SEMA (Metra International)
Société anonyme au capital de 18 193 300 F
Siège Social : 13/15, rue des Sablons Paris 16e
téléphone : 704 85 10 - 553 17 54
RC SEINE 64 B 509 INSEE 818 75 116 0 149

DIRECTION SCIENTIFIQUE

Note de Travail n° 160

Décembre 1971

SUR LA STABILITE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

I.S. TIGAN

SEMA (Metra International)
35, Bd Brune - Paris 14ème

AVANT-PROPOS

Cette note présente des conditions topologiques pour la stabilité de l'ensemble des solutions admissibles d'un problème d'optimisation sous contraintes.

De ces conditions découle un résultat sur la stabilité du problème d'optimisation (la continuité de la valeur optimale de la fonction à optimiser), comme un cas spécial du "Théorème du Maximum" de Berge [1] .

Ces résultats généralisent ceux obtenus par Evans et Gould [2] sur la stabilité d'un problème de programmation non-linéaire.

1. Introduction.

Notons par X un espace métrique, par Y un espace vectoriel topologique semi-ordonné (*) et par Z un espace topologique arbitraire. Soit f une fonctionnelle réelle définie sur XxZ et g une application de X dans Y.

Considérons le problème d'optimisation suivant, désigné par $\mathcal{P}(b, z)$:

(1.1) sup f(x, z)

avec

(1.2) $g(x) \preccurlyeq b$

où b et z sont respectivement éléments donnés de Y et de Z et "$\preccurlyeq$" est la relation de semi-ordre de Y.

Le but de cette note est d'étudier la stabilité du problème $\mathcal{P}(b, z)$, c'est-à-dire de chercher des conditions dans lesquelles une perturbation continue du couple (b, z) produit une variation continue de la valeur optimale de la fonction à optimiser du problème $\mathcal{P}(b, z)$. Il s'agit donc de trouver des conditions dans lesquelles a lieu la continuité de la fonctionnelle suivante :

$f_{sup} : B \times Z \to R \cup \{+\infty\}$

définie par la formule :

$f_{sup}(b, z) = \sup \{f(x, z) | x \in S_b\}$, $(b, z) \in B \times Z$

où

$S_b = \{x \in X | g(x) \preccurlyeq b\}$

et

$B = \{y \in Y | S_y \neq \emptyset\}$.

(*) C'est-à-dire sont considérés vérifiés les axiomes suivants :

i) $y \succcurlyeq y$ pour tout $y \in Y$

ii) $y_1 \preccurlyeq y_2$ et $y_2 \preccurlyeq y_3$ implique $y_1 \preccurlyeq y_3$.

Pour cela, d'abord on étudiera des conditions sur la stabilité de l'ensemble des solutions admissibles du problème $\mathcal{P}(b, z)$, c'est-à-dire des conditions dans lesquelles l'application multivoque :

$S : B \to X$
où $S(b) = S_b$ pour tout $b \in B$ est continue. Puis, en utilisant les résultats sur la stabilité de l'ensemble des solutions admissibles du problème $\mathcal{P}(b, z)$ et le "théorème du maximum" de Berge [1], on arrivera à un résultat sur la stabilité du problème $\mathcal{P}(b, z)$.

Cette étude donne une large extension des résultats obtenus par Evans et Gould [2] pour la stabilité du problème de la programmation non-linéaire ($X = R^n$, $Y = R^m$) dans le cas particulier :

$f(x, z) = f(x)$ pour tout $(x, z) \in R^n \times Z$.

Nous rappelons encore que dans des recherches théoriques importantes, Rockafellar [7], P.J. Laurent [6], J.L. Jolly, P.J. Laurent [5] ont relié la stabilité à l'étude de la dualité pour le cas de l'optimisation convexe.

Dans une direction en quelque sorte différente, G.B. Dantzig, J. Folkman, N. Shapiro dans [9] ont étudié la stabilité de l'ensemble des solutions optimales d'un problème d'optimisation.

2. Notations.

Soit T un espace topologique arbitraire et A un ensemble de T.

On désignera par $F(A)$, $I(A)$ et $Fr(A)$ respectivement la fermeture, l'intérieur et la frontière de l'ensemble A par rapport à la topologie de T.

Par la suite, nous emploierons ces notations pour les espaces X (munis d'une topologie générée par une métrique d), Y et Z.

Soit $\bar{x} \in X$, $A \subseteq X$ et $a > o$ un nombre réel. Alors on désigne :

$$V_a(\bar{x}) = \{x \in X | d(x, \bar{x}) < a\}$$
$$V_a(A) = \bigcup_{x \in A} V_a(x)$$

Si $y \in Y$ ($z \in Z$) on dénote par $W(y)$ ($U(z)$) un voisinage de y (de z).

Soit A un sous-ensemble de X et $x \in X$. Alors on désigne :

$$d(x, A) = \begin{cases} \inf \{d(x, y) | y \in A\}, & \text{si } A \neq \emptyset \\ + \infty, & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

3. Hypothèses

Pour la suite de l'exposé nous ferons les hypothèses suivantes :

H 1 L'espace Y est un espace vectoriel topologique semi-ordonné et l'ensemble

$$K = \{ y \in Y \mid y \geqslant \theta \}$$

est fermé (θ désigne l'élément nul de l'espace vectoriel Y).

H 2 L'espace Y admet un élément unité c'est-à-dire il existe un élément $e \in Y$ (nécessairement $\geqslant \theta$) tel que pour tout $y \in Y$, il y ait un nombre réel $\gamma > 0$ avec la propriété :

$$-\gamma e \leqslant y \leqslant \gamma e$$

H 3 Il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que :

$y \in W(\theta)$ implique $y \leqslant e$

H 4 La fonction g est continue sur X

Remarques :

i) on a $e \in I(K)$ si et seulement si H 3 a lieu (voir [4])

ii) De H 4 et H 1 il résulte que l'ensemble S_b est fermé pour tout $b \in B$.

On dira que $y \in Y$ est strictement positif et on écrira $y \gg \theta$ (ou $\theta \ll y$) s'il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que $y \gg \gamma e$.

Alors pour y_1, y_2 de Y on écrira :

$y_1 \gg y_2$

si on a :

$y_1 - y_2 \gg \theta$

iii) Si $y_1 \ll y_2$ (y_1, y_2 de Y) alors il existe deux voisinages $W(y_1)$ et $W(y_2)$ telsque l'on a :

$y \in W(y_1)$ implique $y \ll y_2$,

$y \in W(y_2)$ implique $y_1 \ll y$.

4. Définitions de base

Pour les définitions suivantes on suppose $\bar{b} \in B$.

Définition 1 : Soit $S_{\bar{b}}$ compact. On dira que l'application S est semi-continue supérieurement (S.C.S.) en $\bar{b}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $W(\bar{b})$ tel que :

$b \in W(\bar{b})$ implique $S_b \subseteq V_\varepsilon (S_{\bar{b}})$

Définition 2 : Soit $S_{\bar{b}}$ compact. On dira que l'application S est semi-continue inférieurement (S.C.I.) en $\bar{b}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $W(\bar{b})$ tel que :

$b \in W(\bar{b}) \cap B$ implique $S_{\bar{b}} \subseteq V_\varepsilon (S_b)$

Remarque 1 : On peut montrer que les définitions 1 et 2 sont équivalentes avec les définitions de Berge [1] si $S_{\bar{b}}$ est compact.

Définition 3 : On dira que l'application S est continue en $\bar{b}$ si elle est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en $\bar{b}$.

Définition 4 : On dira que l'ensemble des solutions admissibles du problème $\mathcal{P}(b,z)$ est stable (sup-stable ou inf-stable) en $\bar{b}$ ($\in B$) si l'application S est continue (S.C.S., S.C.I.) en $\bar{b}$.

Définition 5 : On dira que le problème $\mathcal{P}(b,z)$ est stable (sup-stable, inf-stable) en $(\bar{b},\bar{z})$ si la fonctionnelle f_{sup} est continue (semi-continue supérieurement, semi-continue inférieurement) en $(\bar{b},\bar{z})$.

Remarque 2 : Puisque Y est un espace vectoriel topologique il est suffisant d'étudier la stabilité seulement pour $\bar{b} = \theta$. En effet, si $\bar{b} \in B$, alors (1.2) est équivalente à :

$g_o(x) \leqslant \theta$

ou :

$g_o(x) = g(x) - b$ pour tout $x \in X$.

On a évidemment :

$\theta \in B_o$ où $B_o = \{y \in Y \mid S^o{}_y \neq \emptyset\}$ et $S^o{}_y = \{x \in X \mid g_o(x) \leqslant y\}$

5. Résultats

5.1 Sup-stabilité de l'ensemble des solutions admissibles

Les propriétés comprises dans cette sous section fournissent des conditions afin que l'application S soit S.C.S. en θ, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions admissibles du problème $\mathcal{P}(b,z)$ soit sup-stable en θ.

D'abord on démontrera le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit $\theta \in B$. Si pour $\alpha > 0$ l'ensemble $S_\alpha e$ est compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha^* > 0$, tel que :

(5.1) $S_{\alpha^*} e \subseteq V_\varepsilon (S_\theta)$

Démonstration : En effet, pour un entier positif n_o suffisamment grand, l'inégalité $\alpha > 0$ entraîne

(5.2) $\frac{1}{n_o}.e \ll \alpha . e$

Mais (5.2) implique, pour tout $n \geq n_o$, que l'ensemble $S_{\frac{1}{n}} e$ est compact, comme ensemble fermé (voir remarque ii), section 3) contenu dans l'ensemble compact $S_\alpha e$.

Maintenant soit, pour tout $n \geq n_o$,

(5.3) $x_n \in S_{\frac{1}{n}} e$,

tel que :

(5.4) $d(x_n, S_\theta) = \max \{ d(x, S_\theta) \mid x \in S_{\frac{1}{n}} e \}$

Alors puisque les termes de la suite (x_n) appartiennent (pour $n \geq n_o$) à l'ensemble compact $S_\alpha . e$, il existe une sous-suite (x_{n_j}) convergent vers un élément x_o

De (5.3) on a :

(5.5) $g(x_{n_j}) \leqslant \frac{1}{n_j}.e$.

Mais, (5.5) et les hypothèses H.1, H.5 impliquent :

$g(x_o) \leqslant_\theta$

C'est-à-dire $x_o \in S_\theta$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier positif n_{j_o}, tel que :

$x_{n_j} \in V_\varepsilon (x_o)$ pour tout $n_j \geq n_{j_o}$.

Mais (5.4) implique :

$S \frac{1}{n_j} e \subseteq V_\varepsilon (S_\theta)$ pour tout $n_j \geq n_o$

d'où en prenant par exemple :

$$\alpha^{\divideontimes} = \frac{1}{n_{j_o}}$$

Il résulte (5.1). Ceci achève donc la démonstration.

Théorème 1 : Soit $\theta \in B$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $S_\alpha .e$ est compact alors l'application S est S.C.S. en θ.

Démonstration : Soit $\alpha > 0$. Alors du lemme 1, on en tire qu'il existe $\alpha^{\divideontimes} > 0$ tel que la relation (5.1) est vérifiée. Mais puisque $\alpha^{\divideontimes}.e \gg \theta$, il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que :

(5.6) $b \in W(\theta)$ implique $\alpha^{\divideontimes} e \gg b$

De (5.6) et de la monotonie [*] de l'application S, il résulte :

$S_b \subseteq S\ \alpha^{\divideontimes}.e \subseteq V_\varepsilon (S_\theta)$,

pour tout $b \in W(\theta)$, ce qui signifie que l'application S est S.C.S. en θ.

La démonstration est ainsi achevée.

Ensuite, on montre que si l'espace X est localement compact alors le théorème 1 admet une réciproque.

Théorème 1' : Soit X un espace métrique localement compact. Alors si l'application S est S.C.S. en θ il existe $\alpha > 0$ tel que $S_\alpha .e$ est compact.

Démonstration : En effet, puisque S_θ est compact et l'espace X est localement compact, il existe un ensemble V' compact, tel que pour au moins $\varepsilon > 0$, on a :

$V_\varepsilon (S_\theta) \subseteq V'$

---

[*] L'application S est monotone dans le sens suivant :

$b \leqslant b'$ implique $S_b \subseteq S_{b'}$

Mais l'affirmation "S est S.C.S. en θ", entraîne qu'il existe un entier positif n_o tel que :

$$S_{\frac{1}{n}.e} \subseteq V_\varepsilon (S_\theta)$$

pour tout $n \geq n_o$

Donc on a également pour $n \geq n_o$:

$$S_{\frac{1}{n}} e \subseteq V'$$

Maintenant puisque $S_{\frac{1}{n}} e$ est fermé l'inclusion précédente implique, pour tout $n \geq n_o$, qu'il est également compact. Si on prend, par exemple, $\alpha = \frac{1}{n_o}$, il résulte la conclusion du théorème.

5.2 Inf-stabilité de l'ensemble des solutions admissibles

Dans ce qui suit, on obtiendra des conditions afin que l'ensemble des solutions admissibles soit inf-stable en θ.

Supposons $\theta \in B$ et S_θ compact. Alors on considère les ensembles :

$$I_o = \{x \in S_\theta \mid g(x) \ll \theta\}$$

et

$$\hat{S}_o = \{x \in S_\theta \mid x \notin I_o\}$$

Soit $\delta > 0$. Alors l'ensemble

$$S^\delta = \{ x \in S_\theta \mid d(x, \hat{S}_o) \geq \delta\}$$

sera denommé δ contraction de l'ensemble S_θ

Concernant les notions présentées ci-dessus on a les propriétés suivantes :

Les ensembles $\hat{S}_o$ et S^δ sont fermés, et puisque $\hat{S}_o \subseteq S_\theta$, $S^\delta \subseteq S_\theta$ et S_θ est compact on a également $\hat{S}_o$ et S^δ compacts.

L'inclusion suivante est vraie :

(5.7) $S^\delta \subseteq I_o$.

Lemme 2 : $I_o \neq \emptyset$ si et seulement si $\theta' \notin I(B)$.

Démonstration :

i) Supposons que $\theta \in I(B)$. Alors il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que $W(\theta) \subseteq B$. Considérons la suite $(-\frac{1}{n} e)$. Puisque $-\frac{1}{n} e \to 0$ quand $n \to \infty$. il existe un nombre entier positif n_o tel que $n \geq n_o$ implique

$-\frac{1}{n} e \in W(\theta)$

Donc, pour $n \geq n_o$, $-\frac{1}{n} e \in B$, ce qui signifie qu'il existe au moins un élément $x \in X$, tel que :

$g(x) \leqslant \frac{1}{n} e$

Mais la dernière inégalité donne à la limite :

$g(x) \lessdot \theta$

c'est-à-dire il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $x \notin I_o$;

donc $I_o \neq \emptyset$

ii) Maintenant supposons que $I_o \neq \emptyset$, alors il existe au moins un élément $x \in X$, tel que :

$g(x) \lessdot \theta$

Il résulte alors (voir remarque iii), section 3) qu'il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que $b \in W(\theta)$ implique $g(x) \lessdot b$. On a donc $W(\theta) \subseteq B$ et par conséquent $\theta \in I(B)$. Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 3 : On suppose $\theta \in B$, S_θ compact et $F(I_o) = S_\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que :

(5.8) $V_\varepsilon (S^\delta) \supseteq S_\theta$

Démonstration : En effet, puisque $\hat{S}_o$ est compact, il existe un nombre fini d'ensembles ouverts :

$V^j = V^j_{\frac{\varepsilon}{4}}(z_j)$, $z_j \in \hat{S}_o$, $j = 1,2, \ldots, k$, qui recouvre $\hat{S}_o$.

De l'égalité $F(I_o) = S_\theta$ on en tire que :

$V^j \cap I_o \neq \emptyset$, $j = 1,2, \ldots, k$,

Soit alors :

$x_j \in V^j \cap I_o$, $j = 1,2, \ldots k$,

et $\delta = \min_j \delta_j$

où :

$\delta_j = d(x_j, \hat{S}_o)$, $j = 1,2, \ldots k.$

On a évidemment :

(5.9) $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Maintenant nous montrerons que la relation (5.8) est vraie, en démontrant les inclusions suivantes :

(5.10) $\hat{S}_o \subseteq V_\varepsilon(S^\delta)$

(5.11) $I_o \subseteq V_\varepsilon(S^\delta)$

Avant de démontrer les deux inclusions il est utile de faire la remarque que par construction on a :

$S^\delta \neq \emptyset$

Démontrons (5.10) . Soit $x_o \in \hat{S}_o$. Alors il existe j_o $(1 \leq j_o \leq k)$ tel que :

$x_o \in V^{jo}$

et puisque :

$d(x_{j_o}, \hat{S}_o) = \delta_{j_o} \geq \delta,$

il résulte $x_{j_o} \in S^\delta$

Aussi puisque x_{jo} et x_o se trouvent tous les deux, dans V^{jo} on a :

$d(x_o, x_{j_o}) \leq d(x_o, z_{jo}) + d(z_{j_o}, x_{j_o}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Mais alors du fait que $x_o \in \hat{S}_o$ on en tire :

$x_o \in V_\varepsilon (S^\delta)$

et donc (5.10) est vrai.

Soit maintenant $x_o \notin I_o$. Si on a :

$d(x_o, \hat{S}_o) \geq \delta$

il résulte $x_o \in S^\delta$ et on a de même :

$x_o \in V_\varepsilon (S^\delta)$.

Si on a :

$d(x_o, \hat{S}_o) < \delta$

alors il existe $\hat{x} \in \hat{S}_o$, tel que :

(5.12) $d(x_o, \hat{x}) < \delta$

et également il existe un indice j' $(1 \leq j' \leq k)$ tel que $\hat{x} \in V^{j'}$.
Alors de (5.9), (5.12) et $x_{j'} \in V^{j'}$ on a :

$d(x_{j'}, x_o) \leq d(x_{j'}, z_{j'}) + d(z_{j'}, \hat{x}) + d(\hat{x}, x_o) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon$

ce qui signifie que $x_o \in V_\varepsilon (x_{j'})$. Alors puisque $x_{j'} \in S^\delta$, il résulte que :

$x_o \in V_\varepsilon (S^\delta)$,

donc (5.11) est vrai.

Lemme 4 : Soit $\theta \in B$ et S_θ compact. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe $c^* > 0$, tel que :

(5.13) $g(x) \leqslant -c^*.e$, pour tout $x \in S^\delta$

Démonstration : Tout d'abord on peut remarquer que si $S^\delta = \emptyset$, alors (5.13) est trivialement vérifié quel que soit $c^* > 0$.

Supposons maintenant que le lemme n'est pas vrai, ce qui implique qu'il existe au moins $\delta' > 0$ (avec $S^{\delta'} \neq \emptyset$ nécessairement) tel que pour tout $n > 0$, il y a $x_n \in S^{\delta'}$ pour lequel la relation :

(5.14) $g(x_n) \leqslant -\frac{1}{n}.e$ n'est pas vraie.

Mais puisque $S^{\delta'}$ est compact la suite (x_n) contient une sous-suite (x_{n_j}) convergent vers un élément $x_o \in S^{\delta'}$. Alors vu $S^{\delta'} \subseteq I_o$ on a :

$g(x_o) \ll \theta$

d'où on en tire (remarque iii), section 3) qu'il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que :

(5.15) $y \in W(\theta)$ implique $g(x_o) \ll y$.

D'ailleurs, puisque $-\frac{1}{n_j} e \to \theta$ quand $j \to \infty$, il existe un indice n_{j_o} tel que :
$n_j \geq n_{j_o}$ implique $-\frac{1}{n_j}.e \in W(\theta)$. Alors, en tenant compte de (5.15), pour tout $n_j \geq n_{j_o}$, il résulte :

(5.16) $g(x_o) \ll -\frac{1}{n_j} e$

De (5.16) on en tire qu'il existe un voisinage $W(g(x_o))$ tel que :

(5.17) $y \in W(g(x_o))$ implique $y \lesssim -\frac{1}{n_{j_o}}.e$

Puis, du fait que g est continue on a : $g(x_{n_j}) \to g(x_o)$, d'où il résulte qu'il existe un indice n_{j_1} tel que :

(5.18) $n_j \geq n_{j_1}$ implique $g(x_{n_j}) \in W(g(x_o))$.

Alors, de (5.17) et (5.18), pour $n_j \geq \max(n_{j_o}, n_{j_1})$ on a :

$g(x_{n_j}) \lesssim -\frac{1}{n_j}.e$.

Mais la dernière relation est en contradiction avec (5.14). Il résulte donc que le lemme est vrai.

Théorème 2 : Soit $\theta \in B$, S_θ compact et $I_o \neq \emptyset$. Alors, l'application S est S.C.I. en θ si, et seulement si, $F(I_o) = S_\theta$.

Démonstration : Montrons que $F(I_o) = S_\theta$ implique S est S.C.I. en θ. En effet, puisque toutes les conditions du lemme 3 sont remplies, il résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, tel que :

(5.19) $S_\theta \subseteq V_\varepsilon(S^\delta)$.

On tire également du lemme 4 qu'il existe $c^* > 0$, tel que :

$g(x) \lesssim -c^*.e$

pour tout $x \in S^\delta$. Soit alors :

$b^* = -c^*.e$

Puisque $b^* \ll \theta$, il existe un voisinage $W(\theta)$ tel que :

$b \in W(\theta)$ implique $b^* \ll b$, d'où on en tire que :

$S_b \supseteq S_{b^*}$ $(\supseteq S^\delta)$

pour tout $b \in W(\theta)$,

Il résulte donc :

$V_\varepsilon(S^\delta) \subseteq V_\varepsilon(S_b)$

pour tout $b \in W(\theta)$. Mais la dernière inclusion et (5.19) impliquent $S_\theta \subseteq V_\varepsilon(S_b)$ pour tout $b \in W(\theta)$, ce qui signifie que l'application est S.C.I. en θ.

ii) Démontrons que si l'application S est S.C.I. en θ (et $I_{\bar{b}} \neq \emptyset$) alors on a $F(I_o) = S_\theta$.

On a évidemment $F(I_o) \subseteq S_\theta$. Il reste donc à démontrer l'inclusion contraire : $S_\theta \subseteq F(I_o)$.
Soit alors $x \in S_\theta$. Si $x \notin I_o$ on a également $x \in F(I_o)$. Supposons donc que $x \notin I_o$. Alors puisque $I_o \neq \emptyset$ du lemme 2, il résulte $\theta \in I(B)$, d'où on tire qu'il existe $n_o > 0$ entier tel que :

$n > n_o$ implique $-\frac{1}{n} e \in B$.

D'ailleurs puisque S est S.C.I. en θ , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n'o ($> n_o$) entier tel que :

$S_\theta \subseteq V_\varepsilon (S - \frac{1}{n} e)$

pour tout $n > n'_o$. Mais cela signifie qu'il existe au moins un élément $x' \in S - \frac{1}{n} e$ tel que $x \notin V_\varepsilon(x')$, d'où on en tire que $x' \notin V_\varepsilon(x)$. Alors puisque $x' \notin S - \frac{1}{n} e$ on a : $g(x') \ll - \frac{1}{n} e$,

donc :

$g(x') \ll \theta$

ce qui est équivalent à $x' \in I_o$.

Ainsi, dans tout voisinage de l'élément x il existe au moins un élément $x' \in I_o$, ce qui signifie que $x \in F(I_o)$. Ceci achève donc la démonstration.

Application : Dans ce qui suit, en appliquant le théorème 2, on montre que l'ensemble des solutions admissibles du problème $\Gamma(\theta, z)$ est inf-stable en θ, quand l'application g est strictement quasiconvexe. Pour cette application on supposera que l'espace X est un espace métrique linéaire (réel).

Une fonction $g : X \to Y$ sera dite strictement quasiconvexe sur un ensemble $A \subset X$, si pour tout $y \in Y$ quel que soit $x_o \in A \cap S_y$ tel que $g(x_o) \ll y$ on a : $g(x) \ll y$ pour tout x tel que :

$x \in \{x'' \in A \mid x'' = \lambda x_o + (1-\lambda) x', x' \in S_y \cap A, \lambda \in (0,1)\}$

Théorème 3 : Soit g strictement quasiconvexe sur S_θ (et continue) et $I_o \neq \emptyset$. Alors on a :

$F(I_o) = S_\theta$

donc l'application S est S.C.I. en θ (voir théorème 2).

Démonstration : On a évidemment $F(I_o) \subseteq S_\theta$. Il reste à montrer donc l'inclusion contraire. Soit alors $\bar{x} \in S_\theta$. Si $x \in I_o$, il résulte évidemment que $\bar{x} \in F(I_o)$. Si $\bar{x} \notin I_o$, alors on a $\bar{x} \notin \hat{S}_o$. Pour un élément arbitraire $\hat{x}$ de I_o, soit : $x(\gamma) = \gamma.\hat{x} + (1-\gamma)\bar{x}$,

où $0 < \gamma < 1$. Alors, puisque g est strictement quasiconvexe, il résulte :

$g(x(\gamma)) \ll \theta$

pour $0 < \gamma < 1$. On a donc $x(\gamma) \in I_o$ pour tout γ de $(0,1)$.

Ainsi dans tout voisinage du $\bar{x}$ il existe des éléments de I_o, ce qui implique $\bar{x} \in F(I_o)$. Ceci achève donc la démonstration.

5.3 Stabilité

Des théorèmes 1 et 2 il résulte sans difficulté le théorème 4 sur la stabilité de l'ensemble des solutions admissibles.

Théorème 4 : Soit $\theta \in B$. Si les conditions suivantes :

i) il existe $\tilde{b} \in B$, $\tilde{b} \gg \theta$, tel que $S_{\tilde{b}}$ est compact

ii) $F(I_o) = S_\theta$,

sont vérifiées, alors l'application S est continue en θ, donc l'ensemble des solutions admissibles est stable en θ.

Aussi, en utilisant le théorème 4, on obtiendra comme un cas spécial du théorème A (annexe ou C. Berge [1]) le théorème suivant sur la stabilité du problème $\Gamma(\theta, z)$.

Théorème 5 : Soit $z \in Z$ et $\theta \in B$. Si f est une fonctionnelle continue (supérieurement semi-continue, inférieurement semi-continue) sur $X \times Z$, g est une fonction continue sur X et les conditions i), ii) du théorème 4 sont vérifiées, alors le problème $\Gamma(\theta, z)$ est stable (sup-stable, inf-stable) en (θ, z), c'est-à-dire la fonctionnelle f_{sup} est continue (supérieurement semi-continue, inférieurement semi-continue) en $(\theta, \bar{z})$

En effet, si l'on prend dans le théorème A (annexe) :

$P = B$

$Q = X \times Z$

$f(p, q) = f(q)$ pour tout $p \in P$ et $q \in Q$. (P et Q définis ci-dessus),

$\Gamma = \overline{S}$

où $\overline{S}(b,z) = S_b$, pour tout $z \in Z$ et pour tout $b \in B$, alors on obtient tout de suite le théorème 5.

6. Annexe

Soit P et Q espaces typologiques.

Théorème A : (C. Berge [1]). Si $f(p, q)$ est une fonctionnelle réelle continue (semi-continue supérieurement, semi-continue inférieurement) dans $P \times Q$ et si Γ est une application multivoque continue (S.C.S., S.C.I.) de P dans Q telle que $\Gamma p \neq \emptyset$ pour toute $p \in P$, alors la fonctionnelle $M : P \to \bar{R}$ définie par :

$M(p) = \sup \{ f(p,q) \mid q \in \Gamma p \}$

est continue (semi-continue supérieurement, semi-continue inférieurement) sur P.

REFERENCES

[1] C. BERGE
Espaces topologiques
Chap. IV, 1959, Dunod, Paris.

[2] J.P. EVANS, F.J. GOULD,
Stability in nonlinear programming
Operations Research, vol. 18, n°1, 1970, pp. 107-118.

[3] J.P. EVANS, F.J. GOULD
Stability and exponential penalty function techniques in nonlinear programming
Department of Statistics, University of North Carolina at Chapel Hill, mimeo series n°723, November 1970.

[4] G. JAMESON
Ordered linear spaces
Lecture Notes in Mathematics, 141, Springer-Verlag, 1970.

[5] J.L. JOLY, P.J. LAURENT
Stability and duality in convex minimization problems
à paraître, RIRO, 1971.

[6] P.J. LAURENT
Optimisation et approximation, Grenoble, 1970.

[7] R.T. ROCKAFELLAR,
Duality and stability in extremum problems involving convex functions
Pacific J. of Mathematic n°21, 1967, pp. 167-187.

[8] N. BOURBAKI
Topologie générale, chap. 1, 1965, Paris.

[9] G.B. DANTZIG, J. FOLKMAN, N. SHAPIRO
On the continuity of the minimum set of a continuous function
J. of Mathematic, Analysis and Application, 17, 1967, pp. 513-548