O MAȘINĂ TURING UNIVERSALĂ PENTRU ALGORITMII NORMALI

DE

I. MARUȘCIAC și GH. NADIU

Cluj

În prezenta Notă se dă o demonstrație directă a echivalenței algoritmilor normali cu mașinile Turing, construindu-se o mașină Turing universală pentru algoritmii normali într-un alfabet dat $\mathcal{A}$. Mașina Turing universală este o compunere de două tipuri de mașini; mașini care recunosc intrările cuvintelor într-un cuvînt dat și cele care efectuează substituțiile.

Echivalența mașinilor Turing cu algoritmii normali se demonstrează de obicei prin intermediul altor sisteme algoritmice, ca de exemplu funcțiile recursive și altele.

În 1959, Cerneavski [3] dă o demonstrație directă a echivalenței algoritmilor normali cu mașinile Turing punînd în evidență o subclasă a algoritmilor normali cu proprietatea de localizare a procesului algoritmic, iar ceva mai recent, în anul 1965 P. V. Babikov [1] dă o rezolvare a aceleiași probleme cu ajutorul sistemelor Tue [4].

În această lucrare vom demonstra echivalența algoritmilor normali cu mașinile Turing, construind direct o mașină universală pentru clasa algoritmilor normali într-un alfabet dat.

1. Fie $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un alfabet dat și

$$\mathfrak{U}: \begin{cases} A_1 \to B_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_k \to B_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_N \to B_N \end{cases}$$

un algoritm normal în alfabetul $\mathcal{A}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 85–95, BUCUREȘTI, 1969

Notăm cu $\underline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ alfabetele obţinute din alfabetul $\mathcal{A}$ respectiv prin sublinierea, supralinierea şi supralinierea dublă a literelor din alfabetul $\mathcal{A}$ şi fie $\mathcal{B} = \{a_0\} \cup \mathcal{A} \cup \underline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\overline{\mathcal{A}}}$, unde a_0 reprezintă simbolul vid.

Fie $\cdot$, $\divideontimes$, $\square_1$, $\square_2$, ..., $\square_k$, ... $\square_N$, litere ce nu fac parte din alfabetul $\mathcal{B}$, iar $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{\cdot, \divideontimes, \square_1, \ldots, \square_N\}$.

Ataşăm fiecărei litere a_i simbolurile q_{a_i} şi $\underline{q}_{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Fie acum $Q' = \{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_N, \gamma, \delta, \varepsilon, \nu, \mu, \theta, \tau, \rho, q_{a_1}, \ldots, q_{a_n}, \underline{q}_{a_1}, \ldots, \underline{q}_{a_n}, q_0', q_0''\}$ unde nici o literă a alfabetului Q' nu aparţine alfabetului $\mathcal{B}_1$.

Vom construi mai întîi o maşină Turing $\mathfrak{T}_k'$ cu alfabetul exterior $\mathcal{B}_1$ şi alfabetul interior Q', unde α reprezintă starea iniţială, iar q_0', q_0'' stările finale ale maşinii $\mathfrak{T}_k'$, adică

$$\mathfrak{T}_k' : Q' \times \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1 \times \Pi \times Q',$$

unde $\Pi = \{S, L, D\}$, care va recunoaşte intrarea membrului întîi a formulei de substituţie $A_k \to B_k$ a algoritmului $\mathfrak{U}$, în cuvîntul de prelucrat P.

Maşina Turing $\mathfrak{T}_k'$ o descriem prin programul de comenzi obişnuit între dublete şi triplete, adică de forma

$$qa \to a' \pi q',$$

unde $a, a' \in \mathcal{B}_1$, $q, q' \in Q'$, $\pi \in \Pi$. Pentru comoditatea scrierii, acest program se dă sub formă de tabel (tabelul 1) în care tripleta care corespunde perechii (a, q) se citeşte la intersecţia liniei q şi coloanei a.

Considerăm configuraţia iniţială a benzii maşinii $\mathfrak{T}_k'$ dată prin cuvîntul de maşină

$$M = \alpha P \square_1 A_1 \divideontimes B_1 \square_2 \ldots \square_k A_k \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \ldots \square_N A_N \divideontimes B_N$$

obţinut prin scrierea liniară a cuvîntului de prelucrat şi a formulelor de substituţie a algoritmului $\mathfrak{U}$ în care înlocuim $\to$ prin $\divideontimes$, iar $\square_1$, $\square_2$, ..., $\square_N$ fiind litere separatoare pentru formulele de substituţie.

Pentru a putea analiza şi formulele de substituţie de încheiere, presupunem că formula de substituţie de ordinul k este o formulă de substituţie de încheiere.

Să notăm cu $M^{(1)}$ cuvîntul de maşină obţinut din M prin aplicarea unui singur pas elementar al maşinii Turing $\mathfrak{T}_k'$ şi în general

$$M^{(t+1)} = (M^{(t)})^{(1)}, \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

unde $M^{(t)}$ este cuvîntul de maşină obţinut din M prin t paşi elementari ai maşinii. Punînd $M^{(1)} = B$ şi $M^{(t)} = C$, vom folosi notaţia: $M \vdash B$, respectiv $M \sqsubset C$.

LEMA 1. *Dacă formula de substituţie a algoritmului* $\mathfrak{U}$ *este aplicabilă cuvîntului* P, *atunci există un indice* t^* *astfel încît*

$$q_0'' \in M^{(t^*)}$$

şi

$$M^{(t^*)} = \Sigma (P, A_k, \overline{A}_k) \square_1 A_1 \divideontimes B_1 \square_2 \ldots \square_k \underline{A}_k q_0'' \divideontimes B_k \square_{k+1} \ldots,$$

Tabelul 1

(Maşina pentru recunoaşterea intrărilor)

	a_0	$*$	$\square_1$	$\square_j$ $(j=\overline{2,k-1})$	$\square_k$	a_i $(i=\overline{1,n})$	$\bar{a}_i$ $i=\overline{1,n}$	a_j $(j=\overline{1,n})$	$\bar{a}_j$ $(j=\overline{1,n})$	$\underline{a}_i$ $(i=\overline{1,n})$	$\underline{a}_j$ $(j=\overline{1,n})$	$\bar{\bar{a}}_i$ $(i=\overline{1,n})$	$\bar{\bar{a}}_j$ $(j=\overline{1,n})$	$\cdot$
α		$\divideontimes D\alpha$	$\square_1 D\alpha$	$\square_j D\alpha$	$\square_k D\beta_k$	$a_i D\alpha$		$a_j D\alpha$						
β_k		$\divideontimes L q_0''$			$\square_k D\beta_k$	$\underline{a}_i L q_{a_i}$		$a_j L q_{a_i}$			$a_j D\beta_k$			
γ	$a_0 D\varepsilon$					$a_i D\varepsilon$		$a_j D\varepsilon$	$a_j S\gamma$					
δ		$\divideontimes S\tau$				$a_i D\delta$		$a_j D\delta$			$a_j D\delta$			
ε						$\bar{\bar{a}}_i D\mu$		$\bar{\bar{a}}_j D\mu$						$\cdot S\nu$
ν	$a_0 D q_0'$	$\divideontimes S\nu$	$\square_1 S\nu$	$\square_j S\nu$	$\square_k S\nu$	$a_i S\nu$		$a_j S\nu$						
μ		$\divideontimes D\mu$	$\square_1 D\mu$	$\square_j D\mu$	$\square_k D\delta$	$a_i D\mu$		$a_j D\mu$						$\cdot D\mu$
τ	$a_0 D\varepsilon$		$\square_1 S\tau$		$\square_k L\beta_k$	$a_i S\tau$	$S a_i$	$a_j S\tau$	$a_j S\tau$					
θ		$\divideontimes S\nu$				$a_i D\theta$		$a_j D\theta$		$a_i D\theta$	$a_j D\theta$			
ρ		$\divideontimes D\rho$	$\square_1 D\rho$	$\square_j D\rho$	$\square_k D\theta$	$a_i D\rho$		$a_j D\rho$						$\cdot D\rho$
σ			$\square_1 S\sigma$			$\bar{a}_i D\alpha$		$a_j S\gamma$						
$\bar{a}_i$		$\divideontimes S\bar{a}_i$	$\square_1 S\bar{a}_i$	$\square_j S\bar{a}_i$	$\square_k S\bar{a}_i$	$\bar{a}_i S\bar{a}_i$	$\bar{a}_i S\bar{a}_i$	$a_j S\bar{a}_i$	$\bar{a}_j S\bar{a}_i$	$\underline{a}_i S\bar{a}_i$	$\underline{a}_j S\bar{a}_i$	$\bar{\bar{a}}_i S\bar{a}_i$	$\bar{\bar{a}}_j S\bar{a}_i$	$\cdot S\bar{a}_i$

unde $\underline{A}_k$, $\overline{A}_k$ *sînt cuvintele obținute din* A_k *prin sublinierea și respectiv supralinierea literelor din* A_k.

Într-adevăr, dacă formula $A_k \to B_k$ este aplicabilă cuvîntului P, atunci va exista o primă intrare a cuvîntului A_k în cuvîntul P de forma

$$P = R\underline{A}_k T.$$

Fie $A_k = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r}$. Dacă R este cuvîntul vid, atunci

$$P = A_k T$$

și rezultă că

$$M \sqsubset a_0 P \square_1 A_1 \divideontimes B_1 \square_2 \dots \alpha \square_k A_k \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \square_N A_N \divideontimes B_N \vdash$$

$$\vdash a_0 P \square_1 \dots \square_k \beta_k A_k \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash a_0 P \square_1 \dots \square_k$$

$$\underline{q}_{a_{j_1}} \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset \underline{q}_{a_{j_1}} a_0 P \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots$$

$$\dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \vdash a_0 q_{a_{j_1}} \cdot P \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots$$

$$\vdash a_0 \bar{a}_{j_1} \alpha a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \alpha \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \beta_k a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \bar{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{q}_{a_{j_2}} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \underline{q}_{a_{j_2}} \bar{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \bar{a}_{j_1} q_{a_{j_2}} a_{j_2} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots$$

$$\sqsubset a_0 \overline{A}_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \underline{a}_{j_2} \dots \underline{a}_{j_T} \beta_k \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \overline{A}_k T \square_1 \dots \square_k \underline{A}_k q_0'' \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots$$

Fie acum R diferit de cuvîntul vid, adică;
$P = R a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} T$, unde $R = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$; atunci avem succesiv

$$M \sqsubset a_0 \underline{q}_{a_{j_1}} a_{i_1} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash \gamma a_0 a_{i_1} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \varepsilon a_{i_1} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} \mu a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \delta \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \delta \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k a_{j_1} \dots a_{j_{r-1}} \tau a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \beta_k \square_k a_{j_1} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{q}_{a_{j_1}} \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \underline{q}_{a_{j_1}} \bar{\bar{a}}_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \vdash$$

$$\vdash a_0 a_{i_1} q_{a_{j_1}} a_{i_2} \dots a_{i_m} A_k T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 R q_{a_{j_1}} a_{j_1} \dots a_{j_r} T \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r} \divideontimes \cdot B_k \square_{k+1} \dots$$

și de aici se repetă procesul ca și în cazul precedent și deci lema **1** este demonstrată.

LEMA 2. *Dacă formula de substituție* $A_k \to B_k$ *nu este aplicabilă cuvîntului* P, *atunci există un indice* t^{**} *astfel că*

$$q_0' \in M^{(t^{**})}$$

și

$$M^{(t^{**})} = q_0' P \square_1 A_1 \divideontimes B_1 \square_2 \dots \square_N A_N \divideontimes B_N.$$

Într-adevăr, dacă formula de substituție $A_k \to B_k$ nu este aplicabilă cuvîntului P, atunci rezultă că A_k nu intră în P, deci mașina $\mathfrak{T}_k$ va transforma cuvîntul de mașină M într-un cuvînt de mașină de forma

$$M^* = a_0 P' \bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_{m'}} q_{a_i} \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \dots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \dots a_{j_r} \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots$$

unde $m' < r$, ceea ce înseamnă că un început al lui A_k este terminație a cuvîntului P, deci $P = P' a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_{m'}}$. Toate celelalte cazuri se reduc la acesta. Astfel avem succesiv

$$M^* \vdash a_0 P' \bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_{m'-1}} \tau \bar{a}_{j_{m'}} \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \dots \underline{a}_{j_{m'}} \dots a_{j_r} \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 \rho P \square_1 \dots \square_k \underline{a}_{j_1} \dots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \dots a_{j_r} \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 P \square_1 \dots \square_k \theta \underline{a}_{j_1} \dots \underline{a}_{j_{m'}} a_{j_{m'+1}} \dots a_{j_r} \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 P \square_1 \dots \square_k a_{j_1} \dots a_{j_{r-1}} \nu a_{j_r} \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_0 q_0' P \square_1 \dots \square_k A_k \divideontimes B_k \square_{k+1} \dots \square_N A_N \divideontimes B_N$$

adică lema are loc.

2. Fie $\overline{q}_{a_i}$, $\underline{q}_{a_i}$, q_{a_i} trei simboluri atașate literelor a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, iar Q'' alfabetul următor:

$$Q'' = \{\alpha, \beta, \gamma_1, \dots \gamma_k, \dots, \gamma_N, \delta, \varepsilon, \mu, \nu, \theta, \rho, \tau, \varphi, \psi, \chi, \xi,$$

$$q_{a_1}, \dots, q_{a_n}, \overline{q}_{a_1}, \dots, \overline{q}_{a_n}, \underline{q}_{a_1}, \dots, \underline{q}_{a_n}, q_0', q_0''\}.$$

Vom construi acum o mașină Turing $\mathfrak{T}_k''$ cu alfabetul exterior $\mathfrak{B}_1$ și alfabetul interior Q'', în care β este starea inițială, iar q_0', q_0'' două stări finale, de forma

$$\mathfrak{T}_k'' : Q'' \times \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_1 \times \Pi \times Q''$$

cu schema logică dată în tabelul 2.

Tabelul 2

Mașina pentru efectuarea substituțiilor

	a_0	.	$*$	$\square_1$	$\square_j$ $(j=\overline{2,k-1})$	$\square_k$	a_i $(i=\overline{1,n})$	a_j $(j=\overline{1,n})$	$\overline{a}_i$ $(i=\overline{1,n})$	$\overline{a}_j$ $(j=\overline{1,n})$	$\underline{a}_i$ $(i=\overline{1,n})$	$\underline{a}_j$ $(j=\overline{1,n})$	$\square_{k+1}$
α	$a_0 D\tau$	$\cdot S\rho$	$*S\alpha$			$\square_k L\rho$	$\underline{a}_i S\alpha$	$\underline{a}_j S\alpha$			$a_i S\alpha$	$a_j S\alpha$	
β		$\cdot D\beta$	$*D\beta$	$\square_1 D\beta$	$\square_j D\beta$	$\square_k D\beta$	$a_i D\beta$	$a_j D\beta$			$\underline{a}_i D\beta$	$\underline{a}_j D\beta$	$\square_{k+1} S\gamma_k$
γ_k		$\cdot D\varepsilon$	$*D\varepsilon$				$\underline{a}_i S\overline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j S\overline{q}_{a_j}$			$\underline{a}_i S\gamma_k$	$\underline{a}_j S\gamma_k$	
δ	$a_0 D\tau$						$\underline{a}_i S\alpha$	$\underline{a}_j S\alpha$	$\overline{a}_i D\varepsilon$	$\overline{a}_j D\varepsilon$			
ε	$a_0 D\nu$			$\square_1 D\beta$			$a_i D\varepsilon$	$a_j D\varepsilon$	$\overline{a}_i D\varepsilon$		$\underline{a}_i D\varepsilon$	$\underline{a}_j D\varepsilon$	$\square_{k+1} S\alpha$
μ	$a_0 D\varepsilon$						$a_i L\overline{q}_{a_i}$	$a_j L\overline{q}_{a_j}$	$a_0 S\mu$	$a_0 S\mu$			
ν	$a_0 L\theta$			$\square_1 D\varphi$			$a_i D\nu$	$a_j D\nu$					
θ	$a_0 S\mu$			$\square_1 \delta\theta$			$a_i S\theta$	$a_j S\theta$	$a_0 S\mu$	$a_0 S\mu$			
τ	$a_0 D\tau$						$a_i L\beta$	$a_j L\beta$			$\underline{a}_i L\overline{q}_{a_i}$	$\underline{a}_j L\overline{q}_{a_j}$	
ρ		$\cdot S\rho$	$*S\rho$	$\square_1 S\rho$	$\square_j S\rho$	$\square_k S\rho$	$a_i S\rho$	$a_j S\rho$			$a_i S\rho$	$a_j S\rho$	
ξ		$\cdot S\psi$	$*D\xi$				$a_i D\xi$	$a_j D\xi$					$\square_{k+1} S\chi$
φ		$\cdot D\varphi$	$*D\varphi$	$\square_1 D\varphi$	$\square_j D\varphi$	$\square_k D\xi$	$a_i D\varphi$	$a_j D\varphi$					
ψ	$a_0 Dq'_0$	$\cdot S\psi$	$*S\psi$	$\square_1 S\psi$	$\square_j S\psi$	$\square_k D\psi$	$a_i S\psi$	$a_j S\psi$					
χ	$a_0 Dq''_0$	$\cdot S\chi$	$*S\chi$	$\square_1 S\chi$	$\square_j S\chi$	$\square_k S\chi$	$a_i S\chi$	$a_j S\chi$					
$\overline{a}_i$	$a_i D\tau$						$a_0 D\overline{q}_{a_i}$				$a_0 S\overline{q}_{a_i}$		
$\underline{a}_i$	$a_0 S\theta$	$\cdot S\rho$	$*\overline{q}_{a_i}$	$\square_1 S\overline{q}_{a_i}$	$\square_j S\overline{q}_{a_i}$	$\square_k S\overline{q}_{a_i}$	$a_0 D\underline{q}_{a_i}$	$a_0 D\underline{q}_{a_i}$					

Considerăm configurația inițială a benzii mașinii $\mathfrak{T}''_k$ sub forma

$$M_1 = R\overline{A}_k\, T\, \square_1 A_1 * B_1\, \square_2 \ldots \square_k \underline{A}_k\, \beta * B_k\, \square_{k+1} \ldots \square_N A_N * B_N,$$

adică un cuvînt de mașină în care este pusă în evidență intrarea lui A_k în cuvîntul P.

Fie $B_k = a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l}$

Vom arăta în cele ce urmează că mașina $\mathfrak{T}''_k$ efectuează substituția în cuvîntul P, adică înlocuiește prima intrare a cuvîntului A_k în P cu cuvîntul B_k. În acest sens vom demonstra trei leme.

LEMA 3. *Dacă lungimea cuvîntului A_k este egală cu lungimea cuvîntului B_k, adică $l(A_k) = l(B_k)$, atunci mașina $\mathfrak{T}''_k$ transformă cuvîntul M_1 conform lui* (1) *sau* (2):

(1) $M_1 \sqsubset q'_0 \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 A_1 * B_1\, \square_2 \ldots \square_k A_k * \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots$

(2) $M_1 \sqsubset q''_0 \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 A_1 * B_1\, \square_2 \ldots \square_k A_k * B_k\, \square_{k+1} \ldots$

după cum formula de substituție $A_k \to B_k$ este de încheiere sau este simplă. Aici prin $\sum (P, A_k, B_k)$ s-a notat cuvîntul rezultat în urma înlocuirii în P a primei intrări a cuvîntului A_k cu cuvîntul B_k.

Într-adevăr, conform schemei logice a mașinii $\mathfrak{T}''_k$ dată în tabelul 2, avem succesiv

$$M_1 \sqsubset R\overline{A}_k\, T\, \square_1 A_1 * B_1\, \square_2 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \gamma_k\, a_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{A}_k T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots \underline{q}_{a_{k_l}}\, a_{k_{l-1}}\, a_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} q_{a_{k_l}} \overline{a}_{j_r}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-2}} \delta\, \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} \varepsilon\, a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l}\, T\, \square_1 \beta \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\overline{a}_{j_1} \ldots \overline{a}_{j_{r-1}} a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot a_{k_1} \ldots \gamma_k\, a_{k_{l-1}} \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\underline{q}_{a_{k_1}} \overline{a}_{j_1} a_{k_1} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k A_k * \cdot a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash \ldots \delta a_{i_m} a_{k_1} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset \alpha\, a_0\, \underline{R}\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0 \tau\, \underline{R}\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0\, \overline{q}_{a_{i_1}}\, \underline{a}_{i_1} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash \overline{q}_{a_{i_1}} a_0\, a_0\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} a_0 \tau\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m} B_k\, T\, \square_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R a_0 \beta\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \gamma_k \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash R a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k * \cdot \varepsilon\, \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \cdot \underline{B}_k\, \varepsilon\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \rho \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, B_k T\, \theta\, \square_1 \ldots \square_k A_k \divideontimes \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\, \theta\, a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k A_k \divideontimes \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots \mu\, a_{i_m}\, a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash a_{i_1} \ldots q_{a_{i_m}}\, a_{i_m}\, a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_0\, q_{a_{i_m}}\, a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \theta\, a_0\, a_{i_m}\, B_k\, T\, \square_1 \ldots$$

$$\ldots \sqsubset \theta\, a_0\, R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash \mu\, a_0\, a_0\, R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_0\, \varepsilon\, a_0\, R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash a_0\, \nu\, R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset R\, B_k\, T\, \nu\, \square_1 \ldots$$

De aici avem două cazuri:

a) $$M_1 \sqsubset R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \psi\, A_k \divideontimes \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$
$$\sqsubset q_0' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 A_1 \divideontimes B_1\, \square_2 \ldots$$

dacă formula de substituție $A_k \to B_k$ este o formulă de încheiere și

b) $$M_1 \sqsubset R\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \sqsubset q_0'' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 A_1 \divideontimes B_1\, \square_2 \ldots$$

dacă formula de substituție este simplă.

LEMA 4. *Dacă $l(A_k) < l(B_k)$, atunci are loc de asemenea una din relațiile (1) sau (2).*

Într-adevăr, dacă $l(A_k) < l(B_k)$, atunci vom vedea că mașina va crea o celulă liberă pentru substituțiile literelor, o dată ce lungimea cuvîntului A_k a fost depășită. Pentru aceasta vom analiza transformările succesive în cazul cînd nu există celulă liberă pentru continuarea înlocuirii literelor cuvîntului B_k, adică începînd cu situația

c) $$a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \delta a_{i_m}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_p} \ldots \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1}$$

$$\ldots \sqsubset \tau\, \underline{R} a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \vdash \overline{q}_{a_{i_1}}\, \underline{a}_{i_1} \ldots \underline{a}_{i_m}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash \overline{q}_{a_{i_1}}\, a_0\, a_0\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \vdash a_{i_1}\, a_0\, \tau\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m}\, a_{k_p} \ldots$$

$$\ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \vdash a_{i_1}\, a_0\, q_{a_{i_2}}\, \underline{a}_{i_2} \ldots \underline{a}_{i_m}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1}\, \overline{q}_{a_{i_2}}\, a_0\, a_0\, \underline{a}_{i_3} \ldots \underline{a}_{i_m}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset Ra_0\, \beta\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots a_{k_{p-1}}\, \underline{a}_{k_p} \ldots \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots$$

Din acest punct se reia ciclul de lucru al lui β, analog cazului precedent, pînă ce se ajunge în situația

d) $$a_{i_1} \ldots a_{i_m}\, \underline{q}_{a_{p-1}}\, a_0\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_{p-1}} \ldots$$

$$\ldots \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots \vdash R\delta a_{k_{p-1}}\, a_{k_p} \ldots a_{k_l}\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \cdot a_{k_1} \ldots \underline{a}_{k_{p-1}} \ldots$$

$$\ldots \underline{a}_{k_l}\, \square_{k+1} \ldots$$

De aici se reia ciclul d) pînă se epuizează cuvîntul B_k. Ciclul se încheie la cuvîntul de mașină

$$Ra_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k \underline{A}_k \divideontimes \gamma_k \cdot \underline{B}_k\, \square_{k+1} \ldots$$

din care este suficientă eliminarea literei a_0. Eliminarea literelor vide se face ca în lema 2 și astfel rezultă lema 4.

LEMA 5. *Dacă $l(A_k) > l(B_k)$, atunci au loc de asemenea relațiile (1) sau (2).*

Într-adevăr, din demonstrația lemelor precedente rezultă că este suficient să analizăm transformările succesive începînd cu cuvîntul de mașină

$$R\overline{a}_{j_1} \ldots \theta \overline{a}_{i_{p_1}}\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k A_k \divideontimes \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$

$$\sqsubset a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, q_{a_{i_m}}\, a_{i_m}\, a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, a_0\, q_{a_{i_m}}\, a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-1}}\, \theta a_0\, a_{i_m}\, a_0 \ldots a_0 B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-2}}\, \mu\, a_{i_{m-1}}\, a_0\, a_{i_m}\, a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots \vdash$$

$$\vdash a_{i_1} \ldots a_{i_{m-2}}\, q_{a_{i_{m-1}}}\, a_{i_{m-1}}\, a_0\, a_{i_m}\, a_0 \ldots a_0\, B_k\, T\, \square_1 \ldots$$

Astfel se reia ciclul deplasîndu-se la dreapta cu o celulă cuvîntul R, iar apoi prin intermediul stărilor μ, ν, ε se verifică dacă astfel de deplasări mai sînt necesare sau nu. Dacă deplasarea nu mai este necesară, atunci obținem cuvîntul de mașină

$$RB_k\, T\, \square_1 \varphi\, A_1 \divideontimes B_1\, \square_2 \ldots \sqsubset RB_k\, T\, \square_1 \ldots \square_k A_k \divideontimes \psi \cdot B_k\, \square_{k+1} \ldots \sqsubset$$
$$\sqsubset q_0' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 \ldots,$$

dacă formula de substituție $A_k \to B_k$ este de încheiere și

$$RB_k\, T\, \square_1 \varphi\, A_1 \divideontimes B_1\, \square_2 \ldots \sqsubset q_0'' \sum (P, A_k, B_k)\, \square_1 \ldots,$$

dacă formula de substituție $A_k \to B$ este simplă.

3. În paragrafele precedente am construit mașinile Turing $\mathfrak{T}_k'$, $\mathfrak{T}_k''$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Să considerăm acum mașina Turing $\mathfrak{T}_k$ obținută prin compunerea mașinilor $\mathfrak{T}_k'$ și $\mathfrak{T}_k''$ în modul următor:

$$\mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}_k' \begin{cases} (1)\ \mathfrak{T}_{k+1}' \\ (2)\ \mathfrak{T}_k'' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_1' \end{cases} \end{cases} (k = \overline{1, N-1}), \quad \mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_N' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_N'' \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \mathfrak{T}_1' \end{cases} \end{cases}$$

(Aici (1) corespunde stării de repaus q_0', iar (2) stării de repaus q_0'').

Este ușor de observat din construcția mașinilor $\mathfrak{T}_k'$ și $\mathfrak{T}_k''$ că mașina $\mathfrak{T}_k$ modelează formula de substituție de ordinul k.

Considerăm acum compunerea mașinilor $\mathfrak{T}_k$ sub forma

$$\mathfrak{T}_k \begin{cases} (1)\ \mathfrak{T}_{k+1} \\ (2)\ \text{stop} \\ (3)\ \mathfrak{T}_1 \end{cases}$$

unde

$$\mathfrak{T}_N \begin{cases} (1)\ \text{stop} \\ (2)\ \text{stop} \\ (3)\ \mathfrak{T}_i \end{cases}$$

în care poziția (1) corespunde stării q_0' a mașinii $\mathfrak{T}_k'$, iar (2) și (3) respectiv stărilor q_0' și q_0'' a mașinii $\mathfrak{T}_k''$.

Fie $\mathfrak{T}$ mașina Turing astfel obținută. Ținînd seamă de modul de construcție a mașinii $\mathfrak{T}$ și de proprietățile mașinilor $\mathfrak{T}_k'$ și $\mathfrak{T}_k''$ avem următoarea

TEOREMĂ. *Mașina Turing $\mathfrak{T}$ este universală pentru clasa algoritmilor normali în alfabetul $\mathscr{A}$.*

Prin urmare, oricare ar fi un algoritm normal în alfabetul $\mathscr{A}$, mașina Turing modelează operațiile acestui algoritm. Pentru aceasta este suficient să se înscrie pe banda mașinii $\mathfrak{T}$ cuvîntul P și schema algoritmului normal sub forma unui cuvînt ce reprezintă reprezentarea sa.

Reciproca este evidentă. Oricare ar fi o mașină Turing cu alfabetul exterior $\mathscr{B}_1$ și alfabetul interior Q există un algoritm normal în alfabetul $\mathscr{B}_1 \cup Q$ care modelează operațiile mașinii lui Turing. Acest algoritm normal este cel obținut luînd drept schema sa corespondența dintre dublete și triplete din programul de lucru al mașinii lui Turing.

În felul acesta clasa algoritmilor normali în alfabetul $\mathscr{A}$ este echivalentă cu o clasă de mașini Turing în care alfabetul exterior este o extindere a alfabetului $\mathscr{A}$.

Primită la redacție la 9 mai 1968

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Cluj
Institutul de calcul

UNE MACHINE DE TURING UNIVERSELLE POUR LES ALGORITHMES NORMAUX

RÉSUMÉ

Dans cette note on présente une démonstration directe de l'équivalence des machines de Turing avec les algorithmes normaux, en construisant une machine de Turing universelle pour les algorithmes normaux dans un alphabet donné $\mathscr{A}$. La machine universelle est une composition de deux types de machines; les machines qui reconnaissent les entrées des mots dans un mot donné et ceux qui réalisent les substitutions.

BIBLIOGRAFIE

1. П. В. БАБИКОВ, *Нормальные алгоритмы и машины Тьюринга*. Мат. Записки, V, *1* (1965).
2. T. BECVAR, *A universal Turing Machine with a programming tape*. Cooloquium on the foundations of Mathematics, mathematical machines and their applications. Tihany, 11—15 september 1962.
3. ЧЕРНЯВСКИЙ, *Об одном подклассе нормальных алгоритмов*. Логические исследования, 1959.
4. S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*. Princenton, N. J., 1962.
5. А. И. МАЛЬЦЕВ, *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Изд. „Наука", Москва, 1965.
6. А. А. МАРКОВ, *Теория алгоритмов*. Труды мат. Ин-та АН СССР, 42 (1954).
7. I. MARUȘCIAC, *Teoria algoritmilor*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1967.