es folgt $d(a_{3i-2}, a_{3j-2}) \leqq d(a_{3i-2}, a) + d(a, a_{3j-2}) \leqq 2$. $W$ ist aber einer der kürzesten Wege zwischen $a_1$ und $a_{3h-2}$, somit ist der Teil des Weges $W$ zwischen $a_{3i-2}$ und $a_{3j-2}$ einer der kürzesten Wege zwischen diesen beiden Knotenpunkten. Folglich ist $d(a_{3i-2}, a_{3j-2}) \geqq 3$ und wir sind zu einem Widerspruch gelangt. Es folgt für $i \neq j$ $C_i \cap C_j = \emptyset$. Dann haben wir in der Vereinigungsmenge der Mengen $C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ wenigstens $h\left(\left[\frac{|X|}{h}\right] + 1\right)$ verschiedene Knotenpunkte. Es ist aber:

$$h\left(\left[\frac{|X|}{h}\right] + 1\right) > |X|.$$

Unsere Annahme, es sei $D(G) > 3h - 4$, führte also zu einem Widerspruch, da der Graph $G$ nur $|X|$ Knotenpunkte hat. Damit ist unser Satz bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Schranke $(3h - 4)$ genau ist. Es sei $G$ ein Graph, der aus den nachstehend definierten Graphen $G_1, G_2, \ldots, G_i$ gebildet wird. Der Graph $G_1$ ist ein vollständiger Graph mit den Kontenpunkten $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1,k+1}$. Für $i = 2, 3, \ldots, k - 1$ erhält man den Graphen $G_i$ aus dem vollständigen Graphen mit den Knotenpunkten

$$x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{i,k+1}$$

durch das Entfernen der Kante $(x_{i1}, x_{i2})$. Der Graph $G_k$ ist ein vollständiger Graph mit den Knotenpunkten

$$x_{k-1,2}, x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kk}.$$

In dem Graphen $G$ werden noch die Kanten $(x_{i2}, x_{i+1,1})$ für $i = 1, 2,$

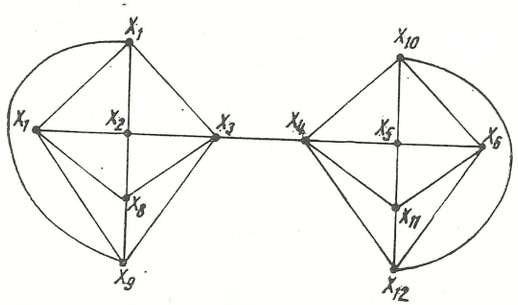



Abb. 1

$3, \ldots, k-2$ eingeführt. Der so erhaltene Graph $G$ enthält $|X| = (k-1)(k+1)+k = k^2+k-1$ Knotenpunkte, der Grad eines jeden Knotenpunktes ist mindestens $k = \left[\frac{|X|}{k}\right]$. Es ist $d(x_{11}, x_{k1}) = 3k-4$. Nach Satz 8 ist also $D(G) = 3k-4$.

Ein anderes Beispiel ist der Graph $G = (X, U)$ aus Abb. 1. Es ist $|X| = 12$. Nimmt man $h = 3$, so sieht man, daß der Grad eines jeden Knotenpunktes größer oder gleich $\left[\frac{|X|}{3}\right] = 4$ ist und $D(G) = 3h-4 = 5$ ist.

*Eingegangen am 12. November 1968*

*Akademie, Zweigstelle Cluj,*
*Recheninstitut*

## LITERATUR

1. Dirac G. A., *Some theorems on abstract graphs.* Proc. London math. Soc., III. Ser., 1952, **2**, 69–81.
2. König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe.* Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
3. Ringel G., *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.