ASUPRA REPREZENTĂRII ECUAȚIILOR CU PATRU VARIABILE PRIN NOMOGRAME COMPUSE CU PUNCTE ALINIATE (II)

DE

MARIA MIHOC

(Cluj)

În lucrare se studiază condițiile în care ecuația cu patru variabile (1) se poate reprezenta printr-o nomogramă compusă din două nomograme cu puncte aliniate cu o scară comună avînd trei scări regulate și una proiectivă rectilinii.

Într-o lucrare anterioară [2] s-a studiat reprezentarea ecuațiilor cu patru variabile cu ajutorul nomogramelor compuse formate din două nomograme cu puncte aliniate cu scări rectilinii regulate avînd o scară comună.

În această lucrare vom cerceta reprezentarea unor astfel de ecuații de formă completă cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate cu scări rectilinii regulate și proiective, avînd o scară comună.

Fie ecuația cu patru variabile de forma:

$$\begin{aligned} &A_0\,xyzu + A_1\,xyz + A_2\,xyu + A_3\,xzu + A_4\,yzu + \\ (1)\quad &+ B_0\,xy + B_1\,xz + B_2\,xu + B_3\,yz + B_4\,yu + B_5\,zu + \\ &+ C_0x + C_1\,y + C_2\,z + C_3\,u + D_0 = 0. \end{aligned}$$

Se caută condițiile în care ecuația (1) se poate reprezenta cu ajutorul unei nomograme cu puncte aliniate cu trei scări regulate și una proiectivă.

Dacă se aplică ecuațiilor Soreau corespunzătoare acestei nomograme o transformare afină, obținem:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & \mu x + a & 1 \\ cy + d & fy + g & 1 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad \begin{vmatrix} \rho w + \varepsilon & 0 & 1 \\ hz + i & \nu z + k & 1 \\ \dfrac{lu + m}{nu + l} & \dfrac{pu + r}{nu + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ST. CERC. MAT., TOM. 23, NR. 1, P. 117–128, BUCUREȘTI, 1971

unde $a, c, d, f, g, h, i, k, l, m, n, p, r, \mu, \nu$ sînt parametrii scărilor nomogramei.

Pentru simplificarea calculelor se poate considera $\mu = \nu = 1$.

Dacă se dezvoltă determinanții din membrul stîng al ecuațiilor (2) și se elimină necunoscuta w, se obține ecuația

$$\begin{aligned}
&cnxyzu + cxyz + c(kn - p)xyu + [dn - (l - hp)]xzu + \\
&+ [acn + f(l - hp)]yzu + c(k - r)xy + [d - (m - hr)]xz + \\
&+ [d(kn - p) - (kl - ip)]xu + [ac + f(m - hr)]yz + \\
&+ [ac(kn - p) + f(kl - ip)]yu + [adn - (a - g)(l - hp)]zu + \\
&+ [d(k - r) - (km - ir)]x + [ac(k - r) + f(km - ir)]y + \\
&+ [ad - (a - g)(m - hr)]z + [ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip)]u + \\
&+ [ad(k - r) - (a - g)(km - ir)] = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pentru găsirea condițiilor în care o ecuație cu patru variabile se poate reprezenta prin nomograme de tipul menționat mai sus și a parametrilor nomogramei, se identifică coeficienții ecuațiilor (1) și (3), fapt care ne conduce la sistemul:

$$\begin{aligned}
&cn = A_0; && ac + f(m - hr) = B_3,\\
&c = A_1; && ac(kn - p) + (kl - ip) = B_4,\\
&c(kn - p) = A_2; && adn - (a - g)(l - hp) = B_5,\\
&dn - (l - hp) = A_3; && d(k - r) - (km - ir) = C_0,\\
&acn + f(l - hp) = A_4; && ac(k - r) + f(km - ir) = C_1,\\
&c(k - r) = B_0; && ad - (a - g)(m - hr) = C_2,\\
&d - (m - hr) = B_1; && ad(kn - p) - (a - g)(kl - ip) = C_3,\\
&d(kn - p) - (kl - ip) = B_2; && ad(k - r) - (a - g)(km - ir) = D_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Rezolvarea sistemului de conduce la următoarele cazuri:

1. $A_1 \neq 0, \qquad A_0B_1 - A_1A_3 \neq 0.$

Introducem notațiile

$$\Delta_1 = (A_0C_2 - A_1B_5 - A_3B_3 + A_4B_1)^2 - 4(A_0B_1 - A_1A_3)(A_4C_2 - B_3B_5)$$

$$\Delta_2 = [A_1(2A_0B_0B_3 - A_0A_1C_1 - A_1A_4B_0 - A_1A_2B_3 + A_1^2B_4)]^2 - 4A_1^2(A_0B_3 - A_1A_4)(A_1A_2 - A_0B_0)(A_1C_1 - B_0B_3).$$

1.1. Dacă $A_0B_3 - A_1A_4 \neq 0$ și $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$, sistemul (4) admite soluțiile

$$\begin{aligned}
&a = \frac{A_0C_2 - A_1B_5 - A_3B_3 + A_4B_1 \pm \sqrt{\Delta_1}}{2(A_0B_1 - A_1A_3)}; \qquad c = A_1,\\
&d = A_1 \cdot \frac{(A_4B_1 - A_3B_3) - (A_0B_1 - A_1A_3)a}{A_1A_4 - A_0B_3}; \qquad f = \frac{A_1A_4 - A_0B_3}{A_0B_1 - A_1A_3},\\
&g = a - \frac{A_0C_2 - A_1B_5}{A_0B_1 - A_1A_3},\\
&i = hr + \frac{B_0}{A_1}h + \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3}(B_3 - A_1a) + \\
&\quad + \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3} \cdot \frac{B_0B_3 - A_1C_1}{A_1r},\\
&k = r + \frac{B_0}{A_1}; \qquad l = \left(\frac{A_0}{A_1}r + \frac{A_0B_0}{A_1^2} - \frac{A_2}{A_1}\right)h + \\
&\quad + \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3} \cdot (A_4 - A_0a),\\
&m = \frac{A_0B_1 - A_1A_3}{A_1A_4 - A_0B_3}(B_3 - A_1a) + hr; \qquad n = \frac{A_0}{A_1},\\
&p = \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2} + \frac{A_0}{A_1}r,\\
&r_{1,2} = \frac{-A_1(2A_0B_0B_3 - A_0A_1C_1 - A_1A_4B_0 - A_1A_2B_3 + A_1^2B_4) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2A_1^2(A_0B_3 - A_1A_4)},
\end{aligned} \tag{5}$$

unde h este un parametru arbitrar.

Existența soluției (5) este asigurată de următoarele patru condiții:

$$\begin{aligned}
&A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,\\
&A_0(B_1B_4 - B_2B_3) - A_1(A_3B_4 - A_4B_2) + A_2(A_3B_3 - A_4B_1) = 0,\\
&A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,\\
&A_0(B_1C_1 - B_3C_0) - A_1(A_3C_1 - A_4C_0) + B_0(A_3B_3 - A_4B_1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Aceste condiții coincid cu condițiile de separare a variabilelor ecuației (1), date de Goursat.

1.2. Dacă $A_0B_3 - A_1A_4 = 0$ și $\Delta_3 \geqslant 0$,

unde

$$\Delta_3 = A_1^2[2B_0(A_0C_2 - A_4B_1) + A_1(B_1B_4 - A_2C_2 - B_0B_5 + A_3C_1 - A_0D_0 + A_4C_0 + A_1C_3 - B_2B_3)]^2 - 4A_1^3(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)[B_0^2(A_0C_2 - A_4B_1) - A_1(A_2B_0C_2 - B_0B_1B_4 + A_0B_0D_0 + A_4B_0C_0 - A_1A_2D_0 + A_2B_3C_0)],$$

sistemul (4) admite soluțiile următoare:

$$a = \frac{B_3}{A_1}; \quad c = A_1; \quad d = A_1\frac{B_1B_5 - A_3C_2}{A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5},$$

$$f = 0; \quad g = \frac{A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5}{A_0B_1 - A_1A_3},$$

$$i = \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1C_2 - B_1B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(B_0C_2 - A_1D_0 - B_1C_1 + B_3C_0)}{(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)r} + \frac{B_0}{A_1}h + hr,$$

$$k = r + \frac{B_0}{A_1},$$

$$l = \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1B_5 - A_3B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + \left(\frac{A_0}{A_1}r + \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2}\right)h,$$

(7)
$$m = \frac{(A_0B_1 - A_1A_3)(A_1C_2 - B_1B_3)}{A_1(A_4B_1 - A_3B_3 - A_0C_2 + A_1B_5)} + hr; \qquad n = \frac{A_0}{A_1},$$

$$p = \frac{A_0B_0 - A_1A_2}{A_1^2} + \frac{A_0}{A_1}r,$$

$$r_{1,2} = \frac{-2A_1B_0(A_0C_2 - A_4B_1)}{2A_1^2(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)} - \frac{A_1^2(B_1B_4 - A_2C_2 - B_0B_5 + A_3C_1 - A_0D_0 + A_4C_0 + A_1C_3 - B_2B_3) \pm \sqrt{\Delta_3}}{2A_1^2(A_0C_2 - A_4B_1 - A_1B_5 + A_3B_3)},$$

unde h rămîne parametru arbitrar.

Soluțiile (7) au loc dacă coeficienții ecuației (1) verifică condițiile

(8)
$$A_0(B_1C_3 - B_2C_2) - A_1(A_3C_3 - B_2B_5) + A_2(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,$$
$$A_0(B_1D_0 - C_0C_2) - A_1(A_3D_0 - B_5C_0) + B_0(A_3C_2 - B_1B_5) = 0,$$
$$A_1B_4 - A_2B_3 = 0,$$
$$A_1C_1 - B_0B_3 = 0.$$

2. $A_1 \neq 0$, $A_0B_1 - A_1A_3 = 0$, $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

2.1. Dacă $A_2B_3 - A_1B_4 \neq 0$ și $\Delta_4 \geqslant 0$,

unde

$$\Delta_4 = (A_1C_3 - A_2C_2 + B_2B_3 - B_1B_4)^2 - 4(A_1B_2 - A_2B_1)(B_3C_3 - B_4C_2),$$

soluțiile sistemului (4) sînt:

$$a_{1,2} = \frac{A_1C_3 - A_2C_2 + B_2B_3 - B_1B_4 \pm \sqrt{\Delta_4}}{2(A_1B_2 - A_2B_1)}; \qquad c = A_1,$$

$$d = A_1\frac{(B_2B_3 - A_1B_4) - (A_1B_2 - A_2B_1)a}{A_2B_3 - A_1B_4}; \qquad f = \frac{A_2B_3 - A_1B_4}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

$$g = a - \frac{A_1C_3 - A_2C_2}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

$$i = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)[(A_0B_0 - A_1A_2)a + (A_1B_4 - A_0C_1)]}{B_0(A_0B_4 - A_2A_4) - A_2(A_1B_4 - A_2B_3)} + \frac{A_1(B_0B_4 - A_2C_1)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)}h,$$

(9)
$$k = \frac{A_1(B_0B_4 - A_2C_1)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)},$$

$$l = \frac{A_0}{A_1}\cdot\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_2B_3 - A_1B_4}(B_3 - A_1a) + \frac{B_0(A_0B_4 - A_2A_4) - A_2(A_1B_4 - A_2B_3)}{A_0(B_0B_3 - A_1C_1) + A_1(A_1B_4 - A_2B_3)}h,$$

$$m=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_2B_3-A_1B_4}(B_3-A_1a)+$$

$$+\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1C_1-B_0B_3)}{A_1[A_0(B_0B_3-A_1C_1)+A_1(A_1B_4-A_2B_3)]}h,$$

$$n=\frac{A_0}{A_1};\qquad p=\frac{B_0(A_0B_4-A_2A_4)-A_2(A_1B_4-A_2B_3)}{A_0(B_0B_3-A_1C_1)+A_1(A_1B_4-A_2B_3)},$$

$$r=\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1C_1-B_0B_3)}{A_1[A_0(B_0B_3-A_1C_1)+A_1(A_1B_4-A_2B_3)]},$$

cu h parametru arbitrar.

Existența soluțiilor (9) este asigurată de condițiile

$$A_1(B_2D_0-C_0C_3)-A_2(B_1D_0-C_0C_2)+B_0(B_1C_3-B_2C_2)=0,$$

$$A_1(B_2C_1-B_4C_0)-A_2(B_1C_1-B_3C_0)+B_0(B_1B_4-B_2B_3)=0,$$

(10)

$$A_0B_3-A_1A_4=0,$$

$$A_0C_2-A_1B_5=0.$$

2.2. Dacă $A_2B_3-A_1B_4=0$, soluțiile sistemului (4) sînt următoarele:

$$a=\frac{B_3}{A_1};\qquad c=A_1;\qquad d=\frac{A_1(B_2C_2-B_1C_3)}{B_2B_3-B_1B_4-A_1C_3+A_2C_2},$$

$$f=0;\qquad g=\frac{B_2B_3-B_1B_4-A_1C_3+A_2C_2}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$i=\frac{A_1(A_1B_2-A_2B_1)(A_1C_3-B_2B_3)}{(A_0B_0-A_1A_2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)}{(A_1C_3-A_2C_2+B_1B_4-B_2B_3)^2}-$$

$$-\frac{(A_1B_2-A_2B_1)(A_0C_2-A_4B_1)}{(A_0B_0-A_1A_2)}\cdot$$

(11)

$$\cdot\frac{(A_1B_0C_3-A_1A_2D_0-A_2B_1C_1+A_2B_3C_0+B_0B_1B_4-B_0B_2B_3)}{(A_1C_3-A_2C_2+B_1B_4-B_2B_3)^2}+$$

$$+\frac{A_1B_0C_3-A_1A_2D_0-A_2B_1C_1+A_2B_3C_0+B_0B_1B_4-B_0B_2B_3}{A_1(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)}h,$$

$$k=\frac{A_1B_0C_3-A_1A_2D_0-A_2B_1C_1+A_2B_3C_0+B_0B_1B_4-B_0B_2B_3}{A_1(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)},$$

$$l=\frac{A_0(A_1C_2-B_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)}{A_1^2(B_2B_3-B_1B_4-A_1C_3+A_2C_2)}+$$

$$+\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1C_3-A_2C_2+B_1B_4-B_2B_3)}{A_1^2(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)}h,$$

$$m=\frac{(A_1C_2-B_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)}{A_1(B_2B_3-B_1B_4-A_1C_3+A_2C_2)}+$$

$$+\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0)}{A_1^2(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)}h,$$

$$n=\frac{A_0}{A_1};\quad p=\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1C_3-A_2C_2-B_1B_4-B_2B_3)}{A_1^2(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)},$$

$$r=\frac{(A_0B_0-A_1A_2)(A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0)}{A_1^2(A_1C_3-A_0D_0-A_2C_2-A_3C_1+A_4C_0+B_0B_5+B_1B_4-B_2B_3)},$$

parametrul h rămînînd arbitrar.

Pentru existența soluțiilor (11) trebuie îndeplinite condițiile următoare:

$$A_1(B_2D_0-C_0C_3)-A_2(B_1D_0-C_0C_2)+B_0(B_1C_3-B_2C_2)=0,$$

$$A_1C_1-B_0B_3=0,$$

(12)

$$A_0B_3-A_1A_4=0,$$

$$A_0C_2-A_1B_5=0.$$

3. $A_1\neq 0$, $A_0B_1-A_1A_3=0$ și $A_1B_2-A_2B_1=0$.

3.1. Dacă $A_1C_1-B_0B_3\neq 0$, avem soluțiile

$$\Delta_5=(A_1D_0-B_0C_2+B_3C_0-B_1C_1)^2-4(A_1C_0-B_0B_1)(B_3D_0-C_1C_2),$$

Se notează cu:

$$a_{1,2}=\frac{A_1D_0-B_0C_2+B_3C_0-B_1C_1\pm\sqrt{\Delta_5}}{2(A_1C_0-B_0B_1)};\quad c=A_1,$$

$$d=A_1\frac{(B_3C_0-B_1C_1)-(A_1C_0-B_0B_1)\,a}{B_0B_3-A_1C_1};\quad f=\frac{B_0B_3-A_1C_1}{A_1C_0-B_0B_1};$$

$$g=a-\frac{A_1D_0-B_0C_2}{A_1C_0-B_0B_1},$$

$$(13)\quad i=\frac{A_1(A_1C_0-B_0B_1)\,[A_1B_4-A_0C_1+(A_0B_0-A_1A_2)\,a]}{(A_0B_0-A_1A_2)\,(A_1C_1-B_0B_3)}+\frac{A_2}{A_0}h;$$

$$k=\frac{A_2}{A_0};\quad l=\frac{B_3(A_0C_0-A_3B_0)-A_0(A_1C_0-B_0B_1)\,a}{B_0B_3-A_1C_1},$$

$$m=\frac{A_1C_0-B_0B_1}{B_0B_3-A_1C_1}(B_3-A_1a)+\frac{A_1A_2-A_0B_0}{A_0A_1}h;\quad n=\frac{A_0}{A_1};$$

$$p=0;\quad r=\frac{A_1A_2-A_0B_0}{A_0A_1},$$

h rămînînd parametru arbitrar.

Soluțiile (13) au loc dacă sînt îndeplimite următoarele patru condiții:

$$(14)\quad \begin{aligned} &A_1C_3-A_2C_2=0; && A_0B_3-A_1A_4=0,\\ &A_1B_4-A_2B_3=0; && A_0C_2-A_1B_5=0.\end{aligned}$$

3.2. Dacă $A_1C_1-B_0B_3=0$, sistemul (4) admite următoarele soluții:

$$a=\frac{B_3}{A_1};\quad c=A_1;\quad d=\frac{A_1(B_1D_0-C_0C_2)}{A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0},$$

$$f=0;\quad g=\frac{A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0}{B_0B_1-A_1C_0},$$

$$i=\frac{A_1(B_0B_1-A_1C_0)\,[(A_0C_0-A_2B_1)\,a-(A_0D_0-A_2C_2)]}{(A_1A_2-A_0B_0)\,(A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0)}+\frac{A_2}{A_0}h,$$

$$(15)\quad k=\frac{A_2}{A_0};\quad l=\frac{A_0(B_0B_1C_2-B_1^2C_1-A_1C_0C_2+B_1B_3C_0)}{A_1(A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0)},$$

$$m=\frac{B_0B_1C_2-B_1^2C_1-A_1C_0C_2+B_1B_3C_0}{A_1D_0-B_0C_2+B_1C_1-B_3C_0}+\frac{A_1A_2-A_0B_0}{A_0A_1}h,$$

$$n=\frac{A_0}{A_1};\quad p=0;\quad r=\frac{A_1A_2-A_0B_0}{A_0A_1}.$$

Existența soluțiilor (15) este asigurată de condițiile (14).

4. $A_1=0$, rezultă $A_0=A_1=A_2=B_0=0$.

4.1. Dacă $A_3B_3-A_4B_1\neq 0$, soluțiile sistemului (4) sînt:

$$a=\frac{B_3B_5-A_4C_2}{A_3B_3-A_4B_1};\quad c=0;\quad d=\frac{B_1f+B_3}{f},$$

$$g=\frac{A_3C_2-B_1B_5}{A_3B_3-A_4B_1}f;\quad i=\frac{B_3}{f}+\frac{B_3C_0-B_1C_1}{(B_1f+B_3)r}+\left(r+\frac{C_0f+C_1}{B_1f+B_3}\right)h,$$

$$k=r+\frac{C_0f+C_1}{B_1f+B_3},$$

$$(16)\quad l=\frac{A_4}{f}+\left[\frac{A_3f+A_4}{B_1f+B_3}\left(\frac{C_0f+C_1}{B_1f+B_3}+r\right)-\frac{B_2f+B_4}{B_1f+B_3}\right]h,$$

$$m=\frac{B_3}{f}+rh;\quad n=\frac{A_3f+A_4}{B_1f+B_3},$$

$$p=\frac{(A_3f+A_4)\,(C_0f+C_1)}{(B_1f+B_3)^2}-\frac{B_2f+B_4}{B_1f+B_3}+\frac{A_3f+A_4}{B_1f+B_3}r,$$

$$r_{1,2}=\frac{-N\pm\sqrt{\Delta_6}}{2(A_3B_3-A_4B_1)\,(B_1f+B_3)},$$

unde

$$N=(A_3B_3-A_4B_1)\,(C_0f+C_1)-(B_1C_1-B_3C_0)\,(A_3f+A_4)+$$
$$+(B_1B_4-B_2B_3)\,(B_1f+B_3),$$

$$\Delta_6=N^2-4(A_3B_3-A_4B_1)\,(B_1C_1-B_3C_0)\,[(C_0f+C_1)\,(A_3f+A_4)-$$
$$-(B_1f+B_3)\,(B_2f+B_4)],$$

iar parametrii f și h rămîn arbitrari.

Condițiile care asigură compatibilitatea sistemului (4) sînt

$$(17)\quad \begin{aligned} &A_2(B_3C_3 - B_4C_2) - A_4(B_1C_3 - B_2C_2) + B_5(B_1B_4 - B_2B_3) = 0,\\ &B_1(B_4D_0 - C_1C_3) - B_2(B_3D_0 - C_1C_2) + C_0(B_3C_3 - B_4C_2) = 0. \end{aligned}$$

4.2. Dacă $A_3B_3 - A_4B_1 = 0$, avem următoarele subcazuri:

4.2.1. $B_1B_4 - B_2B_3 \neq 0$.

În acest caz avem soluțiile:

$$a = \frac{B_3C_3 - B_4C_2}{B_2B_3 - B_1B_4}; \quad c = 0; \quad d = \frac{B_1f + B_3}{f},$$

$$g = \frac{B_2C_2 - B_1C_3}{B_2B_3 - B_1B_4} f,$$

$$(18)\quad i = \frac{(A_4C_1 - B_3B_4)\ (B_1f + B_3)}{f\,[(A_4C_0 - B_2B_3)\,f + A_4C_1 - B_3B_4]} + \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} h,$$

$$k = \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3},$$

$$l = \frac{A_4}{f} + \left(\frac{A_4}{B_3} \cdot \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} - \frac{B_2f + B_4}{B_1f + B_3}\right) h,$$

$$m = \frac{B_3}{f} + \frac{(B_1C_1 - B_3C_0)\ [(A_4C_0 - B_2B_3)f + (A_4C_1 - B_3B_4)]}{B_3(A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3)\ (B_1f + B_3)} h,$$

$$n = \frac{A_4}{B_3}; \quad p = \frac{A_4}{B_3} \cdot \frac{B_4C_0 - B_2C_1}{A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3} - \frac{B_2f + B_4}{B_1f + B_3},$$

$$r = \frac{(B_1C_1 - B_3C_0)\ [(A_4C_0 - B_2B_3)f + (A_4C_1 - B_3B_4)]}{B_3(A_4C_0 - A_3C_1 + B_1B_4 - B_2B_3)\ (B_1f + B_3)},$$

unde f și h sînt parametrii arbitrari.

Soluțiile (18) au loc dacă sînt îndeplinite condițiile următoare:

$$(19)\quad \begin{aligned} &A_4C_2 - B_3B_5 = 0,\\ &B_1(B_4D_0 - C_1C_3) - B_2(B_3D_0 - C_1C_2) + C_0(B_3C_3 - B_4C_2) = 0. \end{aligned}$$

4.2.2. Dacă $B_1B_4 - B_2B_3 = 0$, avem soluțiile

$$a = \frac{B_3D_0 - C_1C_2}{B_3C_0 - B_1C_1}; \quad c = 0; \quad d = \frac{B_1f + B_3}{f},$$

$$g = \frac{B_1D_0 - C_0C_2}{B_1C_1 - B_3C_0} f,$$

$$(20)\quad i = \frac{(B_3B_4 - A_4C_1)\ (B_1f + B_3)}{f\,[(B_1B_4 - A_4C_0)f + (B_3B_4 - A_4C_1)]} + \frac{B_4}{A_4} h,$$

$$k = \frac{B_4}{A_4}; \quad l = \frac{A_4}{f}; \quad m = \frac{B_3}{f} + \frac{(B_1B_4 - A_4C_0)f + (B_3B_4 - A_4C_1)}{A_4(B_1f + B_3)} h,$$

$$n = \frac{A_4}{B_3}; \quad p = 0; \quad r = \frac{(B_1B_4 - A_4C_0)f + B_3B_4 - A_4C_1}{A_4(B_1f + B_3)},$$

unde f și h rămîn parametri arbitrari.

Condițiile care asigură existența soluțiilor (20) sînt:

$$(21)\quad \begin{aligned} &A_4C_2 - B_3B_5 = 0,\\ &B_1C_3 - B_2C_2 = 0. \end{aligned}$$

Cazurile în care avem două sau trei scări proiective se tratează în mod cu totul analog.

Primită la redacție la 20 octombrie 1969

Institutul de calcul al Filialei din Cluj
a Academiei Republicii Socialiste România

SUR LA REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES PAR DES NOMOGRAMMES COMPOSÉS À POINTS ALIGNÉS. II

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on recherche dans quelles conditions l'équation (1) peut être représentée à l'aide d'un nomogramme composé constitué par deux nomogrammes à points alignés à trois échelles rectilignes régulières et une échelle projective, qui possèdent une échelle commune.

Les équations de Soreau après une transformation affine et une simplification possible s'écrivent sous la forme (2), où a, c, d, f, g, h, i, k, l, m, n p, r, μ, ν, sont les paramètres des échelles des nomogrammes. Par la suite, dans le travail on donne de manière explicite les valeurs des paramètres des échelles des nomogrammes qui sont les solutions du système d'équations non linéaires (4), dans tous les cas possibles.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bal şi F. Radó, *Lecţii de nomografie*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. M. Mihoc, *Asupra reprezentării ecuaţiilor cu patru variabile prin nomograme compuse cu puncte aliniate (I)*, St. cerc. mat., **XXI**, 9, 1393–1401 (1969).