NOMOGRAME DE GENUL DOI CU SCARĂ RECTILINIE REGULATĂ SAU PROIECTIVĂ

DE

MARIA MIHOC

(Cluj)

În lucrare se cercetează reprezentarea ecuațiilor de ordinul cinci nomografic (1′) cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu o scară rectilinie. Se dau pentru fiecare tip de nomogramă considerat formule pentru calculul parametrilor scărilor nomogramei.

În această lucrare vom cerceta reprezentarea ecuațiilor de ordinul cinci nomografic, cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu o scară rectilinie și celelalte scări situate pe două curbe oarecare.

Fie ecuația de ordinul cinci nomografic cu trei variabile de forma:

$$\begin{aligned}&(A_0f_1f_2 + A_1f_1g_2 + A_2f_2 + A_3g_2 + A_4f_1 + A_5)f_3 + \\ &+ (B_0f_1f_2 + B_1f_1g_2 + B_2f_2 + B_3g_2 + B_4f_1 + B_5)g_3 + \\ &+ (C_0f_1f_2 + C_1f_1g_2 + C_2f_2 + C_3g_2 + C_4f_1 + C_5) = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

unde $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(y)$, $g_2 = g_2(y)$, $f_3 = f_3(z)$, $g_3 = g_3(z)$.

Se caută în ce condiții ecuația (1) se poate reprezenta printr-o nomogramă cu puncte aliniate avînd scara rectilinie regulată, sau proiectivă. Pentru aceasta $f_1(x) = x$ și deci ecuația (1) devine:

$$\begin{aligned}&(A_0f_2x + A_1g_2x + A_2f_2 + A_4g_2 + A_4x + A_5)f_3 + \\ &+ (B_0f_2x + B_1g_2x + B_2f_2 + B_3g_2 + B_4x + B_5)g_3 + \\ &+ (C_0f_2x + C_1g_2x + C_2f_2 + C_3g_2 + C_4x + C_5) = 0.\end{aligned} \tag{1′}$$

1. Se consideră mai întîi cazul cînd scara rectilinie a nomogramei este regulată. Ecuația lui Soreau este atunci următoarea:

$$\begin{vmatrix} a'x + b' & c'x + d' & 1 \\ e'f_2 + f'g_2 + g' & h'f_2 + i'g_2 + j' & 1 \\ l'f_3 + m'g_3 + n' & p'f_3 + r'g_3 + s' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 21, NR. 1, P. 111–118, BUCUREȘTI, 1969

Printr-o transformare afină corespunzătoare putem aduce determinantul (2) la forma :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} ax & 0 & 1 \\ bf_2 + cg_2 + d & ef_2 + fg_2 + g & 1 \\ \rho f_3 + hg_3 + j & \nu f_3 + mg_3 + n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde $a, b, c, d, e, f, g, \rho, h, j, \nu, m, n$ sînt parametrii scărilor nomogramei.

Să împărțim coloana întîi a determinantului (3) prin unul din parametrii b, c sau ρ, h și a doua coloană prin unul din parametrii e, f sau ν, m (cel puțin cîte un parametru din aceste perechi este diferit de zero, deoarece în caz contrar curba degenerează într-o dreaptă și astfel ordinul nomografic scade). Pentru simplificarea ideilor întrucît $\rho \neq 0$ și $\nu \neq 0$, luăm $\rho = \nu = 1$.

Dezvoltînd în acest caz membrul stîng al ecuației (3) găsim :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(b-e)f_2f_3 + (c-f)g_2f_3 - af_3x + (d-g)f_3 + (bm-eh)f_2g_3 + \\ &+ (cm-fh)g_2g_3 - amg_3x + (dm-gh)g_3 + aef_2x + afg_2x + \\ &+ (bn-ej)f_2 + (cn-fj)g_2 + a(g-n)x + dn - gj = 0. \end{aligned}$$

Pentru determinarea condițiilor în care o ecuație de ordinul cinci nomografic se reprezintă printr-o astfel de nomogramă, identificăm coeficienții ecuațiilor (1′) și (4). Dacă $A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = 0$, găsim sistemul :

$$(5)\qquad \begin{aligned} b - e &= A_2, & dm - gh &= B_5, \\ c - f &= A_3, & ae &= C_0, \\ -a &= A_4, & af &= C_1, \\ d - g &= A_5, & bn - ej &= C_2, \\ bm - eh &= B_2, & cn - fj &= C_3, \\ cm - fh &= B_3, & a(g-n) &= C_4, \\ -am &= B_4, & dn - gj &= C_5. \end{aligned}$$

1.1. Dacă $C_0 \neq 0$, soluția sistemului (5) este :

$$(6)\qquad \begin{aligned} &a = -A_4,\ b = A_2 - \frac{C_0}{A_4},\ c = A_3 - \frac{C_1}{A_4},\ d = A_5 + \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4(A_4B_2 - A_2B_4)}, \\ &e = -\frac{C_0}{A_4},\ f = -\frac{C_1}{A_4},\ g = \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4(A_4B_2 - A_2B_4)}, \\ &h = \frac{A_4B_2 - A_2B_4}{C_0} + \frac{B_4}{A_4}, \\ &j = \frac{A_4(A_2C_3 - A_3C_2) + C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0},\ m = \frac{B_4}{A_4},\ n = \frac{C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0}. \end{aligned}$$

Compatibilitatea sistemului (5) este asigurată de următoarele condiții :

$$(7)\qquad \begin{aligned} &C_0(A_4B_3 - A_3B_4) = C_1(A_4B_2 - A_2B_4), \\ &\frac{A_4(C_1C_2 - C_0C_3)}{A_2C_1 - A_3C_0} - \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_4B_2 - A_2B_4} = C_4, \\ &A_5\frac{C_1C_2 - C_0C_3}{A_2C_1 - A_3C_0} - \frac{C_0(A_5B_4 - A_4B_5)(A_2C_3 - A_3C_2)}{(A_4B_2 - A_2B_4)(A_2C_1 - A_3C_0)} = C_5. \end{aligned}$$

1.2. Dacă $C_0 = 0$, soluția sistemului (5) se obține din soluția (6) cu condițiile (7), unde se înlocuiește raportul $\dfrac{C_0}{A_4B_2 - A_2B_4}$ cu raportul $\dfrac{C_1}{A_4B_3 - A_3B_4}$.

2. Cercetăm acum cazul cînd scara rectilinie a nomogramei este proiectivă. În acest caz ecuația lui Soreau este :

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{a'x + b'}{x + c'} & \dfrac{d'x + e'}{x + f'} & 1 \\ g'f_2 + h'g_2 + i' & j'f_2 + k'g_2 + m' & 1 \\ n'f_3 + p'g_3 + r' & s'f_3 + t'g_3 + u' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În urma unei transformări proiective putem aduce scara rectilinie pe una din axele de coordonate

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\rho x + a}{x + b} & 0 & 1 \\ cf_2 + dg_2 + e & gf_2 + hg_2 + j & 1 \\ mf_3 + ng_3 + p & \nu f_3 + sg_3 + t & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd membrul stîng al ecuației (9), unde pentru simplificarea calculelor s-a considerat $\rho = \nu = 1$, găsim :

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(c - gm)f_2f_3x + (d - hm)g_2f_3x + b(c - gm)f_2f_3 + \\ &+ b(d - hm)g_2f_3 + (-1 + e - jm)f_3x + [-a + b(e - jm))]f_3 + \\ &+ (cs - ng)f_2g_3x + (ds - hn)g_2g_3x + b(cs - ng)f_2g_3 + \\ &+ b(ds - hn)g_2g_3 + (-s + es - jn)g_3x + [-as + \\ &+ b(es - jn)]g_3 + (g + ct - gp)f_2x + (h + dt - hp)g_2x + \\ &+ [ag + b(ct - gp)]f_2 + [ah + b(dt - hp)]g_2 + \\ &+ [j - t + (et - pj)]x + a(j - t) + b(et - pj) = 0. \end{aligned}$$

Pentru a găsi condițiile în care ecuația (1′) se reprezintă printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu scara regulată proiectivă, iar celelalte două scări situate de două curbe, rezolvăm sistemul obținut prin identificarea coeficienților ecuațiilor (1′) și (10) :

$$
\begin{aligned}
&c - gm = A_0, && b(ds - hn) = B_3,\\
&d - hm = A_1, && -s + es - jn = B_4,\\
&b(c - gm) = A_2, && -as + b(es - jn) = B_5,\\
&b(d - hm) = A_3, && g + ct - gp = C_0,\\
&-1 + e - jm = A_4, && h + dt - hp = C_1,\\
&-a + b(e - jm) = A_5, && ag + b(ct - gp) = C_2,\\
&cs - ng = B_0, && ah + b(dt - hp) = C_3,\\
&ds - hn = B_1, && j - t + et - pj = C_4,\\
&b(cs - ng) = B_2, && a(j - t) + b(et - pj) = C_5.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2.1. Dacă $A_0 \neq 0$ și $A_0C_2 - A_2C_0 \neq 0$, soluția sistemului (11) este următoarea :

$$a = \frac{A_2A_4 - A_0A_5 + A_2}{A_0},\quad b = \frac{A_2}{A_0},\quad c = A_0 + \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,m$$

$$d = A_1 + \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5}\,m,\quad g = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$e = 1 + A_4 + \frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4}\cdot\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,m,$$

$$h = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$j = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\cdot\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4},$$

$$n = \frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4}\,m + \frac{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4}{A_0C_2 - A_2C_0}, \tag{12}$$

$$p = 1 - C_0\frac{A_2A_4 - A_0A_5}{A_0C_2 - A_2C_0} + \left(A_0 + \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,m\right)\times$$

$$\times\left[\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_0C_2 - A_2C_0}\right],$$

$$s = \frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4},$$

$$t = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

unde parametrul m rămîne arbitrar.

Sistemul (11) este compatibil dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{B_3}{B_1}$$

$$\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_0C_3 - A_2C_1} = \frac{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4}{A_0A_5B_1 - A_2A_4B_1 - A_0A_1B_5 + A_1A_2B_4}$$

$$B_1C_0 - B_0C_1 - (A_1C_0 - A_0C_1)\frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} + \tag{13}$$

$$+ (A_1B_0 - A_0B_1)\left[\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \right.$$

$$\left. - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5}\right] = 0$$

$$B_4C_0 - B_0C_4 - (A_4C_0 - A_0C_4)\frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} +$$

$$+ (A_4B_0 - A_0B_4)\left[\frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_2A_4 - A_0A_5}\,\frac{A_0(A_5B_4 - A_4B_5)}{A_0A_5B_0 - A_2A_4B_0 - A_0^2B_5 + A_0A_2B_4} - \right.$$

$$\left. - \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5}\right] = 0.$$

2.2. Dacă $A_0 \neq 0$, $A_0C_2 - A_2C_0 = 0$, soluția sistemului (11) este următoarea :

$$a = \frac{A_2A_4 - A_0A_5 + A_2}{A_0},\quad b = \frac{A_2}{A_0};\ c = A_0,\ d = A_1 +$$

$$+ \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5}\,m,\quad e = 1 + A_4 + \frac{(A_0B_4 - A_4B_0)(A_0C_3 - A_2C_1)}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2A_4 - A_0A_5)}\,m,$$

$$g = 0,\ h = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_2A_4 - A_0A_5}\quad j = \frac{C_0}{A_0} + \frac{A_0C_5 - A_2C_4}{A_2A_4 - A_0A_5},$$

$$n = \frac{B_0}{A_0}\,m - \frac{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2A_4 - A_0A_5)}{A_0(A_0C_3 - A_2C_1)}, \tag{14}$$

$$p = 1 + \frac{(A_1C_0 - A_0C_1)(A_2A_4 - A_0A_5)}{A_0(A_0C_3 - A_2C_1)} + \frac{C_0}{A_0}\,m,$$

$$s = \frac{B_0}{A_0},\quad t = \frac{C_0}{A_0},$$

unde m este un parametru arbitrar.

Soluția (14) are loc dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_2}{C_0},$$

$$(15)\quad \frac{A_0B_5 - A_2B_4}{A_0A_5 - A_2A_4} = \frac{B_0}{A_0},$$

$$A_0(A_0B_4 - A_4B_0)(A_0C_3 - A_2C_1) = (A_0B_1 - A_1B_0)[A_0(A_0C_5 - A_2C_4) + C_0(A_2A_4 - A_0A_5)],$$

$$A_0(A_0C_4 - A_4C_0)(A_0C_3 - A_2C_1) = (A_0C_1 - A_1C_0)[A_0(A_0C_5 - A_2C_4) + C_0(A_2A_4 - A_0A_5)].$$

2.3. Dacă $A_0 = 0$, rezultă și $A_2 = 0$, iar soluția sistemului (11) este :

$$a = \frac{A_3A_4 - A_1A_5 + A_3}{A_1}, \quad b = \frac{A_3}{A_1}, \quad c = \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5}m,$$

$$d = A_1 + \frac{A_1C_3 - A_3C_1}{A_3A_4 - A_1A_5}m, \qquad g = \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5},$$

$$e = 1 + A_4 + \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)}{B_0(A_1A_5 - A_3A_4)} \cdot \frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_3A_4 - A_1A_5}m,$$

$$(16)\quad h = \frac{A_1C_3 - A_3C_1}{A_3A_4 - A_1A_5}, \quad j = \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2},$$

$$n = \frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4}m - \frac{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)}{A_1C_2 - A_3C_0},$$

$$p = 1 - \frac{C_0(A_3A_4 - A_1A_5)}{A_1C_2 - A_3C_0} + \left[\frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5}\right]m,$$

$$s = \frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4},$$

$$t = \frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5},$$

unde m rămîne un parametru arbitrar.

Soluția (16) are loc dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{B_3}{B_1},$$

$$\frac{A_1C_2 - A_3C_0}{A_1C_3 - A_3C_1} = \frac{B_0(A_1A_5 - A_3A_4)}{A_1A_5B_1 - A_3A_4B_1 - A_1^2B_5 + A_1A_3B_4},$$

$$(17)\quad B_1C_0 - B_0C_1 - A_1C_0\frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4} + A_1B_0\left[\frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5}\right] = 0,$$

$$B_4C_0 - B_0C_4 - A_4C_0\frac{A_1B_5 - A_3B_4}{A_1A_5 - A_3A_4} + A_4B_0\left[\frac{A_1(A_5B_4 - A_4B_5)(A_3C_0 - A_1C_2)}{B_0(A_3A_4 - A_1A_5)^2} - \frac{A_1C_5 - A_3C_4}{A_3A_4 - A_1A_5}\right] = 0.$$

Exemple. 1. Considerăm ecuația de ordinul cinci nomografic :

$$(f_2 + g_2 - x - 2)f_3 + (-3f_2 - 4g_2 + 2x - 3)g_3 + f_2x + 2g_2x + 3f_2 + 4g_2 + 5x + 3 = 0.$$

În acest caz, condițiile (7) sînt îndeplinite și $C_0 = 1$.
Parametrii scărilor nomogramei se calculează după formulele (6) :

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 5,\ e = 1,\ f = 2,\ g = 7,\ h = -1,$$
$$j = 1,\ m = -2,\ n = 2.$$

Ecuația lui Soreau corespunzătoare este :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2f_2 + 3g_2 + 5 & f_2 + 2g_2 + 7 & 1 \\ f_3 - g_3 + 1 & f_3 - 2g_3 + 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Se dă ecuația de ordinul cinci nomografic :

$$(f_2x + 2g_2x + 2f_2 + 4g_2 + 3x + 5)F_3 + (2f_2x + g_2x + 4f_2 + 2g_2 + x + 1)g_3 + f_2x + 2g_2x + 3f_2 + 3g_2 + 3x + 2 = 0.$$

Condițiile (13) sînt îndeplinite, $A_0 \neq 0$, $A_0C_2 - A_2C_0 \neq 0$, iar parametrii scărilor nomogramei, calculați după formulele (12), sînt :

$$a = 3,\ b = 2,\ c = 1 + m,\ d = 2 - m,\ e = 4 - 2m,$$
$$g = 1,\ h = -1,\ j = -2,\ n = -1 + m,$$
$$p = 1 + m,\ s = 1,\ t = 1.$$

În acest caz ecuația lui Soreau este :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x+3}{x+2} & 0 & 1 \\ (1+m)f_2+(2-m)g_2+(4-2m) & f_2-g_2-2 & 1 \\ mf_3+(1+m)g_3+(1+m) & f_3+g_3+1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primită la redacție la 18 martie 1968

Academia Republicii Socialiste România
— filiala Cluj. Institutul de calcul.

NOMOGRAMMES DE GENRE DEUX À ÉCHELLE RECTILIGNE RÉGULIÈRE OU PROJECTIVE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on étudie la représentation des équations du cinquième ordre nomographiques (1′) à l'aide des nomogrammes à points alignés à une échelle rectiligne et deux autres échelles disposées sur deux courbes quelconques.

On considère le cas où l'échelle rectiligne du nomogramme est régulière. L'équation de Soreau est (3), où $\rho = \nu = 1$. Si les conditions (7) sont remplies, les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme sont données par la solution (6) du système (5).

On traite ensuite le cas où l'échelle rectiligne du nomogramme est projective. On analyse les sous-cas 2.1, 2.2, 2.3, on donne les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme, ainsi que les conditions qu'il faut remplir pour que la solution du système existe.

BIBLIOGRAFIE

1. Bal L., Radó F., *Lecții de nomografie.* Ed. tehnică, București, 1956.
2. Bal L., Mihoc M., *Sur une classe de nomogrammes à échelles de type donné.* Mathematica, **8** (31), *2*, 199—216 (1966).
3. Джемс Л. Е., Казмин В. В., *Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами.* Номографической сборник, Москва, **2**, 133—1340 (1962).
4. Глаголев Н. А., *Курс номографии*, Изд. 2-е, М. Гос. изд.-во, „Высшая школа", 1961.