ABLAUFPLANUNG BEI ARBEIT IN MEHREREN SCHICHTEN

VON

L. NÉMETI

1. Das Problem der Ablaufplanung kann man etwa wie folgt formulieren. In einer (mechanischen) Werkstätte sind gegeben: die zur Verfügung stehenden Werkzeugmaschinen (Arbeitsplätze), die zu bearbeitenden Werkstücke, für jedes Werkstück (oder auch Werkstücklos), die technologisch vorgeschriebene Reihenfolge der zu benützenden Werkzeugmaschinen, die Bearbeitungszeiten für jeden Arbeitsgang. Man fragt nach einem Ablaufplan (Zeitplan), der für einen jeden Arbeitsgang seinen Anfangszeitpunkt (und das zu seiner Durchführung zu benützende Exemplar des zugehörigen Werkzeugmaschinentyps) angibt und zwar so, dass die zur Erledigung aller Arbeitsgänge benötigte Gesamtfertigungsdauer minimal werde.

Für die mathematische Formulierung muss man noch eine Reihe von Annahmen machen die sich nach den Fertigungsbedingungen richten ([2], [3], [6] — [11], [15]). Für das Folgende wollen wir annehmen, dass die Werkstatt in mehreren Schichten arbeitet, die übrigen Bedingungen aber möglichst einfach voraussetzen:

a) Die Maschineneinrichtezeit wird vernachlässigt (bzw. man beginnt nicht mit der Einrichtung bevor das betreffende Los zur Maschine angekommen ist), ebenso Kontroll- und Transportzeiten für die Werkstücke.

b) Das Los wird nicht in Unterlose aufgeteilt. D. h. dass die Werkstücke erst nach Durchführung des Arbeitsganges an allen Werkstücken des Loses zum nächsten Arbeitsplatz transportiert werden.

c) Von jeder Werkzeugmaschinentype gibt es nur ein Exemplar.

d) Es werden keine Pufferbestände zwischen den einzelnen Arbeitsgängen gebildet.

e) Eine Maschine kann zu einem gegebenen Zeitpunkt höchstens an einem Arbeitsgang arbeiten.

f) Ein noch nicht durchgeführter Arbeitsgang (des ganzen Loses) wird innerhalb einer Schicht nicht abgebrochen (un etwa die Bearbeitung eines anderen Werkstückloses anzufangen).

Die Annahmen a) und b) sind nicht wesentlich. Die Abänderung der übrigen Bedingungen führt aber zu immer komplizierteren Modellen.

Im nächsten Abschnitt wird der Beendigungszeitpunkt eines Arbeitsganges berechnet, wenn sein Anfangszeitpunkt und seine Durchführungsdauer gegeben sind; im 3. Abschnitt wird ein Modell des Problems vorgeschlagen und im 4. Abschnitt seine Lösungsmethode angegeben.

Wir wollen noch folgende Bezeichnungen bzw. Funktionen einführen. Wir setzen (für jede reelle Zahl x)

$$(1.1)\qquad \begin{cases} x = [x] + \{x\} & [x]\text{: ganzzahlig}, \quad 0 \leqq \{x\} < 1 \\ x = [x]' + \{x\}' & [x]'\text{: ganzzahlig}, \quad 0 < \{x\}' \leqq 1, \end{cases}$$

wodurch die Funktionen $[x]$, $[x]'$, $\{x\}$, $\{x\}'$ eindeutig bestimmt sind.

Man hat

$$(2.1)\qquad \begin{cases} [x]' + [-x] = -1 \\ \{x\}' + \{-x\} = 1. \end{cases}$$

Die Funktionen $[x]$ und $\{x\}$ sind stetig von rechts, $[x]'$ und $\{x\}'$ stetig von links. Eine numerische Abweichung zwischen $[x]$ und $[x]'$ bzw. zwischen $\{x\}$ und $\{x\}'$ erscheint nur bei ganzzahligen Werten von x.

2. Die Werkstatt soll in drei Schichten arbeiten (1., 2. bzw. 3. Schicht). Die Dauer der Schichten ist gleich und als Zeiteinheit nehmen wir diese Dauer. Der Zeitpunkt 0 soll am Anfang einer 1. Schicht sein.

Eine gegebene Werkzeugmaschine arbeitet in einer Menge von Schichten $S \subset \{1., 2., 3.\}$. Die Schichten aus S bilden ein Zeitintervall mit dem Anfangspunkt z.

Wir haben

$$(1.2)\qquad \begin{cases} S = \{1.\} \\ S = \{1., 2.\} \\ S = \{1., 2., 3.\} \end{cases} \Rightarrow z = 3c$$

$$\begin{cases} S = \{2.\} \\ S = \{2., 3.\} \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 3c$$

$$\begin{cases} S = \{3.\} \\ S = \{3., 1.\} \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3c$$

wobei c irgendeine ganze Zahl ist.

Die Mengen S sind geordnet, so wie sie in den Formeln (1.2) angegeben sind.

Wir bezeichnen mit

$$(2.2)\qquad l = \{S \quad (l = 1, 2 \text{ oder } 3)$$

die ununterbrochene Betriebsdauer der betreffenden Maschine (für $l = 3$ ist diese Dauer tatsächlich unbeschränkt).

Eine Bearbeitungsmaschine kann in einer der folgenden zwei Betriebsarten bentuzt werden.

Betriebsart A. Ein in einer Schicht $\sigma \in S$ angefangener und in σ nicht beendeter Arbeitsgang wird vom Anfang der nächsten Schicht des S an fortgesetzt (wenn z. B. $S = \{1., 2.\}$ und der Arbeitsgang in der 2. Schicht nicht beendet ist, so wird er in der 1. Schicht des nächsten Tages wieder aufgenommen).

Diese Betriebsart ist bei grossen Maschinen oder bei Reihenfertigung üblich.

Betriebsart B. Ein in einer Schicht $\sigma \in S$ angefangener und in derselben nicht beendeter Arbeitsgang wird am nächsten Tag vom Personal derselben Schicht σ weitergeführt. In den anderen Schichten werden an der Maschine andere Arbeitsgänge durchgeführt.

Diese Betriebsart ist bei Einzelfertigung an kleinen Werkzeugmaschinen üblich.

Wir bemerken, dass die Unterscheidung der zwei Betriebsarten natürlich nur bei $l > 1$ sinnvoll ist.

Es sei x irgendein gegebener Zeitpunkt. Dieser Zeitpunkt liegt in der Schicht $\sigma(x)$. Wir haben

$$(3.2)\qquad \sigma(x) = 1 + \left[3 \left\{ \frac{x}{3} \right\} \right].$$

Wir erhalten dieses Ergebnis, indem wir die Zeiteinheit zuerst verdreifachen und nachher wieder auf die ursprüngliche Zeiteinheit zurückkommen. Der Fall $\{x\} = 0$ bedarf aber einer Sonderbehandlung. In diesem Fall kommt der Punkt gemäss (3.2) in den Anfangszeitpunkt der Schicht $\sigma(x)$. Bedeutet aber x den Endpunkt eines Arbeitsganges, so muss man x sinngemäss ans Ende der vorhergehenden Schicht setzen. Für den Endpunkt eines Arbeitsganges muss man also die Formel

$$(4.2)\qquad \sigma'(x) = 1 + \left[3 \left\{ \frac{x}{3} \right\}' \right]'$$

verwenden.

Betrachten wir nun irgend einen Arbeitsgang. Es bezeichne x seinen Anfangszeitpunkt, y seinen Endzeitpunkt, $t > 0$ die Durchführungsdauer. Wir wollen die Funktion $y = f(x)$ bestimmen, wenn t, S und die Betriebsart (A oder B) gegeben sind.

Für den Anfangszeitpunkt x haben wir die Bedingung

$$\sigma(x) \in S$$

die mit

$$\left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} < \frac{l}{2} \tag{5.2}$$

oder auch mit

$$x = 3k + \varepsilon + \xi, \quad 0 \leqslant \xi < l \quad (k\text{: ganze Zahl}) \tag{5a. 2}$$

äquivalent ist. Für die Werte von x, welche diese Bedingung nicht erfüllen, ist die Funktion $f(x)$ nicht erklärt [1].

Betriebsart A. $(f(x) = A(x))$.

Der Zeitpunkt der Beendigung eines Arbeitsganges ist

$$y = A(x) = x + t + (3 - l)p \tag{6.2}$$

wobei p die Anzahl der übersprungenen Zeitabschnitte bedeutet, wo die Bearbeitungsmaschine ausser Betrieb steht (Betriebspausen). Zur Berechnung von p betrachten wir in Abb. 1.



Abb. 1

Falls der Punkt Q nicht rechts vom Punkt P kommt, d. h. wenn $t \leqslant l - \xi$ ist, haben wir $p = 0$.
Sonst gilt

$$\overline{PQ} = t - (l - \xi) = (p - 1)l + rl, \quad 0 < r \leqslant 1$$

oder

$$t + \xi = (p + r)l$$

d. h.

$$\frac{t + \xi}{l} = p + r.$$

[1]) Die Definitionsintervalle sind demnach links geschlossen und rechts offen in Uebereinstimmung mit der Tatsache, dass ein Arbeitsgang nicht am Ende einer Schicht angefangen wird.

Hieraus

$$p = \left[\frac{t + \xi}{l}\right]',$$

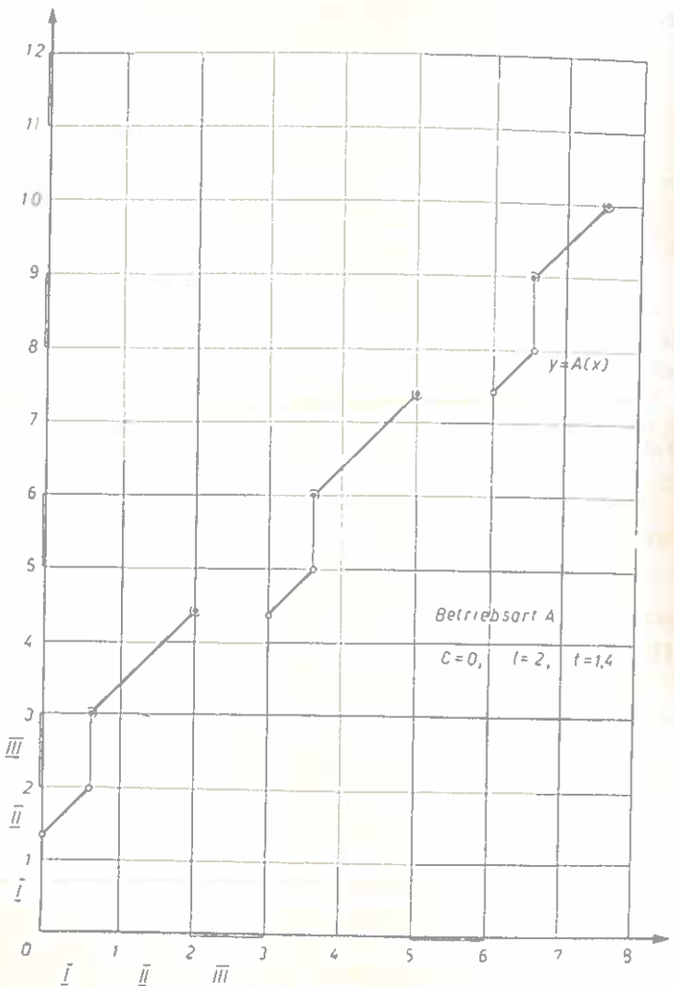


Abb. 2

welche Formel auch den Fall $t \leqslant l - \xi$ mit einschliesst (für $t > 0$). Die gesuchte Funktion ist also (s. Abb. 2)

$$(8.2) \qquad y = A(x) = x + t + (3 - l)\left|\frac{3\left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} + t}{l}\right|', \qquad y = A(x) = x + t + (3 - l)\left|\frac{3\left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} + t}{l}\right|',$$

An den Stellen

$$\frac{3\left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} + t}{l} \text{ :ganzzhalig}$$

oder, anders ausgedrückt, für

$$(9.2) \qquad \frac{3}{l}\left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} = 1 - \left\{\frac{t}{l}\right\}',$$

weist $A(x)$ einen Sprung von der Grösse $3 - l$ auf (in jedem Definitionsintervall ie eine Sprungstelle) und ist daselbst stetig von rechts (Abb. 2). $A(x)$ ist monoton wachsend. Der Wertebereich von $A(x)$ besteht aus Intervallen, die nach links offen und nach rechts geschlossen sind (entgegengesetzt wie bei den Definitionsintervallen). Aus der Herleitung der Formel (9.2) folgt die Implikation

$$(10.2) \qquad \sigma(x) \in S \Rightarrow \sigma'(y) \in S.$$

Ist $l = 3$, so wird $y = A(x) = x + t$, der Einfluss der Schichtarbeit verschwindet.

Betriebsart B $(f(x) = B(x))$ $(l > 1)$

Die Herleitung der entsprechenden Formel ist der vorigen ähnlich (s. Abb. 3)

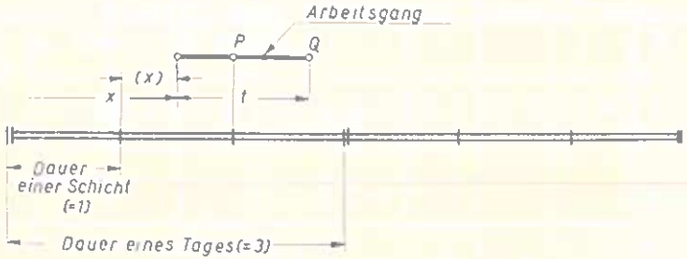


Abb. 3

Der Zeitpunkt der Beendigung des Arbeitsganges ist

$$(11.2) \qquad y = B(x) = x + t + 2p.$$

Falls der Punkt Q nicht rechts vom Punkt P kommt, d. h. wenn $t \leqslant 1 - \{x\}$ ist, haben wir $p = 0$. Sonst gilt

$$\overline{PQ} = t - (1 - \{x\}) = p - 1 + r, \quad 0 < r \leqslant 1$$

d. h.

$$p = [t + \{x\}]';$$

die Formel schliesst auch den Fall $t \leqslant 1 - \{x\}$ mit ein.

Die gesuchte Funktion ist also (s. Abb. 4.)

$$(12.2) \qquad y = B(x) = x + t + 2[t + \{x\}]'.$$

Die Funktion weist innerhalb eines Definitionsintervalles an zwei Stellen je einen Sprung auf:

— an den Stellen

$$t + \{x\}: \text{ ganzzahlig}$$

oder anders ausgedrückt

$$(13.2) \qquad \{x\} = 1 - \{t\}'$$

mit einem Sprung von der Grösse 2, woselbst $B(x)$ von links stetig ist und

— an den Stellen

$$(14.2) \qquad \begin{cases} \{x\} = 0, & \text{wo gleichzeitig} \\ \left\{\frac{x-\varepsilon}{3}\right\} \neq 0^{2)} \end{cases}$$

ist, mit einem Sprung von der Grösse -2, woselbst $B(x)$ von rechts stetig ist[3]. Aus der Herleitung der Formel (12.2) folgt die Implikation

$$(15.2) \qquad \sigma(x) \in S \Rightarrow \sigma(x) = \sigma'(y).$$

Geänderte Betriebsart $\overline{\text{B}}$ $(f(x) = \overline{B}(x))$

Wir führen eine neue Veränderliche $\bar{x}$ ein mit

$$(16.2) \quad x = \varphi(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}, & \text{wenn } \{\bar{x}\} < 1 - \{t\}' \\ 1 + [\bar{x}], & \text{„ } \{\bar{x}\} > 1 - \{t\}' \text{ und } \sigma(1 + [\bar{x}]) \in S \\ 2 + [\bar{x}], & \text{„ } \{\bar{x}\} > 1 - \{t\}' \text{ und } \sigma(1 + [\bar{x}]) \notin S. \end{cases}$$

[2]) Diese Ungleichung schliesst den Anfangspunkt des Definitionsintervalles aus.
[3]) Für $\{t\} = 0$ verschwinden beide Sprünge, $B(x)$ ist stetig im Definitionsbereich.

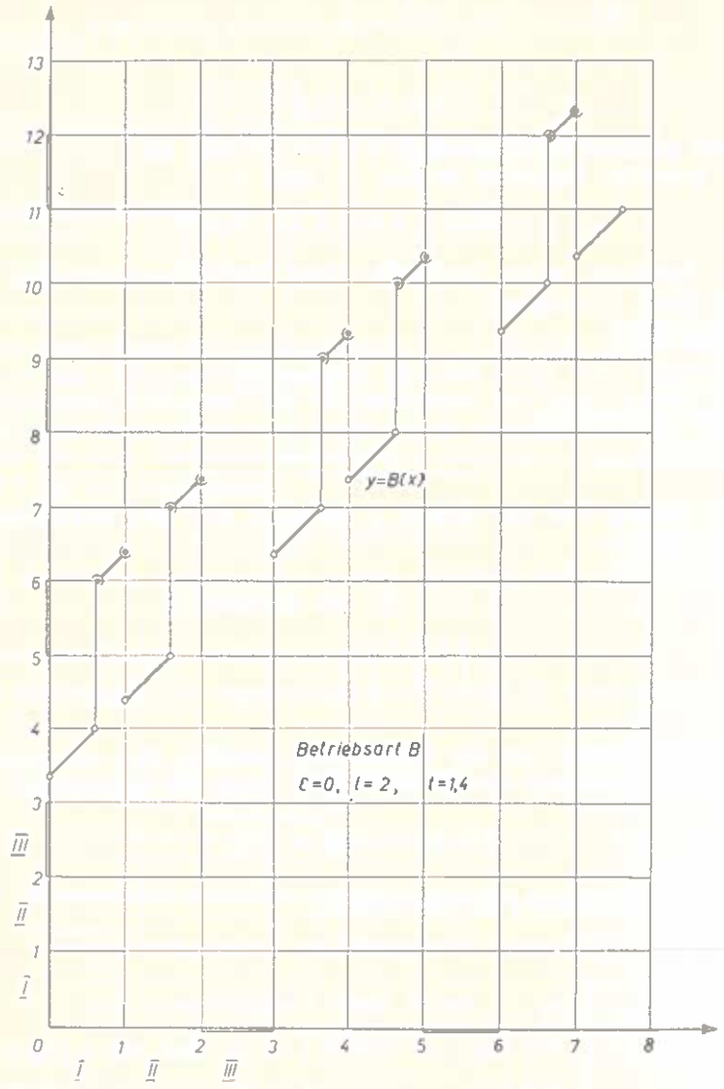


Abb. 4

Bei der dritten Alternative haben wir offenbar $\sigma(2 + [x]) \in S$ da $l > 1$ vorausgesetzt wurde. Wir haben also auf jeden Fall

$$\sigma(\bar{x}) \in S. \tag{17.2}$$

Bezeichnen wir

$$\bar{y} = B(\bar{x}),$$

so stellen wir fest, dass dann

$$\bar{y} = B(\bar{x}) \leqslant B(x) = y$$

gilt.

Die Intervalle, für welche $\{x\}' > 1 - \{t\}'$ gilt, nennen wir verbotene Intervalle. Um die Arbeitsgänge möglichst frühzeitig zu beenden, wolle man also folgendermassen vorgehen: ist man im Laufe der Planung des Arbeitsganges zu einem Anfangspunkt x desselben gelangt, der in ein verbotenes Intervall fällt, so nehme man als Anfangspunkt $\bar{x} = \varphi(x)$ und man gelangt zu einem Endpunkt (Abb. 5 und 6) $\bar{y}$ mit $\bar{y} = B(\bar{x}) = \bar{B}(x)$. Man hat

$$\bar{y} = B(\bar{x}) = \bar{x} + t + 2[t]' = \bar{B}(x) = \varphi(x) + t + 2[t]'. \tag{18.2}$$

Die Funktion $\bar{B}(x)$ ist auf derselben Punktmenge erklärt wie $B(x)$, ist aber monoton, und weist in jedem Definitionsintervall für die Punkte mit $\{x\} = 1 - \{t\}'$ einen Sprung von der Grösse $\{t\}'$ auf; sie ist von links stetig.

3. Um das Modell der Ablaufplanung aufstellen zu können, führen wir, wie auch in unseren anderen Arbieten ([7]...[11]) folgende Mengen ein:

$N = \{1, 2,...,n\}$ Menge der Arbeitsgänge

$M = \{1, 2,...,m\}$ Menge der Werkzeugmaschinen bzw. der Maschinentypen

$N = \bigcup_{k \in M} N_k$ (Verteilung), wobei N_k die Teilmenge derjenigen Arbeitsgänge darstellt, welche auf der Maschine k durchgeführt werden;

$H \subset N \times N$ die Menge derjenigen geordneten Arbeitsgangspaare, zwischen denen eine technologische Reihenfolgebeziehung besteht; mit anderen Worten, die Beziehung $(i,j) \in H$ bedeutet, dass Arbeitsgang j erst nach Beendigung des Arbeitsganges i angefangen werden kann;

$\mathcal{J} = \{(i, j) \mid i < j;\ i, j \in N_k;\ k \in M\}$ die Menge von (nicht geordneten) Arbeitsgangspaaren, die auf derselben Maschine durchgeführt werden.

Wir haben natürlich

$$S_i = S_j, \quad (i, j) \in \mathcal{J}. \tag{1.3}$$

Für jede Maschine $k \in M$ ist die Menge S^k der Schichten gegeben, in denen die Maschine betrieben wird. Hieraus ergibt sich für jeder Arbeitsgang $i \in N_k$ die Schichtmenge $S_i = S^k$, in welcher i durchgeführt wer-

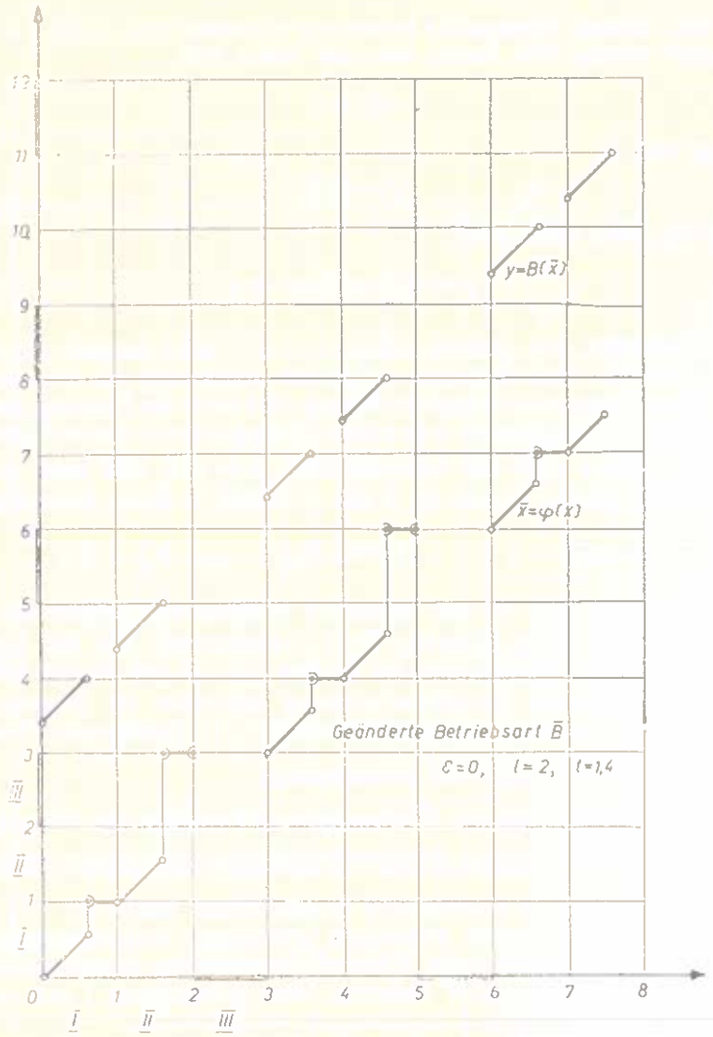


Abb. 5

den kann, wie auch die zugehörige Betriebsart A oder B. Auf diese Weise sind auch die Funktionen

$$y_i = f_i(x_i), \quad i \in N$$

gegeben ($y_i = A_i(x_i)$, Formel (8.2) oder $y_i = B_i(x_i)$, Formel (12.2)).

Das Modell enthält dann folgende Bedingungen:
Die Anfangsbedingungen

(2.3) $$x_i \geqslant 0, \quad i \in N.$$

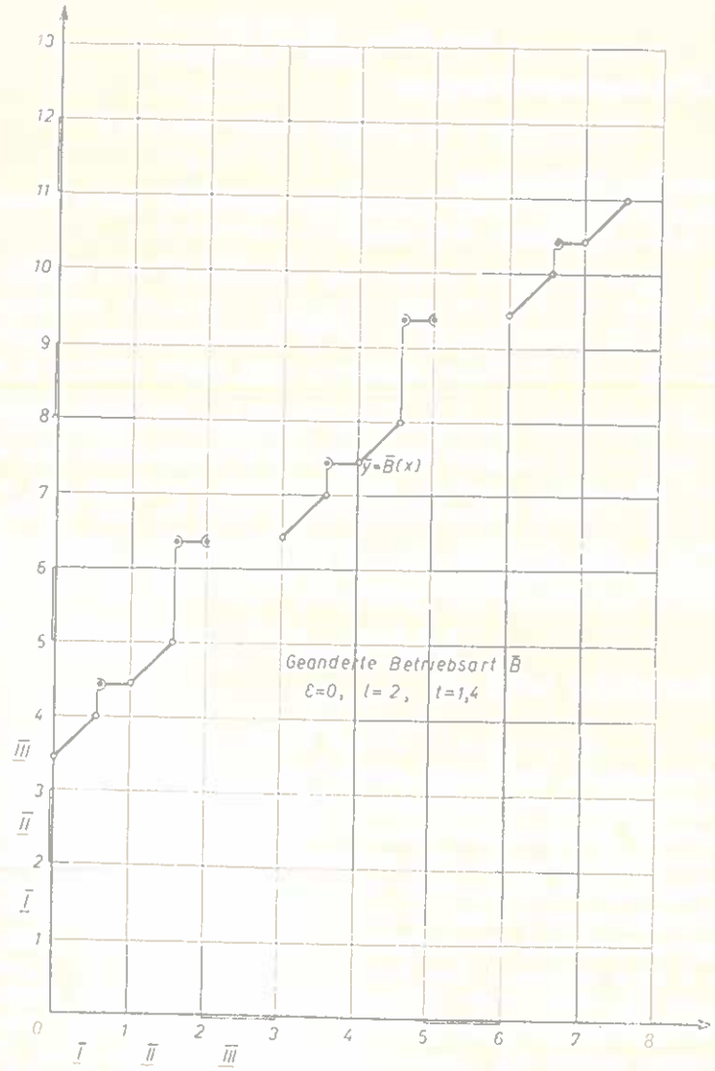


Abb. 6

Die Schichtbedingungen

$$\sigma(x_i) \in S_i, \quad i \in N; \tag{3.3}$$

die technologischen Folgebeziehungen

$$x_j \geqslant f_i(x_i), \quad (i, j) \in H; \tag{4.3}$$

die Nicht-Überlappungsbeziehungen

$$(x_j \geqslant f_i(x_i)) \vee (x_i \geqslant f_j(x_j) \vee D_{ij}, \quad (i, j) \in \mathfrak{J} \tag{5.3}$$

($\vee$: Zeichen der Disjunktion),
wobei $D_{ij} (: \sigma(x_i) \neq \sigma(x_j))$ selber Disjunktion darstellen, deren Form sich je nach $l = |S_i| = |S_j|$ ändert. Wir haben

$S_i = S_j = \{\alpha\}$: $D_{ij} = \emptyset$ (d.h. die Disjunktion (5.3) enthält nur zwei Glieder)

$$\begin{aligned} &S_i = S_j = \{\alpha, \beta\}: D_{ij} = (\sigma(x_i) = \alpha, \sigma(x_j) = \beta) \vee (\sigma(x_i) = \beta, \sigma(x_j) = \alpha) \\ &S_i = S_j = \{1., 2., 3.,\}: D_{ij} = (\sigma(x_i = 1, \quad \sigma(x_j) = 2) \vee (\sigma(x_i = 2, \\ &\sigma(x_j) = 1) \vee (\sigma(x_i) = 2, \quad \sigma(x_j) = 3) \vee (\sigma(x_i) = 3, \quad \sigma(x_j) = 2) \vee \\ &(\sigma(x_i) = 3, \quad \sigma(x_j) = 1) \vee (\sigma(x_i) = 1, \quad \sigma(x_j) = 3). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Um die Optimisierungsbedingung zu formulieren, führen wir noch die Gesamtdauer u der Bearbeitungen als Unbekannte ein, mit

$$u \geqslant f_i(x_i), \quad i \in N \tag{7.3}$$

und als Zielfunktion haben wir

$$F = u: \min! \tag{8.3}$$

Das Problem $\mathfrak{P}$, bestehend aus den Bedingungen (2.3)...(8.3) hat die Eigenart auch logische Bedingungen (Disjunktionen) zu enthalten. Es kann mit Hilfe des „Branch and Bound"-Verfahrens gelöst werden [3], [4]. (Andere Methoden, die sich aber nur unwesentlich von derselben unterscheiden, sind das Verfahren S.E.P. von P. Bertier-B. Roy [1] oder der Algorithmus von F. Rado [12], [13]): Wir setzen dieses Verfahren als bekannt voraus, und werden nur seine Verwendung zur Lösung unseres Problems $\mathfrak{P}$ kurz erläutern. Das Verfahren kommt auf die Lösung einer Menge von „gewöhnlichen" Optimierungsaufgaben (ohne Disjunktionen) hinaus. F. Radó nennt diese Aufgaben die Grundprobleme von $\mathfrak{P}$. Ein Grundproblem enthält alle „gewöhnlichen" Bedingungen (2.3), (3.3), (4.3), (7.3), (8.3) sowie je ein Glied aus einer Teilmenge der Disjunktion (5.3) bzw. (6.3). Ist ein solches Grundproblem P gelöst, so erhält man daraus

weitere Grundprobleme, indem man zu P nacheinander die Glieder einer noch nicht verwendeten Disjunktion hinzufügt. So erhält man soviel neue Grundprobleme, wie viel Glieder die hinzugenommene Disjunktion enthält. Das erste Grundproblem enthält keine Disjunktionsglieder.

Ein Grundproblem P von $\mathfrak{P}$ wird also folgende Form aufweisen

$$\begin{aligned} &x_i \geqslant 0, \quad i \in N \\ &\sigma(x_i) \in S_i, \quad i \in N \\ &x_j \geqslant f_i(x_i), \quad (i, j) \in H \cup L = U \\ &\sigma(x_i) = 1, \quad i \in N^1 \\ &\sigma(x_i) = 2, \quad i \in N^2 \\ &\sigma(x_i) = 3, \quad i \in N^3 \\ &u \geqslant f_i(x_i), \quad i \in N \\ &u: \min! \end{aligned} \tag{9.3}$$

mit den gegebenen Mengen $L \subset N \times N$; $N^1, N^2, N^3 \subset N$. Sind N^1, N^2, N nicht paarweise elementenfremd, so ist P unverträglich. Wir werden mi

$$N^0 = N \setminus (N^1 \cup N^2 \cup N^3) \tag{10.3}$$

die Menge derjenigen Arbeitsgänge bezeichnen, die nicht von vornherein durch P in eine bestimmte Schicht eingeteilt sind.

4. Um ein gegebenes Grundproblem zu lösen, ordnen wir demselben einen gerichteten und teilweise bewerteten Graphen $G = (N, U)$ in folgender Weise zu. Einem jeden Arbeitsgang $i \in N$ entspricht ein Knotenpunkt von G und jeder Folgebedingung $(i,j) \in U$ ein Bogen. Die Knotenpunkte $i \in N^1 \cup N^2 \cup N^3$ erhalten eine Bewertung, die Schichtzahl λ für $i \in N^\lambda$ (es gilt selbstverständlich $\lambda \in S_i$).

Für jeden Arbeitsgang $i \in N$ gilt offenbar

$$f_i(x_i) > x_i. \tag{1.4}$$

Wir können also jedem Bogen positive Längen $f_i(x_i) - x_i$ zuordnen (die allerdings keine fest gegebene Grössen sind). Nach einem wohlbekannten Satz ist dann das Fehlen von Zyklen in G eine notwendige Bedingung für die Widerspruchsfreiheit von P. In einem zyklusfreien Graphen kann man, nach einem anderen wohlbekannten Satz, die Knotenpunkte nach Niveau oder Rängen ordnen ([14]). Uzw. erhalten die Knotenpunkte ohne Vorgänger den Rang 1, die Vorgänger eines Knotenpunktes vom Range r haben alle einen kleineren Rang als r, unter ihnen mindestens einer vom Range $r - 1$.

Wir setzen voraus, dass die Knotenpunkte von G nach Rängen geordnet worden sind und bezeichnen mit C_r die Menge der Knotenpunkte vom Range r ($r = 1, 2,...$).

Die Lösung von P erfolgt nach steigenden Rängen. Zuerst werden die Unbekannten x_i, $i \in C_1$ bestimmt usw. Auf diese Weise, will man eine

neue Ubekannte x_i bestimmen, so sind alle Unbekannten, die zu den Vorgängern des Knotenpunktes i gehören, bereits bestimmt worden.

Für den Rang $r = 1$ setzen wir

$$x_i = \begin{cases} s_i - 1 \text{ für } i \in C_1 \cap N^0 \\ 0 \quad \text{„} \quad i \in C_1 \cap N^1 \\ 1 \quad \text{„} \quad i \in C_1 \cap N^2 \\ 2 \quad \text{„} \quad i \in C_1 \cap N^3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Hierbei gibt s_i den Betrag des ersten Elements aus S_i an.

Zur Bestimmung einer Unbekannten x_i mit $i \in C_r$ berechnen wir zuerst

$$x_i' = \max_{j \in V(i)} f_j(x_j), \tag{3.4}$$

wobei

$$V(i) = \{j \mid (j, i) \in U\} \tag{4.4}$$

die Menge der (unmittelbaren) Vorgänger in G des Knotenpunktes i bzeichne.

Für das Folgende haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \in S_i$, Betriebsart A

oder $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \in S_i$, Betriebsart B, x_i befindet sich nicht in einem verbotenen Intervall.

Man setze

$$x_i = x_i'. \tag{5.4}$$

Fall 2. $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \in S_i$, Betriebsart B, x_i' befindet sich in einem verbotenen Intervall

oder $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \notin S_i$.

Man setze

$$x_i = [x_i'] + \varkappa, \tag{6.4}$$

wobei $\varkappa$ die kleinste natürliche Zahl ist, für welche es

$$\sigma(x_i) \in S_i$$

gilt,

Fall 3. $i \notin N^0$, $\sigma(x_i') = \lambda_i$

Man setze

$$x_i = x_i'. \tag{7.4}$$

Fall 4. $i \notin N^0$, $\sigma(x_i') \neq \lambda_i$

Man setze

$$x_i = [x_i] + \beta, \tag{8.4}$$

wobei β die kleinste natürliche Zahl ist, für die es

$$\sigma(x_i) = \lambda_i$$

gilt.

Es ist offensichtlich, dass die Formeln (5.4)...(8.4) eine Lösung von P liefern, wenn man von der Optimisierungsbedingung absieht. Wir haben nur noch zu zeigen, dass die angegebene Lösung tatsächlich eine optimale ist. Zu diesem Zwecke werden wir beweisen, dass wir auf die oben angegebene Weise eine universelle Minimallösung erhalten in dem Sinne, wenn x_i die univ. Minimallösung und x_i^* irgend eine Lösung darstellt, dann für alle $i \in N$

$$f_i(x_i) \leqslant f_i(x_i^*)$$

gilt.

Der Beweis ist umittelbar, wenn man Fall 2 in zwei Unterfälle aufteilt.

Fall 2a. $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \in S_i$, Betriebsart B, x_i' befindet sich in einem verbotenen Intervall.

Man setzt $x_i = x_i$ und wendet die geänderte Betriebsweise B an. D.h., dass der tatsächliche Anfangszeitpunkt des Arbeitsganges

$$x_i = [x_i] + \varkappa$$

wird, und der Endpunkt

$$y_i = B_i(x_i) = B_i(x_i),$$

wobei $B_i(x_i)$ monoton zunehmend ist.

Fall 2b. $i \in N^0$, $\sigma(x_i') \notin S_i$.

Man setzt

$$x_i = [x_i'] + \varkappa.$$

Auf diese Weise sind die verwendeten Funktionen $f_i(x_i)$ alle monoton wachsend in den nach den Formeln (5.4)...(8.4) berechneten Punkten, in dem Sinne, dass es für alle

$$x_i^* > x_i \Rightarrow f_i(x_i^*) \geqslant f_i(x_i)$$

gilt (monoton rechts von x_i).

Dann genügt es aber zu zeigen, dass man für alle $i \in N$

$$x_i \leqslant x_i^*$$

hat, (wenn x_i^* irgendeine Lösung ist), was aber aus dem Aufbau der Formeln (3.4)...(8.4) umittelbar hervorgeht (wenn man die Teilung des Falles 2 vor Augen hält).

Die Lösungsmethode der Grundprobleme einmal festgesetzt, bietet die Lösung des Planungsproblems $\mathfrak{P}$ mit Hilfe der Branch aud Bound-Prozedur (bzw. S.E.P. bzw. Radós Algorithmus) keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr.

Akademie der S. R. Rumänien
Zweigstelle Cluj
RECHENINSTITUT

LITERATURNACHWEIS

1. Bertier P., Roy B. — *Une procédure de résolution pour une classe de problèmes pouvant avoir un caractère combinatoire.* B-tin du Centre Intern. de Calcul, Rome, 4, 1965, S. 19-28.
2. Descamps R., Chevignon P. — *Algorithmes d'optimisation pour une classe, générale de problèmes d'ordonnancement avec limitation de ressources.* Metra, V, 1966, S. 603-618.
3. Ignall E., Schrage L. — *Application of the Branch and Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems.* Jorsa, 13, 1965, S. 400-412.
4. Little B. D., Murphy K. G., Sweeny D. W., Karel G. — *An Algorithm for the Travelling Salesman Problem.* Jorsa, 11, 1963, S. 972-982.
5. Németi L. — *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen.* Mathematica (Cluj), 6, 1964, S. 87-99.
6. Németi L., Radó F. — *Sur la programmation temporelle de la fabrication.* Mathematica (Cluj), 8, 1966, S. 109-111.
7. Németi L. — *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung.* Mathematica (Cluj), 9, 1967, S. 129-140.
8. Németi L. — *Über das Reihenfolgeproblem in der Fertigung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art.* Rev. Roum. Math, Pures et Appl., 13, 1968, S. 835-840.
9. Németi L. — *Sur la programmation temporelle de la fabrication.* Metra, VII, 1968, S. 327-338.
10. Németi L. — *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigung mit Pufferbeständen.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13, 1968, S. 1009-1016.
11. Németi L. — *Sur le problème d'ordonnancement dans la fabrication en série.* Rev. Fr. Inf. Rech. Op., 2, 1968, S. 47-60.
12. Radó F. — *Programare liniară în condiții logice.* Comunic. Acad. R. P. Rom., 13, 1963, S. 1039-1042.
13. Radó F. — *Un algorithme pour résourdre certains problèmes de programmation mathématique.* Mathematica (Cluj), 6, 1964, R. 105-116.
14. Roy B. — *Cheminement et connexité dans les graphes.* Metra, Série spéciale, No. 1, 1962.
15. Roy B., Sussmann B. — *Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives.* Sema, Direction scientifique. Rapport de recherche, No. 9, 1964.

PLANIFICAREA LUCRULUI ÎN MAI MULTE ECHIPE

Rezumat

Se studiază problema programării în timp a fabricației într-un atelier care funcționează în mai multe echipe. Se propune un model matematic al problemei și se indică metoda de rezolvare.