REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 1, Fascicola 1, 1972, pp. 53—63

CERCETĂRI ÎN DOMENIUL PLANIFICĂRII OPERATIVE LA INSTITUTUL DE CALCUL (I)*

de

L. NÉMETI

(Cluj)

1. Problema atelierului.

Studiile întreprinse în cadrul institutului de calcul din Cluj în domeniul indicat în titlu se referă la aşa numita problemă a atelierului în diferite forme tehnologice, organizatorice şi economice ale acesteia. Pentru cazul tipic, cel mai simplu, enunţul tehnic al problemei este următorul.

Pentru un atelier mecanic care este înzestrat cu diferite maşini de prelucrat (maşini-unelte) este dată o sarcină de producţie. Aceasta constă din prelucrarea unor piese diferite de maşini. Prelucrarea unei piese înseamnă trecerea acesteia într-o ordine dată, prin diferite maşini-unelte, pe fiecare maşină executîndu-se o operaţie bine determinată. Durata fiecărei operaţii este dată.

Printr-o maşină oarecare vor trece în general mai multe feluri de piese de prelucrat. Ordinea aceasta de trecere nu este dată (pe cînd ordinea de trecere a unei piese prin diferitele maşini este prescrisă de tehnologia adoptată). Această ordine care este de multe ori identică cu ordinea de lansare a prelucrării pieselor, are însă o mare înfluenţă asupra unor indici economici a fabricaţiei, cum ar fi, de exemplu, durata totală a execuţiei întregii prelucrări, sau gradul de folosire a utilajului, etc.

Dacă ordinea de trecere (ordinea de lansare) este dată, atunci se poate determina şi momentul de începere a fiecărei operaţii tehnologice. Prin aceasta s-a întocmit „programarea în timp a fabricaţiei" sau „planul calendaristic". Se caută deci planul calendaristic al fabricaţiei care să optimizeze o funcţie economică aleasă.

În decursul acestei lucrări se vor arăta diferitele situaţii tipice de producţie care au fost studiate la Institutul de calcul: cazul mai multor maşini

---

* Partea a doua a acestei lucrări apare într-una din fascicolele următoare ale revistei.

de același tip, cazul fabricației în serie, existența sau folosirea stocu
de tampon, lucrul în mai multe schimburi, considerîndu-se în toate ac
cazuri diverse funcții economice, dintre care, două sînt mai importan
durata minimă de execuție și gradul maxim de folosire al utilaju

Modelele matematice elaborate pentru aceste probleme sînt, în to
cazurile studiate, probleme de programare matematică dintr-o anum
clasă, anume din clasa problemelor de programare cu condiții logice. Pe
rezolvarea unor astfel de probleme s-a elaborat în cadrul Institutului
procedeu general, care va fi prezentat pe scurt în această lucrare.

Menționăm că prima lucrare în care s-a tratat o astfel de proble
este lucrarea lui S. M. JOHNSON [2] din anul 1954, în lucrarea respect
studiindu-se două mașini de prelucrare, care sînt parcurse de către d
ritele piese în aceiași ordine.

În afară de acest paragraf introductiv, lucrarea prezentă conți
următoarele paragrafe:

2. Prezentarea metodei pentru rezolvarea unei probleme de progr
mare cu condiții logice.

3. și 4. Cazul „clasic" și unele îmbunătățiri.

5., 6. și 7. Mai multe mașini de același tip.

8. Fabricația în serie.

9. Stocuri tampon.

10. Lucrul în mai multe schimburi.

11. Metode euristice. Concluzii.

2. Metoda lui F. Radó

O problemă de programare cu condiții logice poate fi formulată în
modul următor: să se determine vectorul x, care minimizează funcția
scalară

(2.1) $$u = f(x), \quad \text{minim}$$

unde x verifică relațiile

(2.2) $$A_i(x) \geqq 0, \quad i = 1,2, \ldots, p$$

și

(2.3) $$(B_j(x) \geqq 0) \vee (C_j(x) \geqq 0) \quad j = 1,2, \ldots, q.$$

Aici funcțiile (scalare) reale $A_i(x)$, $B_j(x)$, $C_j(x)$ sînt date și prin semnul $\vee$, noi notăm funcția logică a disjuncției.

Forma susindicată se generalizează imediat, considerînd în locul ine-
lităților $B_j(x) \geqq 0$, $C_j(x) \geqq 0$, conjuncții de astfel de inegalități. De
emenea, disjuncția (2.3) poate avea mai mult de doi termeni.

Metoda de rezolvare elaborată de colaboratorul nostru F. RADÓ ([11],
2]) în anul 1963, este înrudită cu metodele Branch and Bound ([3], [4])
sp. S.E.P. [(1]). publicate tot în acești ani, dar ea a fost bineînțeles ela-
orată independent de aceste metode. Metoda poate fi descrisă pe scurt
um urmează: Notăm prin P problema constituită din relațiile (.2.1), ...,
2.3). Vom numi o problemă fundamentală a lui P, problema constituită
in (2.1), (2.2) și din primul sau al doilea termen dintr-o parte a disjuncțiilor
2.3). O astfel de problemă fundamentală $P(A)$ poate fi caracterizată prin
ulțimea A, constituită din perechile de numere (α, j), unde $\alpha \in \{1, 2\}$
i $j \in Q = \{1, 2, \ldots, q\}$. Un element (α, j) indică faptul că termenul α din
disjuncția a j — a din (2.3) a fost folosit pentru formarea mulțimii A care
definește problema $P(A)$. Problema constituită numai din (2.1) și (2.2) o
vom nota cu $P(\emptyset)$.

În procedeul folosit se vor forma, pas cu pas, trei șiruri.

(*) $$P(A_1), \quad P(A_2), \quad \ldots$$

(**) $$m_1, \quad m_2, \quad \ldots$$

(***) $$x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

Aici x_i este soluția problemei fundamentale $P(A_i)$, iar m_i este valoarea funcției economice $f(x_i)$. Dacă soluția x_i verifică toate condițiile (2.3), atunci termenul m_i va fi subliniat. Șirul (**) este nedescrescător.

La primul pas se va pune $A = \emptyset$. Presupunem că am ajuns în construcția celor trei șiruri, la termenul al i-lea $(A(x_i), m_i, x_i)$. Dacă primul termen m_1 din (**) este subliniat, atunci x_1 este o soluție a problemei P și calculul s-a terminat. Dacă nu, se va alege o disjuncție (2.3) încă nefolosită la construcția problemelor $P(A)$, care nu este verificată de către x_1. Să presupunem că această disjuncție este disjuncția de ordinul j. Atunci termenii $P(A_1)$, m_1, x_1 vor fi șterși din cele trei șiruri, se formează mulțimile $A' = A_1 \cup \{1, j\}$ și $A'' = A_1 \cup \{2, j\}$, se rezolvă problemele fundamentale $P(A')$ și $P(A'')$ (obținîndu-se soluțiile x', m', x'', m'') și în fine, acești doi termeni vor fi încadrați în șirurile (*), (**), (***) în așa fel, încît sirul (**) să rămînă nedescrescător. Pe urmă, numerotarea termenilor se reface în așa fel, încît indicii să formeze din nou șirul numerelor naturale. Dacă problemele $P(A')$ și/ sau $P(A'')$ sînt incompatibile, ele nu vor fi încadrate în șir. Dacă prin suprimarea primilor termeni, șirurile devin vide, atunci problema P însăși este incompatibilă. Procedeul se termină într-un număr finit de pași.

Pentru mai multe detalii și pentru demonstrații trimitem la lucrările lui F. Radó, indicate anterior.

3. Cazul „clasic"

Revenim la situaţia descrisă în paragraful 1. Presupunem că maşinile-unelte sînt toate diferite între ele (din fiecare fel de maşină existînd un singur exemplar). Ele sînt numerotate de la 1 la m.

Notăm $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Mulţimea M reprezintă astfel mulţimea maşinilor de prelucrare. Atelierul urmează să execute n operaţii (o operaţie poate fi definită printr-o piesă prelucrată la o maşină, deci printr-un cuplu piesă-maşină), numerotate şi ele de la 1 la n. Mulţimea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ reprezintă mulţimea operaţiilor.

Procedeul tehnologic prescrie pentru fiecare operaţie maşina la care va fi efectuată operaţia respectivă, ceea ce revine la o anumită parţiţie a mulţimii N:

$$N = \bigcup_{k \in M} N_k,$$

N_k fiind mulţimea indicilor operaţiilor care urmează să fie executate pe maşină nr. k.

Există cupluri de operaţii (de exemplu două operaţii consecutive ale unei piese) (i, j), pentru care tehnologia adoptată determină o relaţie de ordine temporală, în sensul că operaţia j nu poate fi începută decît după scurgerea unei durate date t_{ij}, socotită de la începerea operaţiei i. Aceste cupluri (i, j) formează mulţimea dată $H = \{(i, j)\} \subset N \times N$. Durata t_i a execuţiei operaţiei i (adică durata în cursul căreia maşina-unealtă respectivă este ocupată cu executarea operaţiei i) este şi ea dată.

Vom pune pentru fixarea momentului de începere, condiţiile:

$$x_i \geqq 0, \quad i \in N \qquad \text{(condiţia de începere)}, \tag{3.1}$$

unde momentul (necunoscut) al operaţiei i s-a notat cu x_i.

Se presupune că o operaţie odată începută, operaţia respectivă nu se întrerupe pînă la terminarea ei completă. Condiţia de ordine temporară susmenţionată se exprimă prin inegalităţile

$$x_j - x_i \geqq t_{ij}, \ (i, j) \in H \qquad \text{(condiţii de succesiune)}. \tag{3.2}$$

Operaţiile executate pe aceeaşi maşină formează mulţimea dată

$$J = \{(i, j) \mid i < j, \ i \in N_k, \ j \in N_k, \ k \in M\}. \tag{3.3}$$

Presupunem că la fiecare maşină, în orice moment dat, cel mult o operaţie se găseşte sub execuţie. De aici rezultă condiţiile:

$$(x_i - x_j \geqq t_j) \vee (x_j - x_i \geqq t_i), \ (i, j) \in J \tag{3.4}$$

(condiţii de non-interferenţă).

Ca funcţie economică de minimizat se consideră durata totală a execuţiei tuturor operaţiilor

$$u = f(x) = \max_{i \in N} (x_i + t_i).$$

De altfel această condiţie poate fi liniarizată. Pentru necunoscuta u vor fi impuse restricţiile

$$u - x_i \geqq t_i, \qquad i \in N \tag{3.5}$$

şi se va cere minimizarea funcţiei economice

$$f = u: \text{minim} \tag{3.6}$$

Relaţiile (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) cu condiţia (3.6) formează o problemă P de programare cu condiţii logice care poate fi rezolvată cu procedeul descris în paragraful precedent. O problemă fundamentală $P(A)$ a problemei P va conţine, în afara restricţiilor (3.1), (3.5) şi condiţiei (3.6), restricţiile

$$x_j - x_i \geqq t'_{ij}, \ (i, j) \in H \cup L,$$

în care mulţimea $L \subset N \times N$ este determinată de mulţimea A în modul următor: Fie $(\alpha, r) \in A$, iar ca disjuncţie (3.4), de ordinul r, fie disjuncţia

$$(x_i - x_j \geqq t_j) \vee (x_j - x_i \geqq t_i).$$

Atunci, dacă $\alpha = 1$, are loc relaţia $(i, j) \in L$, iar dacă $\alpha = 2$, avem $(j, i) \in L$.

Numerele t'_{ij} sînt definite prin

$$t'_{ij} = \begin{cases} t_{ij} \\ \max\limits_{t_i} (t_i, t_{ij}) \end{cases} \text{pentru } (i, j) \in \begin{cases} H - L \\ H \cap L \\ L - H \end{cases} \tag{3.7}$$

Astfel, toate problemele fundamentale $P(A)$ se reduc la aşa numite probleme de potenţial (vezi lucrarea [13]), care constituie o generalizare a problemelor de drum critic. Există pentru ele metode de rezolvare speciale, bineînţeles mult mai simple şi rapide decît procedura generală „simplex" de exemplu ([13] şi în deosebi lucrarea colaboratorului nostru V. PETEANU [10]).

Este o particularitate a modelelor prezentate în această lucrare faptu că ele constituie probleme de programare cu disjuncţii, ale căror problem fundamentale sînt sau probleme de potenţial, sau pot fi reduse la problem de potenţial.

4. Unele generalizări

Modelului din paragraful precedent i se pot aduce cîteva modificări, respectiv generalizări, în scopul de a-l apropia mai mult de condiţiile reale de fabricaţie.

a) În locul condiţiilor de începere (3.1), se pot pune termene de procurare şi de livrare

$$\begin{cases} x_i \geqq \tau_i' & i \in N' \subset N \\ x_i \leqq \tau_i'' & i \in N'' \subset N. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pentru operaţiile fără restricţii de procurare, se va pune $\tau_i' = 0$ iar celor fără termen de livrare, $\tau_i'' = \infty$ (respectiv un număr suficient de mare).

b) Există relaţii între duratele t_i şi t_{ij}. Într-adevăr, o analiză mai aprofundată a noţiunii de durata de execuţie a unei operaţii ne arată că mărimea t_i se compune din

— timpul de pregătire a maşinii-unelte respective: δ_i

— timpul de execuţie propriu zis: t_i°

— timpul de manipulare a piesei (controlul calitativ şi transportul la maşina următoare): γ_i.

Maşina este ocupată pe durata $\delta_i + t_i^\circ$, iar piesa în cauză va fi ocupată pe o durată de timp, de $t_i^\circ + \gamma_i$. Executarea unei operaţii se face în general prin loturi de piese. Atunci timpul t_i° se referă la lotul întreg, prelucrarea acestuia nefiind întreruptă. Manipularea pieselor poate fi făcută însă prin subloturi. Atunci ultima cantitate se modifică în $t_i^\circ + \frac{\gamma_i}{\nu_i}$, dacă notăm cu ν numărul subloturilor într-un lot. Atunci durata din (3.2) va fi

$$t_{ij} = \delta_i - \delta_j + \frac{t_i^\circ}{\nu_i} + \gamma_i + \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \max\,(0,\, t_i^\circ - t_j^\circ). \tag{4.2}$$

Spaţiul grafic relativ restrîns al prezentei lucrări nu ne permite să deducem formula de mai sus. Ea se obţine din următorul deziderat: cantitatea pieselor ieşite din maşina ce execută operaţia i şi ajunse în faţa maşinii

ce execută operaţia j să nu fie mai mică decît cantitatea de piese solicitate de această a doua maşină pentru prelucrare (vezi [8]).

Se constată că durata t_{ij} depinde de părţile componente ale duratelor t_i şi t_j şi ea poate fi şi negativă. În plus, are loc inegalitatea

$$t_{ij} \geqq t_i - t_j. \tag{4.3}$$

c) Există şi alte posibilităţi pentru funcţiile economice de optimizat, în afară de durata totală a execuţiei. Pe de o parte, planul lunar, respectiv programarea calendaristică a acestuia se face în funcţia de comenzile lansate. În aceste condiţii se va cere ca planul lunar să fie realizat, anumite termene de livrare să fie respectate şi totodată să se minimizeze funcţia economică

$$f = \sum_{k \in M} \gamma_k T_k. \tag{4.4}$$

Aici numerele pozitive γ_k sînt nişte ponderi ce se stabilesc din considerente economice, iar T_k este momentul de timp cînd maşina nr. k îşi termină ultima operaţie ce i-a fost afectată în conformitate cu programul elaborat.

Pe de alte parte şi valoarea producţiei neterminate poate fi luată în considerare la alcătuirea funcţiei economice. Toate aceste consideraţii conduc la o funcţie de optimizat de forma

$$f = \sum_{i \in N} c_i x_i \tag{4.5}$$

(vezi şi lucrarea [9]).

O astfel de funcţie conduce, la problemele fundamentale ale programării, la o problemă de optimizare a potenţialului, pentru care B. ROY a elaborat o metodă de rezolvare ([12]).

5. Mai multe exemplare din acelaşi tip de maşini-unelte I

În acest prim model pentru problema considerată, mulţimea de indici $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ va reprezenta diferitele tipuri de maşini şi nu maşinile individuale. Din fiecare tip $k \in M$ există μ_k exemplare, practic identice. Celelalte notaţii din paragraful 3 se păstrează, ţinînd cont însă de noul conţinut al mărimii M. Astfel de exemplu: mărimea N_k, $k \in M$ reprezintă mulţimea operaţiilor de executat la maşinile de tipul k.

Cu aceasta, condiţiile de început (3.1) şi de succesiune (3.2) rămîn neschimbate. Condiţia de non-interferenţă are aici următoarea formulare: programul trebuie astfel întocmit încît la un moment de timp oarecare, să fie programate cel mult μ_k operaţii pe tipul k. Pentru a putea formula matematic această condiţie, introducem o variabilă auxiliară z_{ij}^k definită

pentru $i, j \in N_k$; $i \neq j$; $k \in M$ și care semnalează una dintre următoarele două situații: 1) Inegalitățile $0 \leqq z_{ij}^k < 1$ ne indică faptul că momentul de începere x_j al operației j se află în afara intervalului de timp $[x_i, x_i + t_i)$ afectat executării operației i (operațiile i și j executîndu-se pe același tip de mașină k); 2) Inegalitățile $z_{ij}^k \geqq 1$ indică situația contrară.

Atunci condiția de non-interferență devine [vezi [5] și [9]]:

$$(x_j - x_i < 0) \vee (0 \leqq x_j - x_i < t_i \wedge z_{ij}^k \geqq 1) \vee (x_j - x_i \geqq t_i) \tag{5.1}$$

$$\text{pentru } i \neq j,\ i \in N_k,\ j \in N_k,\ k \in M \tag{5.2}$$

$$z_{ij}^k \geqq 0$$

$$\text{pentru } i \neq j,\ i \in N_k,\ j \in N_k,\ k \in M \tag{5.3}$$

$$\sum_{\substack{r \in N_k \\ r \neq i}} z_{ri}^k \leqq \mu_k - 1$$

$$\text{pentru } i \in N_k,\ k \in M.$$

Condițiile (3.1), (3.2), (5.1), (5.2), (5.3), împreună cu funcția economică aleasă de optimizat constituie o problemă de programare liniară cu condiții logice, care se rezolvă cu metodele cunoscute.

Observații cu privire la forma acestei probleme:

a) Necunoscutele problemei sînt x_i și z_{ij}^k, ceeace complică considerabil problema. În lucrarea [6] se indică o metodă de tranformare simplă, prin care se elimină necunoscutele z_{ij}^k.

b) În problemele fundamentale ataşate problemei în cauză intervin şi inegalităţi stricte, ca de exemplu $x_j - x_i < 0$.

În aceeași lucrare [6] este indicat și modul de tratare a unor astfel de probleme. Întrucît spațiul grafic relativ restrîns, afectat prezentei lucrări nu ne îngăduie să intrăm în aceste detalii, ne limităm la a cita lucrarea respectivă.

6. Mai multe exemplare din același tip de mașini unelte II

Prin metoda ridicată în paragraful precedent, rezolvarea unei probleme fundamentale devine mult mai dificilă, respectiv complicată, decît prin metoda descrisă în cadrul paragrafului 3. Procedeul prezentat în paragraful de față nu arată acest dezavantaj; în schimb, numărul problemelor fundamentale este mai mare. Alegerea între aceste două metode (respectiv între

trei, ținînd seamă și de procedeul ce va fi prezentat în paragraful următor), trebuie făcută de la caz la caz.

În modelul de față, numim *operație*, prelucrarea unei piese date pe un anumit tip de mașină (care se prescrie prin tehnologia adoptată) și o *variantă* a acestei operații, executarea prelucrării pe un anumit exemplar din tipul respectiv. Pentru fiecare operație ce se execută pe tipul r de mașină, vor fi deci μ_r variante.

N va reprezenta mulțimea operațiilor și

V va reprezenta mulțimea variantelor (numerotate și ele de la 1 pînă la ...), iar

M va reprezenta de data aceasta mașinile (și nu tipurile).

Mulțimea V admite două partiții:

$$V = \bigcup_{i \in N} V_i = \bigcup_{k \in M} W_k. \tag{6.1}$$

Aici, V_i reprezintă mulțimea variantelor aparținînd operației i, iar W_k reprezintă mulțimea variantelor ce pot fi executate pe mașina k. Notăm ca și pînă acum cu x_i, $i \in N$ momentul (necunoscut) de începere a operației i. Mai introducem și necunoscutele y_h, $h \in V$, momentul de începere a variantei h. În soluție se va alege una și numai una dintre variantele operației i; atunci dintre necunoscutele y_h, $h \in V_i$, se va determina una singură (cu $y_h = x_i$), celelalte rămînînd nedeterminate.

Modelul ia atunci următorul aspect:

Condițiile de începere:

$$x_i \geqq 0,\ i \in N; \tag{6.2}$$

Condițiile de succesiune:

$$x_j - x_i \geqq t_{ij},\ (i, j) \in H; \tag{6.3}$$

Condițiile variantelor:

$$\bigvee_{h \in V_i} (x_i = y_h),\quad i \in N; \tag{6.4}$$

Condițiile de non-interferență

$$(y_h - y_l \geqq t_l) \vee (y_l - y_h \geqq t_h),\quad (h, l) \in K, \tag{6.5}$$

unde

$$K = \{(h, l) \mid h < l,\ h \in W_k,\ l \in W_k,\ k \in M\}, \tag{6.6}$$

reprezintă o mulțime analogă cu J (însă din domeniul variantelor și nu al operațiilor și din domeniul mașinilor și nu al tipurilor).

La acestea se mai adaugă și funcția economică de optimizat aleasă.

Modelul acesta reprezintă și el, ca și celelalte modele indicate anterior, o programare cu disjuncții.

În lucrare [7] sînt indicate o serie de transformări prin care aspectul problemei se simplifică, se elimină și necunoscutele y_h și se realizează încă alte simplificări. Nu insistăm aici asupra acestora.

Academia R. S. România,
Filiala din Cluj
Institutul de calcul

FORSCHUNGEN IM RECHENINSTITUT AUS DEM GEBIET DER OPERATIVEN PLANUNG (I)

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird über die wichtigsten im Recheninstitut erhaltenen Ergebnisse über das sogenannte Reihenfolgeproblem (Ablaufplanung) berichtet.

Der erste, in diesem Heft erschienene Teil enthält folgende Abschnitte:

1. Darlegung des Problems an Hand einer typischen Situation. Dieses Beispiel zeigt zugleich die grosse praktische Bedeutung des Problems auf.

2. Es wird der Radó'sche Algorithmus zur Lösung von Programmierungsproblemen, die auch logische Bedingungen enthalten, dargelegt. Die Bedeutung dieser Methode gründet sich auf die Tatsache, dass alle Modelle der Ablaufplanung gerade solche Programmierungsprobleme darstellen.

3. Dieser Abschnitt enthält das Modell des sogenannten „klassischen" Falles.

4. Einige Verbesserungen, die an dem klassischen Fall vorgenommen werden können:

a) Einführung von Anfang- und Schlussbedingungen;
b) Analyse der Durchführungszeiten;
c) Angabe anderer Zielfunktionen.

5. Das erste Modell des Falles, wenn mehrere Exemplare aus demselben Typ von Werkzeugmaschinen vorhanden sind.

6. Das zweite Modell desselben Falles.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bertier, B., Roy, B., *Une procédure de résolution pour une classe de problèmes pouvant avoir un caractère combinatorial* I.C.C. Bull **4,** 19—28 (1965).

[2] Johnson, S. M. *Optimal Two-and Three Stage Production Scheduling with Setup Times Included.* Naval Res. Log. Quart. **1,** 61—88 (1954).

[3] Ignall, E., Schrage L., *Application of the Branch and Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems.* J. Ops. Res. **13,** 400—412 (1965).

[4] Little, S. D., Murty, K. G., Sweeney, D. W., Karel, C., *An Algorithm for the Travelling Salesman Problem.* J. Ops. Res. **11,** 972—989 (1963).

[5] Németi, L., *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen.* Mathematica (Cluj), **6,** *1,* 87—99 (1964).

[6] — *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung.* Mathematica (Cluj), **9,** *1,* 129—140 (1967).

[7] — *Über das Reihenfolgeproblem in der Fertigung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art.* Rev. Roumaine Math. pures et appl. **13,** *6,* 835—860 (1968).

[8] — *Über die Durchführungsdauer eines Arbeitsganges in der Ablaufplanung.* Bull. Mat. Soc. Scie. Math. de la R. S. Roumanie, **12,** *3,* 81—86 (1968).

[9] Németi, L., Radó F., *Sur la programmation temporelle de la fabrication.* Mathematica (Cluj) **8,** *1,* 109—115 (1966).

[10] Peteanu, V., *Optimal Paths in Networks and Generalizations.* Mathematica (Cluj), **11,** *2,* 311—328 (1969) și **12,** 1, 169—188 (1970).

[11] Radó, F., *Programarea liniară cu condiții logice.* Comunic. Acad. R.P.R. **13,** 1039—1042 (1963).

[12] — *Un algorithme pour résoudre certains problèmes de programmation mathématique.* Mathematica (Cluj) **6,** *1,* 105—116 (1964).

[13] Roy, B., *Cheminement et connexité dans les graphes.* Application aux problèmes d'ordonnancement. METRA, Série spéciale, N° 1, 1962.

Primit la 15. XI. 1971.