CALCULUL LOGARITMILOR

Cercetător principal **O. Aramă**

1. Funcția logaritmică

Fie dat un număr real, pozitiv, a ($a \neq 1$). Prin „funcție logaritmică în baza a“ se înțelege funcția reală de variabilă reală, care realizează corespondența de la o valoare oarecare x ($x>0$), la rădăcina y a ecuației

$$x = a^y. \tag{1}$$

Să presupunem pentru fixarea ideilor că $a>1$. În această ipoteză, ținînd seama de faptul că funcția a^y (considerată ca funcție de variabilă independentă y) este continuă și strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, \infty)$ și că

$$\lim_{y\to-\infty} a^y = 0; \quad \lim_{y\to+\infty} a^y = +\infty \qquad (a>1),$$

rezultă că oricare ar fi valoarea pozitivă dată x, ecuația (1) în necunoscuta y admite o soluție și una singură. Această soluție se notează astfel:

$$y = \log_a x \tag{2}$$

și poartă denumirea de „logaritmul în baza a a numărului x“. Numărul a se numește „bază“ a sistemului de logaritmi considerat.

Se demonstrează în cursurile de analiză matematică că funcția $\log_a x$ este continuă pe intervalul $(0, \infty)$ și de asemenea, că pe acest interval ea este strict crescătoare, respectiv strict descrescătoare, după cum $a>1$, sau $0<a<1$. De asemenea se demonstrează existența limitelor de mai jos, iar dacă de exemplu $a>1$, atunci au loc egalitățile

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

Sînt de reținut și următoarele două egalități, care rezultă din definiția funcției logaritmice:

$$\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0.$$

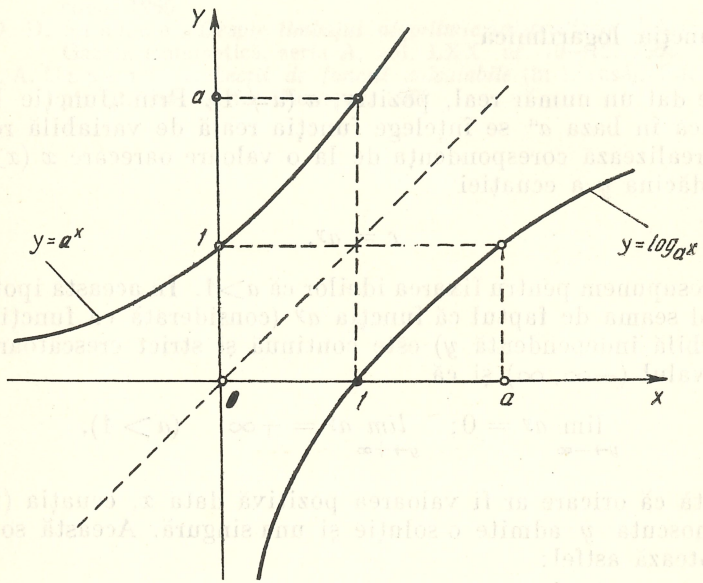


Fig. 1

Dacă într-un plan, raportat la un sistem cartezian (ortogonal) de coordonate, se reprezintă curbele de ecuații $y=a^x$ și $y=\log_a x$, aceste curbe vor fi simetrice în raport cu bisectoarea $y=x$,

întrucît funcțiile a^x și $\log_a x$ sînt inverse una față de cealaltă (fig.1). Ținînd seamă de definiția funcției $\log_a x$, rezultă că are loc pentru orice $x\in(0, \infty)$ egalitatea

$$a^{\log_a x} = x. \tag{3}$$

Se demonstrează că funcția $\log_a x$ verifică următoarele ecuații funcționale:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \tag{4}$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (x_1>0,\ x_2>0), \tag{4'}$$

care stau de altfel la baza calculului cu logaritmi.

Din identitatea (3) rezultă îndată identitatea

$$\log_a (M^\alpha) = \alpha \cdot \log_a M, \tag{5}$$

valabilă oricare ar fi numărul pozitiv M și oricare ar fi numărul real α. Într-adevăr

$$\log_a (M^\alpha) = \log_a (a^{\alpha \log_a M}) = \alpha \cdot \log_a M.$$

Fie b $(b\neq 1)$ un număr pozitiv oarecare și fie $\log_b x$ funcția logaritmică în baza b. Logaritmînd în baza b ambii membri ai egalității (3) și ținînd seamă de proprietatea (5), se obține egalitatea $(\log_a x)(\log_b a) = \log_b x$, sau

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{6}$$

Înlocuind în egalitatea precedentă pe x cu b se obține

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1$$

Egalitatea (6) ne arată că pentru a trece de la logaritmul în baza b a unui număr x $(x>0)$, la logaritmul într-o altă bază a a aceluiași număr x, este necesar să înmulțim $\log_b x$ cu factorul

$$M_a = \frac{1}{\log_b a}. \tag{7}$$

Acest factor se numește „modulul de transformare de la baza b la baza a".

În practica calculului cu logaritmi, se consideră frecvent ca bază a sistemului de logaritmi numărul 10. Logaritmii calculați în baza 10 se numesc *logaritmi zecimali*, sau ai lui *Briggs* și se notează pentru simplicitatea scrierii astfel:

$$\log_{10} x = \lg x.$$

În considerații teoretice se utilizează adesea ca bază, numărul e. Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau ai lui *Neper* și se notează astfel:

$$\log_e x = \ln x.$$

La sfîrșitul acestui paragraf vom arăta motivul pentru care în cursurile de analiză matematică se preferă utilizarea logaritmilor naturali în locul oricărui alt sistem de logaritmi. Acest fapt pare curios la prima vedere, întrucît logaritmii în baza 10 se bucură de remarcabile avantaie din punct de vedere al calculului numeric. Vom arăta în continuare în ce constau aceste avantaje.

Din definiția logaritmilor (în baza 10) rezultă că

$$\lg 1 = 0, \quad \lg 10 = 1, \quad \lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3, \ldots\ldots$$

Dacă s-ar cere să aflăm valoarea logaritmului în baza 10 al unui număr care nu este o putere întreagă a bazei 10, de exemplu al numărului 1349, atunci am putea să procedăm astfel: Numărul 1349 se află cuprins între 1000 și 10000. De aici, în baza faptului că funcția „lg" este crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$, rezultă inegalitățile $\lg 1000 < \lg 1349 < \lg 10000$, sau $\perp\ 3 < \lg 1349 < 4$. În consecință numărul $\lg 1349$ va avea o reprezentare zecimală de forma

$$\lg 1349 = 3,\ a_1a_2a_3 \ldots\ldots = 3 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\ldots,$$

unde a_1, a_2, a_3, ... reprezintă anumite numere dintre numerele 0, 1, ..., 9. Partea întreagă a valorii logaritmului considerat (adică „caracteristica" sa) se determină cu ușurință și problema pusă, revine la aflarea părții zecimale (numită „mantisa" logaritmului considerat).

Se observă apoi că numerele 1349 și 134,9 sînt legate între ele prin formula $1349 = 134{,}9 \cdot 10$ și deci că

$$\lg 1349 = \lg 134{,}9 + \lg 10 = 1 + \lg 134{,}9.$$

De aici rezultă că mantisele logaritmilor (în baza 10) ale numerelor 1349 și 134,9 sînt identice. Astfel, una dintre particularitățile sistemului de logaritmi zecimali constă în simplicitatea cu care se poate afla caracteristica, precum și în invarianța mantisei față de operația de înmulțire a numerelor cu 10 sau cu o putere întreagă a lui 10. Explicația acestor proprietăți se află în faptul că în cazul sistemului de logaritmi zecimali, baza sistemului respectiv de logaritmi coincide cu baza sistemului de reprezentare al numerelor (cu baza sistemului de numerație).

În matematică, prezintă însă un interes nu numai calculele numerice, ci și calcule cu expresii literale, în care literele simbolizează numere. În acest caz se pune problema de a alege o astfel de bază a sistemului de logaritmi, încît calculele respective să fie cît mai simple. Din acest punct de vedere logaritmii naturali par ar fi cei mai avantajoși, întrucît derivata funcției logaritmice în baza e

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

se exprimă mai simplu decît derivata funcției logaritmice în oricare altă bază a:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

În particular, dacă $a = 10$, vom avea

$$\frac{d}{dx}(\lg x) = \frac{1}{x \cdot 2{,}30259\ldots},$$

întrucît (după cum se va vedea în continuare) $\ln 10 = 2{,}30259\ldots$.

2. Scurt istoric

Autorii primelor tabele de logaritmi au pornit de la ideia legăturii care există între termenii unei progresii aritmetice și termenii unei progresii geometrice. Această legătură a fost pusă în evidență încă din anul 1484 de *Chaquet* și apoi de către *Stiefel* în anul 1544, fără să i se acorde vreo importanță practică.

Au urmat apoi o serie de lucrări, pe care le putem considera ca precursoare lucrărilor de bază în precizarea noțiunii de logaritm, aparținînd lui *John Neper* (1550-1617) și intitulate „Miriﬁci logarithmorum canonis descritio“ și „Miriﬁci logarithmorum canonis constructio“, precum și lucrării lui *Jost Bürgi* (1552-1632) cu titlul „Arithmetische und Geometrische Progress Tabullen“. Sistemele de logaritmi utilizate de Neper și Bürgi au avut ca bază numerele $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, respectiv $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$, avînd ca valori aproximative numerele $\frac{1}{e}$, respectiv e. Utilizarea acestor sisteme de logaritmi în calcule numerice au prezentat însă greutăți din cauză că bazele în care sînt concepute, sînt diferite de baza sistemului de numerație, adică de numărul 10.

Henry Briggs, matematician englez, are meritul de a fi considerat pentru prima dată logaritmi în baza 10, în lucrarea sa „Arithmeticae logarithmorum“ și de a fi întocmit o tabelă de astfel de logaritmi. Alcătuirea unei astfel de tabele a fost impusă de considerații privind aplicațiile ei în calculul numeric. Se consideră ca deosebit de interesante metodele utilizate de Briggs la calculul logaritmilor.

După descoperirea logaritmilor, ideia utilizării lor în calcule numerice s-a răspîndit relativ repede. În Germania, *Benjamin Bohr* a publicat o ediție simplificată a lucrării lui Neper, ediție folosită și de celebrul astronom *Kepler*, care a cunoscut printre primii, foloasele practice ale tabelelor de logaritmi. Cărți similare au apărut și în Franța și Olanda.

În ceea ce privește logaritmii naturali, este greu de spus cu certitudine, cine a formulat în mod clar pentru prima oară noțiunea de logaritm natural. Valori aproximative ale logaritmilor naturali ai unor numere, au fost obținute de *John Speidell* în anul 1622, precum și într-un apendice anonim la o traducere, apărută în anul 1668, a unei lucrări a lui Neper. Totuși denumirea de *logaritm natural* a fost folosită pentru prima dată, într-o lucrare deschizătoare de noi drumuri, aparținînd lui *N.Mercator* (1620—1687). În aceeastă lucrare se stabilește (1668) dezvoltarea

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

cu ajutorul căreia a fost lămurită în mod clar noțiunea de logaritm natural. În același an, *James Gregory* (1638-1675) stabilește următoarea remarcabilă dezvoltare în serie

$$\ln\frac{M}{N}=2\left[\frac{M-N}{M+N}+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{2n+1}+\ldots.\right],$$

care a fost studiată mai amănunțit de *E. Halley* în anul 1695.

Modul actual de scriere al exponenților fracționari și negativi a fost utilizat de *Newton* în anul 1676. În ceea ce privește anul în care s-a introdus definiția exponențială a logaritmilor, este greu de precizat. Această definiție este însă utilizată de *Euler* în anul 1736, în lucrarea sa „Mechanica sive motus scientia analitice exposita“, t.I, cap. II, nr.171 (p.60 din Opera omnia (2), vol. 1), fiind considerată ca o definiție curentă a logaritmilor.

În anul 1668, *N.Mercator* definește logaritmii cu ajutorul ariei unei porțiuni de suprafață plană, delimitată de un arc de hiperbolă și de anumite segmente de drepte, ceea ce revine de fapt la definiția:

$$\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t}\quad(x>0).$$

În anul 1714, *R.Côtes* (1682-1716) a obținut funcția logaritmică cu ajutorul unei ecuații funcționale.

3. O metodă elementară de calcul al valorilor logaritmilor

Vom indica în continuare un procedeu de calcul al valorilor logaritmilor, foarte comod în cazul în care baza sistemului de logaritmi este un număr întreg oarecare și în cazul cînd rezultatul calculului se cere să fie exprimat într-un sistem de reprezentare, a cărui bază să fie un număr natural relativ mic. Spre exemplificare, ne propunem să reprezentăm numărul lg 13 în baza de numerație 3. În acest scop vom scrie

$$\lg 13=a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\frac{a_5}{3^5}+\ldots,$$

unde a_0, a_1, a_2,... reprezintă anumite numere dintre numerele 0, 1, 2. Pentru a determina coeficienții a_0, a_1, a_2,..., vom scrie următoarea egalitate, care rezultă din definiția lui lg 13:

$$10^{a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\ldots} = 13. \qquad (8)$$

De aici rezultă că a_0 va fi cel mai mare dintre numerele 0, 1, 2, pentru care are loc inegalitatea

$$10^{a_0} \leqslant 13.$$

Se constată cu ușurință că $a_0 = 1$. Înlocuind în (8) pe a_0 cu 1 și împărțind ambii membri ai egalității (8) cu $10^{a_0} = 10$, și apoi ridicînd ambii membri ai noii egalități la puterea 3, vom obține

$$10^{a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\frac{a_4}{3^3}+\ldots} = (1,3)^3 = 2,197. \qquad (8')$$

Din această egalitate se constată că a_1 este cel mai mare dintre numerele 0, 1, 2, pentru care are loc inegalitatea

$$10^{a_1} \leqslant 2,197.$$

Prin încercări, se constată cu ușurință că $a_1 = 0$. Înlocuind în (8') pe a_1 cu 0 și ridicînd ambii membri ai egalității (8') la puterea 3 vom obține

$$10^{a_2+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\ldots} = (2,197)^3 = 10,604599373. \qquad (8'')$$

Din această egalitate se constată că $a_2 = 1$. Înlocuind în (8'') pe a_2 cu 1, împărțind apoi ambii membri cu $10^{a_2} = 10$ și ridicînd ambii membri la puterea 3, se obține

$$10^{a_3+\frac{a_4}{3}+\frac{a_5}{3^2}+\ldots} = (1,604599373)^3.$$

Din această egalitate se deduce că $a_3 = 0$.

Procedînd analog, se obține din aproape în aproape

$$a_4 = 0,\ a_5 = 0,\ a_6 = 2,\ a_7 = 0,\ a_8 = 0,\ a_9 = 1,\ \ldots.$$

și deci

$$\lg 13 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^9} + \ldots\ldots \qquad (9)$$

Ținînd seamă de modul în care au fost determinați coeficienții a_0, a_1, a_2...., vom putea scrie inegalitățile

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^9} < \lg 13 < 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^9},$$

care în sistemul de reprezentare zecimal se va transcrie

$$1,113911 < \lg 13 < 1,113979.$$

În exemplul considerat s-a ales ca bază a sistemului de reprezentare a lui lg 13, numărul 3. Se pot utiliza și alte sisteme de reprezentare. Este de observat însă faptul că, dacă baza sistemului de reprezentare este mare, atunci calculele devin laborioase. De acela, cel mai comod sistem de reprezentare este sistemul în baza 2.

4. Dezvoltarea funcției logaritmice în serie de puteri

Pentru a calcula valorile unei funcții date, pentru diverse valori ale variabilei independente și pentru a studia diversele ei proprietăți, se încearcă în numeroase cazuri a aproxima întîi funcția dată, cu alte funcții cunoscute, sau cu funcții ale căror valori se calculează relativ ușor. În acest sens prezintă o mare importanță aproximarea funcțiilor prin polinoame, iar o metodă des utilizată de aproximare a funcțiilor prin polinoame se bazează pe utilizarea polinoamelor lui *Taylor*. Vom studia în continuare o astfel de aproximare a funcției logaritmice, utilizînd o cale directă. În acest scop să considerăm formula

$$1 + q + q^2 + \ldots. + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \quad (q \neq 1),$$

în care să înlocuim pe q cu $-t$. Obținem

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq 1).$$

Să integrăm ambii membri ai acestei identități între limitele 0 și x numărul x, verificînd inegalitatea $x > -1$. Se obține formula

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad (x > -1), \qquad (9)$$

unde

$$(-1)^n R_n(x) = \int_0^x \frac{t^n\,dt}{1+t}. \qquad (10)$$

Pentru a obține o evaluare a restului $R_n(x)$, se poate aplica prima formulă de medie a calculului integral, în baza căreia vom avea

$$\int_0^x \frac{t^n\,dt}{1+t} = \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1+\theta x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

și deci

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+\theta x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0<\theta<1). \qquad (11)$$

Se observă că valoarea absolută a primului factor care intervine în această expresie a restului, este cuprinsă între numerele 1 și $\frac{1}{1+x}$, întrucît $x>-1$. Al doilea factor care intervine în expresia (11) a restului, adică factorul $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, converge (relativ repede) către zero, pentru orice x din intervalul $(-1,1]$, și către ∞ cînd $x>1$. De aici și din (9) rezultă că oricare ar fi valoarea lui x din intervalul $(-1,1]$, polinomul

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (12)$$

aproximează funcția $\ln(1+x)$ cu o aproximație $R_n(x)$, care tinde către zero, atunci cînd $n\to\infty$. Acest fapt se exprimă scriind că pentru $x\in(-1,1]$ are loc egalitatea

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \qquad (-1<x\leqslant 1) \qquad (13)$$

5. Calculul valorilor logaritmilor cu ajutorul seriilor de puteri.

Alcătuirea tabelelor de logaritmi.

Cu ajutorul formulei (9) se pot calcula valorile aproximative ale logaritmului natural al oricărui număr real $u>0$. Nu este însă recomandabil de a se aplica în mod direct formula (9) la

calculul logaritmilor naturali, întrucît pe de o parte, această formulă ne dă o valoare aproximativă a lui $\ln u$ numai în cazul în care $0<u\leqslant 2$, iar pe de altă parte, aproximația dată de această formulă este în general neconvenabilă din punct de vedere practic. Astfel, de exemplu pentru $x=1$, se obține din (13) reprezentarea lui $\ln 2$ prin următoarea serie

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.,$$

care converge foarte lent. Pentru a obține cu ajutorul acestei serii o valoare aproximativă cu trei zecimale exacte, ar trebui să însumăm primii 1000 de termeni, ceea ce rezultă din expresia (11) a restului $R_n(x)$. Pentru a îmbunătăți convergența seriei (13), să presupunem că $|x|<1$ și să înlocuim în (9) și (11) pe x cu $-x$. Vom obține

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots.. - \frac{x^n}{n} + R_n(-x) \qquad (|x|<1).$$

Să scădem membru cu membru această egalitate din (9), după ce în prealabil am înlocuit peste tot pe n cu $2n$. Vom obține

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots. + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + \rho_n(x). \qquad (14)$$

Pentru termenul rest $\rho_n(x)$ se obține din (11) egalitatea

$$\rho_n(x) = R_{2n}(x) - R_{2n}(-x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x} + \frac{1}{1-\theta_1 x}\right), \qquad (15)$$

unde $0<\theta<1$ și $0<\theta_1<1$. Din (15) obținem următoarea delimitare pentru $\rho_n(x)$:

$$|\rho_n(x)| < \frac{1}{n}\,\frac{|x|^{2n+1}}{1-|x|}. \qquad (16)$$

Cu ajutorul formulei (14) se pot calcula valorile aproximative ale lui $\ln u$ pentru orice număr pozitiv u. În acest scop, să considerăm substituția

$$u = \frac{1+x}{1-x}, \qquad (17)$$

care ne dă

$$x = \frac{u-1}{u+1}. \tag{18}$$

De aici se constată că, dacă $u > 0$, atunci $|x| < 1$. În consecință, pentru astfel de valori ale lui u restul ρ_n va tinde relativ repede către zero, atunci cînd $n \to \infty$, ceea ce se constată din (16). De exemplu, pentru $u = 2$, avem $x = \frac{1}{3}$ și $|\rho_n(x)| < \frac{1}{2n \cdot 3^{2n}}$. Totuși și în cazul dezvoltării (14), rapiditatea de convergență a seriei corespunzătoare nu este întotdeauna mulțumitoare, întrucît, dacă u ia valori mari, atunci x ia valori apropiate de 1, și după cum ne arată formula (16), restul $\rho_n(x)$ va tinde în acest caz relativ lent către zero. Vom arăta în cele ce urmează, cum se poate înlătura acest neajuns.

În primul rînd, să observăm că aflarea valorilor logaritmilor numerelor raționale (pozitive), se reduce în baza formulei (4'), la calculul valorilor logaritmilor numerelor naturale, iar acesta din urmă se reduce în baza formulei (4) la calculul valorilor logaritmilor numerelor naturale prime.

Să presupunem că s-au calculat valorile logaritmilor naturali ai primelor $n-1$ numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Atunci pentru a obține valoarea logaritmului natural al numărului prim următor, p_n, nu vom aplica direct formula (14) cu substituția $p_n = \frac{1+x}{1-x}$, ci vom calcula valoarea logaritmului natural al numărului

$$u = \frac{p_n}{p_n - 1} = 1 + \frac{1}{p_n - 1}.$$

Ținînd seamă de (18), se obține $x = \frac{1}{2p_n - 1}$ și de aici se observă că această valoare a lui x este relativ mică, iar seria, corespunzătoare formulei (14), va converge relativ repede. Însumînd un număr suficient de mare de termeni din seria respectivă, vom obține, cu o aproximație dorită, valoarea lui $\ln\left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right)$. Adunînd acestei valori, valoarea lui $\ln(p_n - 1)$, se va obține o valoare aproximativă pentru $\ln p_n$. Însă valoarea lui $\ln(p_n - 1)$ se calculează ușor cu ajutorul formulei (4), întrucît numărul $p_n - 1$ se va descompune într-un produs de puteri ai numerelor prime $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, ai căror logaritmi s-au presupus cunoscuți.

Rezultate și mai bune se obțin dacă se pornește de la calculul lui $\ln u$, unde

$$u = \frac{p_n^2}{p_n^2} \text{ și deci } x = \frac{1}{2p_n^2 - 1}.$$

Numărul x dat de această formulă este mai mic decît valoarea lui x obținută din formula (18). Pe de altă parte, numărul $p_n^2 - 1 = (p_n - 1)(p_n + 1)$ se va descompune de asemenea într-un produs de puteri ai numerelor prime $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, și în baza formulei (4), vom putea calcula cu ușurință valoarea lui $\ln(p_n^2 - 1)$. Procedînd ca mai sus, și ținînd seamă de egalitatea $\ln p_n = \frac{1}{2}\ln p_n^2$, ajungem la rezultatul dorit.

Prin diverse alte artificii, se poate micșora încă și mai mult valoarea lui x care se introduce în (14). De exemplu, calculele pot fi aranjate astfel, încît valoarea lui x care se înlocuiește în formula (14) să verifice inegalitatea $x < \frac{1}{3\,300}$. Pentru aceasta, va trebui ca numărul prim p_n, care intervine în (19) să fie mai mare sau cel puțin egal cu 41, întrucît $2 \cdot 41^2 - 1 = 3361 > 3300$. Pentru calculul valorilor logaritmilor naturali ai numerelor prime cuprinse între 2 și 37 se poate proceda de exemplu astfel: Se calculează întîi numerele, A, B, C, date de formulele

$$A = \ln \frac{81}{80} = \ln\left(1 + \frac{1}{80}\right),$$

$$B = \ln \frac{24}{25} = \ln\left(1 - \frac{1}{25}\right),$$

$$C = \ln \frac{128}{125} = \ln\left(1 + \frac{3}{125}\right).$$

Pentru calculul valorilor logaritmilor care intervin în aceste expresii este convenabil de a se utiliza formula (9), care ne conduce la calcule relativ ușor de efectuat. Chiar și un calculator cu o experiență eventual mai redusă în domeniul calculului numeric, va putea cu ajutorul acestei formule să calculeze pe A, B, C, cu 14 zecimale exacte, în decurs de o oră.

Pe de altă parte, ținînd seamă de descompunerile în factori primi ai numărătorilor și numitorilor fracțiilor care intervin în expresiile lui A, B, C, se obține următorul sistem de egalități

$$\begin{aligned} -4\ln 2 + 4\ln 3 - \ln 5 &= A \\ 3\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 5 &= B \\ 7\ln 2 - 3\ln 5 &= C, \end{aligned}$$

care ne permite aflarea numerelor ln 2, ln 3, ln 5 (cu 12 zecimale exacte, dacă pentru A, B, C se consideră valorile aproximative ale acestora, calculate cu 14 zecimale exacte):

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 3A - 12B + 7C \\ \ln 3 &= 5A - 19B + 11C \\ \ln 5 &= 7A - 28B + 16C. \end{aligned}$$

Cunoscînd valorile aproximative ale acestor logaritmi, vom putea calcula o valoare aproximativă a lui ln10 și apoi, utilizînd formula (7), vom putea calcula o valoare aproximativă a modulului de transformare de la baza e, la baza 10. Se arată că acest modul are următoarea valoare

$$M_{10} = \frac{1}{\ln 10} =$$

$$= 0{,}4342\ 9448\ 1903\ 2518\ 2765\ 1128\ 9189\ 1660\ 5082\ 2944\ \ldots,$$

întrucît

$$\ln 10 = 2{,}3025\ 8509\ 2994\ 0456\ 8401\ 7991\ 4546\ 8436\ 4207\ 6011\ldots$$

În continuare, se poate calcula valoarea lui ln 7, considerînd pentru u valoarea

$$u = \frac{7^4}{7^4 - 1} = \frac{7^4}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2},$$

iar apoi, se calculează simultan valorile lui ln 13 și ln 17 ținînd seamă de următoarele două egalități:

$$\frac{13^4}{13^4 - 1} = \frac{13^4}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17}, \quad \frac{17^3 + 1}{17^3} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13}{17^3}.$$

În mod analog se poate calcula valoarea lui ln 19, ținînd seamă de relația

$$19^3 + 1 = 4 \cdot 5 \cdot 7^3,$$

iar apoi, succesiv,

$$\ln 37,\ \ln 11,\ \ln 31,\ \ln 23,\ \ln 29,$$

ținînd seamă de relațiile

$$10 \cdot 37^2 - 1 = 3^4 \cdot 13^2; \qquad 11^6 - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37,$$

$$31^4 - 1 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 37; \qquad 23^3 + 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13,$$

$$7 \cdot 29^2 + 1 = 2^8 \cdot 23.$$

Pentru calculul valorilor acestor logaritmi se poate folosi formula (14), întrucît $|x| < \frac{1}{4\,000}$.

Cunoscînd valorile acestor logaritmi naturali, se pot calcula cu ușurință valorile logaritmilor zecimali ai numerelor respective, utilizînd formula de transformare $\lg x = M_{10} \cdot \ln x$, care rezultă din (6) și unde M_{10} este dat de (20).

6. Calculul aproximativ al valorilor logaritmilor prin interpolare

În continuare, vom arăta cum se poate calcula valoarea logaritmului unui număr real oarecare $r > 0$, care nu este rațional.

Se știe că mulțimea numerelor raționale este densă pe mulțimea numerelor reale. Aceasta înseamnă că orice număr real (irațional) r poate fi aproximat oricît de bine cu numere raționale, adică, oricare ar fi numărul real dat ε ($\varepsilon > 0$), există două numere raționale x_1 și x_2 astfel încît

$$r - \varepsilon < x_1 < r < x_2 < r + \varepsilon.$$

Presupunînd ε suficient de mic, astfel încît $r - \varepsilon > 0$ și ținînd seamă de faptul că funcția ln x este crescătoare, vor rezulta de aici inegalitățile

$$\ln(r - \varepsilon) < \ln x_1 < \ln r < \ln x_2 < \ln(r + \varepsilon).$$

Întrucît funcția ln x este continuă pe intervalul $(0, \infty)$, vom putea considera ca valoare aproximativă a lui ln r, valoarea lui

ln x_1, sau valoarea lui ln x_2, prima fiind o aproximantă prin lipsă, iar a doua — prin exces. Notînd cu $E_1 = \ln r - \ln x_1$ eroarea care se comite atunci cînd în locul valorii lui ln r se consideră ln x_1, au loc următoarele delimitări:

$$0 < E < \ln(r+\varepsilon) - \ln(r-\varepsilon) = \ln\left(1 + \frac{2\varepsilon}{r-\varepsilon}\right) < \frac{2\varepsilon}{r-\varepsilon}. \quad (19)$$

Procedeul de aproximație indicat mai sus, corespunde procedeului de interpolare a lui *Lagrange*, în cazul unui singur nod. Rezultate mai precise se pot obține, dacă se utilizează pentru calculul aproximativ al valorilor logaritmilor, polinoame de interpolare ale lui Lagrange, considerate pe mai multe noduri.

După cum se știe (a se consulta de exemplu lucrarea [9], depusă acest volum), fiind dată o funcție reală f, de o variabilă reală x, definită pe $n+1$ valori ale acestei variabile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, atunci polinomul P_n de gradul n, care verifică condițiile

$$P(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \quad (20)$$

este dat de formula

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}. \quad (21)$$

Acest polinom se numește polinomul de interpolare al lui *Lagrange*, asociat funcției f și nodurilor $x_0, x_1, \ldots, x_n$. În calculul numeric, se utilizează de obicei o altă formă de scriere a acestui polinom, care se datorește lui *Newton*:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)[x_0, x_1; f] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0, x_1, x_2; f] + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n; f], \quad (22)$$

unde $[x_0, x_1, \ldots, x_k; f]$ reprezintă diferența divizată de ordinul k a funcției f pe nodurile $x_0, x_1 \ldots, x_k$. În cazul în care nodurile x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ sînt echidistante, notînd cu $h = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, formula precedentă se scrie

$$P_n(x) = f(x_0) + \Delta_h^1 f(x_0)\frac{x-x_0}{1!\,h} + \Delta_h^2 f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2} + \ldots + \Delta_h^n f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n}, \quad (23)$$

unde $\Delta_h^k f(x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ reprezintă diferențele (obișnuite) succesive ale funcției f pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dacă se cunosc valorile diferențelor simple, sau ale diferențelor divizate care intervin în expresiile de mai sus ale polinomului de interpolare, atunci se poate calcula cu ajutorul acestui polinom, valoarea aproximativă a funcției f, în orice punct pe care ea este definită. În ceea ce privește restul $R_n(x; f) = f(x) - P_n(x)$, se arată că

$$R_n(x; f) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)[x_1\ x_0, \ldots, x_n; f], \quad (24)$$

iar dacă f admite derivată de ordinul $n+1$, continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, unde $\alpha = \min(x, x_0, \ldots, x_n)$, iar $\beta = \max(x, x_0, \ldots, x_n)$, atunci formula de mai sus se scrie

$$R_n(x; f) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (25)$$

unde ξ reprezintă un număr din intervalul (α, β). Notînd cu $A_n[f] = \max_{\alpha \le x \le \beta} |f^{(n+1)}(x)|$, vom obține pentru restul $R_n(x; f)$ următoarea delimitare

$$|R_n(x; f)| \leqslant \frac{|x-x_0|\,|x-x_1|\ldots|x-x_n|}{(n+1)!} A_{n+1}[f]. \quad (26)$$

Exemplu. Se cere să se calculeze o valoare aproximativă a lui lg 12, 7, utilizîndu-se o tabelă, conținînd valori ale logaritmilor zecimali ai numerelor naturale de la 1 pînă la 100, cu cinci zecimale exacte.

Din tabelă se obține

x	lg x	Δ^1	Δ^2
13	1,07918	0,03476	−0,00257
13	1,11394	0,03219	
14	1,14613		

Vom efectua întîi o interpolare liniară. Înlocuind în formulele (23) și (26) pe n cu 1, obținem

$$f(x) = f(x_0) + \Delta^1 f(x_0)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + R_1(x; f),$$

unde

$$|R_1(x;f)| \leqslant \frac{|x-x_0|\,|x-x_1|}{2} A_2[f].$$

Considerînd în aceste formule în locul lui f, funcția „lg" și înlocuind x_0 cu 12, x_1 cu 13 iar x cu 12,7, vom obține

$$\lg 12{,}7 = 1{,}07918 + 0{,}03476 \cdot 0{,}7 + R_1 = 1{,}103512 + R_1.$$

Apoi, $A_2 = \max\limits_{12\leq x\leq 13} \left|\frac{d^2 \lg x}{dx^2}\right| = \max\limits_{12\leq x\leq 13} \left[\frac{1}{x^2 \ln 10}\right] < \frac{1}{2{,}3\cdot 12^2} < 0{,}00302,$

astfel că

$$|R_1| < \frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}00302 < 0{,}00318.$$

Dacă dorim să obținem un rezultat și mai precis, atunci este recomandabil să folosim o interpolare pătratică, sau eventual de un ordin mai înalt.

Înlocuind în formulele (23) și (26) pe n cu 2, vom obține

$$f(x) = f(x_0) + \Delta^1 f(x_0)\frac{x-x_0}{h} + \Delta^2 f(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} + R_2(x;f),$$

unde

$$|R_2(x;f)| \leqslant \frac{|x-x_0|\,|x-x_1|\,|x-x_2|}{3!} A_3[f].$$

Vom înlocui în aceste formule pe f cu funcția „lg" și vom lua apoi $x_0 = 12$, $x_1 = 13$, $x_2 = 14$, $x = 12{,}7$. Corecția pătratică va fi

$$\Delta^2 f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} = \frac{1}{2}\cdot(-0{,}00257)\cdot 0{,}7\cdot(-0{,}3) = 0{,}00026985$$

și ținînd seamă de rezultatul obținut anterior, prin interpolare liniară, vom avea

$$\lg 12{,}7 = 1{,}10378185 + R_2,$$

unde

$$|R_2| \leqslant \frac{0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 1{,}3}{6}\cdot \max_{12\leq x\leq 14}\left[\frac{2}{x^3\cdot \ln 10}\right] <$$

$$< \frac{1}{3}\cdot(0{,}7)\ (0{,}3)\ (1{,}3)\cdot\frac{1}{12^3\cdot 2{,}3} < 0{,}000023.$$

7. Calculul aproximativ al valorilor logaritmilor naturali cu ajutorul formulelor de cuadratură.

Posibilitatea utilizării formulelor de cuadratură la calculul aproximativ al logaritmilor rezultă din următoarea egalitate

$$\ln(a+1) = \int_0^a \frac{dx}{1+x} \qquad (a > 0).$$

Această egalitate ne conduce la următoarea interpretare geometrică. Dacă se reprezintă grafic curba de ecuație $y = \frac{1}{1+x}$, atunci $\ln a$ reprezintă aria figurii plane, cuprinsă între curba $y = \frac{1}{1+x}$, axa Ox, axa Oy și dreapta $x = a$ (fig. 2).

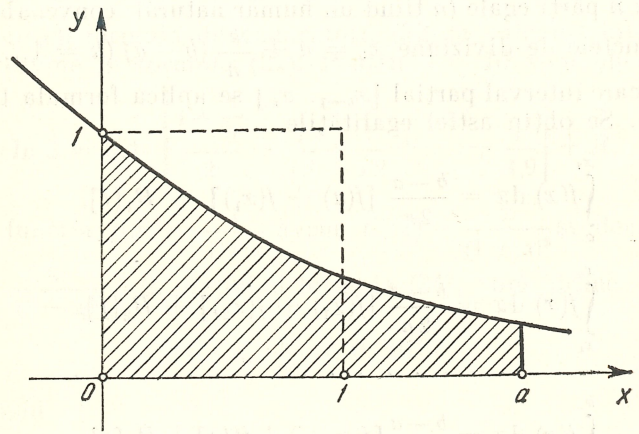


Fig. 2

Să considerăm pentru exemplificare $a = 1$. Atunci din egalitatea precedentă obținem

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}. \qquad (27)$$

În cele ce urmează vom da valori aproximative ale integralei care intervine în membrul al doilea al egalității (27), cu ajutorul unor formule de cuadratură.

Una dintre cele mai simple formule de cuadratură este formula trapezului:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] + R[f] \qquad (a<b), \tag{28}$$

unde R este restul formulei. Dacă funcția f admite pe intervalul $[a,b]$ o derivată de ordinul al doilea, continuă, atunci notînd $A_2\,[f] = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, se arată că are loc delimitarea

$$|R[f]| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\,A_2[f]. \tag{29}$$

Pentru a obține însă un rezultat mai precis, se împarte intervalul $[a,b]$ în n părți egale (n fiind un număr natural, convenabil ales), prin punctele de diviziune $x_k = a + \frac{k}{n}\,(b-a)$ $(k = 1,\ldots, n-1)$ și la fiecare interval parțial $[x_{k-1},\ x_k]$ se aplică formula trapezului (28). Se obțin astfel egalitățile

$$\begin{aligned}
&\int_a^{x_1} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\,[f(a)+f(x_1)] + R_1[f],\\
&\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_1)+f(x_2)] + R_2[f],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_{n-1})+f(b)] + R_n[f],
\end{aligned} \tag{30}$$

unde

$$|R_k[f]| \leqslant A_{2,k}\,\frac{(x_{k-1}-x_k)^3}{12} = \frac{(b-a)^3}{12\,n^3}\,A_{2,k}, \tag{31}$$

$$A_{2,k} = \max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} |f''(x)|.$$

Adunînd membru cu membru egalitățile (30), se obține

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right] + R, \tag{32}$$

unde

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{33}$$

Dacă se notează $A_2 = \max\limits_{k=1,\ldots,n} A_{2,k} = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, atunci din (31) și (33) se obține

$$|R| \leqslant |R_1| + |R_2| + \ldots + |R_k| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,A_2. \tag{34}$$

De aici se deduce că $|R| < \varepsilon$, dacă n verifică inegalitatea

$$n > \frac{(b-a)}{2}\sqrt{\frac{(b-a)}{3\varepsilon}\,A_2}. \tag{35}$$

Să aplicăm formula de cuadratură (32) la calculul integralei, care intervine în formula (27). Pentru $n = 10$ vom obține

$$\ln 2 = 0{,}1\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \ldots + \frac{1}{1{,}9}\right] + R.$$

Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{1+x}$ avem $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ și deci $A_2 = \max\limits_{0\leq x\leq 1} \frac{2}{(1+x)^3} = 2$. Aplicînd formula (34), vom obține

$$|R| \leqslant \frac{1}{600} < 0{,}00167.$$

Avem apoi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots; \quad \frac{1}{14} = 0{,}0714\ldots; \quad \frac{1}{17} = 0{,}0588\ldots;\\
&\frac{1}{12} = 0{,}0833\ldots; \quad \frac{1}{15} = 0{,}0666\ldots; \quad \frac{1}{18} = 0{,}0555\ldots;\\
&\frac{1}{13} = 0{,}0769\ldots; \quad \frac{1}{16} = 0{,}0625\ldots; \quad \frac{1}{19} = 0{,}0526\ldots;\\
&\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{19} = 0{,}6185\ldots
\end{aligned}$$

La opt dintre împărțirile precedente ne-am mărginit la patru zecimale. S-a calculat astfel suma $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{19}$ cu o eroare mai mică decît $\frac{8}{10^4}$. Prin urmare avem

$$\ln 2 = 0{,}075 + 0{,}618 + \varepsilon_1 + R = 0{,}6935 + \varepsilon_2,$$

unde $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + R$ și

$$|\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon_1| + |R| < 0{,}0008 + 0{,}00167 = 0{,}00247.$$

Rezultă deci că $\ln 2 = 0{,}69\ldots$

Pentru a obține un rezultat mai precis, va trebui să utilizăm pentru calculul integralei care intervine în (27) o formulă de cuadratură de un grad de precizie mai mare. Să considerăm formula de cuadratură a lui *Simpson*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R[f], \qquad (36)$$

unde R reprezintă restul formulei. Dacă funcția f admite pe intervalul $[a,b]$ o derivată de ordinul al patrulea, continuă, atunci notînd $A_4[f] = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$, se arată că are loc delimitarea

$$|R[f]| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} A_4[f]. \qquad (37)$$

Pentru a obține însă un rezultat mai precis, se împarte intervalul $[a, b]$ în n părți egale (n fiind un număr natural convenabil ales) prin punctele de diviziune $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k = 1,\ldots, n-1)$ și pentru fiecare interval parțial $[x_{k-1}, x_k]$ se aplică formula (36). Prin adunare membru cu membru a egalităților astfel obținute, se ajunge, întocmai ca și în cazul precedent, la formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \right. \qquad (38)$$

$$\left. + 2\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right]\right\} + R,$$

unde

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4} A_4[f] \quad \left(A_4[f] = \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|\right). \qquad (39)$$

Să aplicăm formula de cvadratură (38), (39) la calculul integralei (27). Vom considera în acest scop $n = 10$, adică vom împărți intervalul $[0,1]$ în 10 părți egale și vom obține

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \text{ și } A_4 = \max_{0\leq x\leq 1} |f^{(4)}(x)| = 24.$$

În baza formulei (39) vom avea

$$|R| \leqslant \frac{24}{2\,880 \cdot 10\,000} = \frac{1}{1\,200\,000} < 0{,}000\,000\,834,$$

calculul valorii lui $\ln 2$ îl efectuăm cu ajutorul formulei

$$\ln 2 = \frac{0{,}1}{3}\cdot\left\{\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \ldots + \frac{1}{1{,}9} + \right.$$

$$\left. + 2\left[\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \ldots + \frac{1}{1{,}95}\right]\right\} + R,$$

sau

$$\ln 2 = 0{,}025 + \frac{1}{33} + \frac{1}{36} + \frac{1}{39} + \ldots + \frac{1}{57} +$$

$$+ \frac{2}{31{,}5} + \frac{2}{34{,}5} + \frac{2}{37{,}5} + \ldots + \frac{2}{58{,}5} + R.$$

Efectuînd împărțirile, cu nouă zecimale exacte, vom obține:

$$\frac{1}{33} = 0{,}030\,303\,030\ldots; \quad \frac{2}{31{,}5} = 0{,}063\,492\,063\ldots;$$

$$\frac{1}{36} = 0{,}027\,777\,777\ldots; \quad \frac{2}{34{,}5} = 0{,}057\,971\,014\ldots;$$

$$\frac{1}{39} = 0{,}025\,641\,025\ldots; \quad \frac{2}{37{,}5} = 0{,}053\,333\,333\ldots;$$

$$\frac{1}{42} = 0{,}023\,809\,523 \ldots ; \quad \frac{2}{40{,}5} = 0{,}049\,382\,716 \ldots ;$$

$$\frac{1}{45} = 0{,}022\,222\,222 \ldots ; \quad \frac{2}{43{,}5} = 0{,}045\,977\,011 \ldots ;$$

$$\frac{1}{48} = 0{,}020\,833\,333 \ldots ; \quad \frac{2}{46{,}5} = 0{,}043\,010\,752 \ldots ;$$

$$\frac{1}{51} = 0{,}019\,607\,843 \ldots ; \quad \frac{2}{49{,}5} = 0{,}040\,404\,040 \ldots ;$$

$$\frac{1}{54} = 0{,}018\,518\,518 \ldots ; \quad \frac{2}{52{,}5} = 0{,}038\,095\,238 \ldots ;$$

$$\frac{1}{57} = 0{,}017\,543\,859 \ldots ; \quad \frac{2}{55{,}5} = 0{,}036\,036\,036 \ldots ;$$

$$\frac{2}{58{,}5} = 0{,}034\,188\,034 \ldots ;$$

Efectuînd suma acestor termeni, obținem

$$\ln 2 = 0{,}693147367 + \varepsilon + R.$$

Ținînd seamă de faptul că $|R| < 0{,}000\,000\,834$ și că $0 \leqslant \varepsilon \leqslant < 0{,}000\,000\,019$, se constată că

$$0{,}693\,146\,533 < \ln 2 < 0{,}693\,148\,210,$$

astfel că putem scrie

$$\ln 2 = 0{,}69314\ldots$$

8. Calculul valorilor logaritmilor cu ajutorul unor polinoame de cea mai bună aproximație

După cum se arată în literatura de specialitate (a se consulta de exemplu lucrarea [3], pentru aproximarea funcției $\ln (1 + x)$ pe intervalul $[0,1]$ cu o eroare mai mică decît 0,000 000 03, se poate utiliza polinomul

$$P(x) = a_0x^8 + a_1x^7 + a_2x^6 + a_3x^5 + a_4x^4 + a_5x^3 + a_6x^2 + a_7x, \quad (40)$$

unde

$$a_0 = -0{,}006\,453\,544\,2; \quad a_4 = -0{,}240\,733\,808\,4;$$
$$a_1 = 0{,}036\,088\,493\,7; \quad a_5 = 0{,}331\,799\,025\,8;$$
$$a_2 = -0{,}095\,329\,389\,7; \quad a_6 = -0{,}499\,874\,123\,8;$$
$$a_3 = 0{,}167\,654\,071\,1; \quad a_7 = 0{,}999\,996\,423\,9;$$

și a cărui expresie este apropiată de expresia polinomului de gradul opt, care aproximează cel mai bine (în sensul lui *Cebîșev*) funcția $\ln (1 + x)$. Calculul valorilor acestui polinom pentru diverse valori ale variabilei independente x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ se poate efectua cu ușurință, cu ajutorul unei mașini de calcul, scriindu-l în prealabil sub forma

$$P(x) = (((((((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3x) + a_4)x + a_5)x + a_6)x + a_7)x.$$

Există numeroase alte procedee de calcul ai logaritmilor, ale căror expunere renunțăm s-o facem în cadrul prezentei conferințe.

BIBLIOGRAFIE

1. Gonciarov V. L. *Teoria interpolării și a aproximării funcțiilor* (în limba rusă). Moscova 1954, pp. 55—58, 72—75.
2. Gonciarov V. L., Natanson I. P., *Enciclopedia matematicii elementare*, vol. III (în limba rusă). Moscova — Leningrad 1952, pp. 88-90, 194-195, 249-252, 316-318, 407-408, 457-465.
3. Hastings Cecil Jr., *Approximations for digital computers*. Princeton Univ. Press, 1955, p. 180.
4. Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*, Edit. tehnică, 1957, București, pp. 12-30, 81-85, 104-106.
5. Markușevici A. I., *Arii și logaritmi*. (Traducere din limba rusă). Edit. tehnică, 1954.
6. Ostrowski A., *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung*. Bd. I, Basel, 1952, pp. 242-254, 336-340.
7. Nicolescu Miron, *Calcul diferențial și integral*, Vol I, Edit. SOCEC, București 1949, pp. 54-70, 277-280.
8. Popovici T., *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinomul lui Newton cu noduri echidistanțate*. Studii și cercet. științifice, seria I, vol. VI, nr. 3-4, 1955, pp.27-35.
9. Ripianu D., *Alcătuirea tabelelor de diferențe și folosirea diferențelor și diferențelor divizate*. (În acest volum).