NOTE SUR LES ENSEMBLES H-LISSES

IOAN MUNTEAN

Les ensembles H-lisses (ou bien H-convexes) ont été introduites par T. Precupanu [2] pour la recherche des espaces vectoriels topologiques dont la topologie est donnée par une famille de produits scalaires. Dans cette note on donne des conditions suffisantes de convexité et de convexité stricte des ensembles H-lisses. Comme application des ces résultats, on obtient une caractérisation des normes engendrées par un produit scalaire.

1. Soit X un espace vectoriel sur le corps K des nombres réels ou complexes.

On dit qu'une partie Y de X est *H-lisse* si pour tous les $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ et $y \in \beta Y$ il existe $\alpha_1 \geqslant 0$ et $\beta_1 \geqslant 0$ tels que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $x + y \in \alpha_1 \cdot Y$ et $x - y \in \beta_1 \cdot Y$. On voit bien que l'ensemble Y des points rationnels de l'intervalle $[-1, 1]$ de l'axe réel n'est pas convexe. Néanmoins, Y est H-lisse car, si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha Y$ et $y \in \beta Y$, on peut prendre $\alpha_1 = |x + y|$ et $\beta_1 = |x - y|$. Il est donc intéressant de chercher des conditions assurant la convexité ou même la convexité stricte des ensembles H-lisses.

On dit qu'une partie Y de X est *absorbante* si pour tout $x \in X$ il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda Y$. Une partie Y de X est dite *équilibrée* si pour tout $\lambda \in K$, avec $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\lambda Y \subset Y$. La fonctionnelle $p_Y : X \to R$, associée à une partie absorbante Y de X et donnée par l'égalité $p_Y(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda Y\}$, est la *fonctionnelle de Minkowski* à support Y.

La proposition qui suit a été établie par T. Precupanu [2], pag. 85—88:

PROPOSITION A. Si Y est une partie absorbante, équilibrée et H-lisse de X, alors la fonctionnelle de Minkowski p_Y à support Y possède les propriétés suivantes:

$$p_Y(\lambda x) = |\lambda| p_Y(x) \text{ pour tous } \lambda \in K \text{ et } x \in X, \tag{1}$$

$$\{x \in X : p_Y(x) < 1\} \subset Y \subset \{x \in X : p_Y(x) \leqslant 1\}, \tag{2}$$

$$p_Y^2(x) + p_Y^2(y) = \frac{1}{2}[p_Y^2(x + y) + p_Y^2(x - y)] \text{ pour tous } x, y \in X, \tag{3}$$

$$p_Y(x + y) \leqslant p_Y(x) + p_Y(y) \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{4}$$

2. On dit qu'une partie Y de X est *radiairement bornée* si pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, on peut trouver un $y \in X$, $y \neq 0$, tel que $Y \cap R_+ x \subset [0, y]$, où $R_+ x = \{\alpha x : \alpha \geqslant 0\}$ et $[0, y] = \{\alpha y : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

PROPOSITION B. Si Y est une partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée de X, alors la fonctionnelle de Minkowski p_Y à support Y est une norme sur X.

Démonstration. Les relations (1) et (4) montrent que p_Y est une seminorme sur X. S'il existait un $x \in X$, $x \neq 0$, tel que $p_Y(x) = 0$, alors on aurait

$$R_+x \subset Y \text{ et } R_+x \not\subset [0, y] \text{ pour tout } y \in X,\ y \neq 0. \tag{5}$$

En effet, pour établir la première relation de (5), soit $z = \alpha x \in R_+x$, $\alpha \geqslant 0$; alors $p_Y(z) = \alpha p_Y(x) = 0$ et de (2) on tire $z \in Y$. Pour établir la deuxième relation de (5) on suppose le contraire: il existe un $y \in X$, $y \neq 0$, tel que $R_+x \subset [0, y]$; alors $x = \alpha y$, $0 < \alpha \leqslant 1$, d'où on arrive à la contradiction $2y = \frac{2}{\alpha} x \in R_+x \setminus [0, y]$. Maintenant de (5) il vient que $Y \cap R_+x = R_+x \not\subset [0, y]$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Y d'être radiairement borné. Par conséquent, p_Y est une norme sur X.

Une partie absorbante et équilibrée Y de X est dite *strictement convexe* si pour tous $x, y \in Y$, $x \neq y$, et $t \in]0, 1[$, on a $p_Y[tx + (1-t)y) < 1$.

Proposition C. Toute partie absorbante, équilibrée, H-lisse et radiairement bornée Y de X est strictement convexe.

Démonstration. a) Montrons d'abord que pour tous $x, y \in X$, avec $p_Y(x) \leqslant 1$, $p_Y(y) \leqslant 1$ et $x \neq y$, on a $p_Y\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] < 1$. En effet, compte tenu de Proposition B, on trouve $p_Y(x-y) > 0$ et de (3) on peut conclure que

$$p_Y^2\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] = \frac{1}{2}\left[p_Y^2(x) + p_Y^2(y)\right] - p_Y^2\left[\frac{1}{2}(x-y)\right] <$$

$$< \frac{1}{2}\left[p_Y^2(x) + p_Y^2(y)\right] \leqslant 1.$$

b) Ensuite on va prouver que pour tous $x, y \in X$, avec $p_Y(x+y) = p_Y(x) + p_Y(y)$, il existe $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha x = \beta y$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $x \neq 0$ et que $p_Y(x) \leqslant p_Y(y)$. Alors

$$p_Y\left[\frac{x}{p_Y(x)} + \frac{y}{p_Y(y)}\right] \geqslant p_Y\left[\frac{x}{p_Y(x)} + \frac{y}{p_Y(x)}\right] -$$

$$- p_Y\left[\frac{y}{p_Y(x)} - \frac{y}{p_Y(y)}\right] = \frac{p_Y(x) + p_Y(y)}{p_Y(x)} - p_Y(y)\left[\frac{1}{p_Y(x)} - \frac{1}{p_Y(y)}\right] = 2. \tag{6}$$

Pour les éléments $x' = \frac{x}{p_Y(x)}$ et $y' = \frac{y}{p_Y(y)}$ on a $p_Y(x') = p_Y(y') = 1$ donc $x' = y'$ car, autrement, de a) on tire $p_Y\left[\frac{1}{2}(x'+y')\right] < 1$ ce qui contredit (6).

c) Enfin, nous allons montrer que Y est strictement convexe. Pour cela, soient $x, y \in Y$, $x \neq y$, et $t \in]0, 1[$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $p_Y(x) = p_Y(y) = 1$. Si l'on avait $p_Y(tx + (1-t)y) \geqslant 1$, les relations (1), (2) et (4), impliqueraient $p_Y(tx + (1-t)y) = 1$. Pour

REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMEI STRATULUI LIMITĂ ÎN FORMA LUI MISES PRIN METODA DIFERENȚELOR FINITE. APLICAȚIE LA CILINDRUL CIRCULAR

DOINA BRĂDEANU

TEORIA PROBLEMEI

Introducere. Pentru studiul mișcării fluidului vîscos incompresibil în domeniul închis D al stratului limită laminar folosim ecuația lui Mises și condițiile la limită:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{du_1^2}{dx} + \nu u \frac{\partial^2 u^2}{\partial \bar{\psi}^2}, \quad x_0 < x \leqslant x_I, \quad 0 < \bar{\psi} < \infty, \quad \bar{\psi}_\infty \tag{0.1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \bar{\psi}_\infty) = u_1(x), \quad 0 \leqslant x_0 < x \leqslant x_J \tag{0.2}$$

$$u(x_0, \bar{\psi}) = u^\circ(\bar{\psi}), \quad 0 \leqslant \bar{\psi} \leqslant \infty, \quad \bar{\psi}_\infty \tag{0.3}$$

$$\bar{D} \equiv \{x, \bar{\psi} \mid 0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant x_I, \ 0 \leqslant \bar{\psi} \leqslant \infty, \ \bar{\psi}_\infty\} \tag{0.4}$$

unde: x și $\bar{\psi}$ sînt variabilele lui Mises, u — viteza în direcția x în puncte din interiorul stratului limită, u_1 — viteza pe frontiera exterioară, $\nu = \mu/\rho$ — vîscozitatea cinematică, ρ — densitatea, $\bar{\psi}_\infty$ — valoarea funcției de curent $\bar{\psi}$ pe frontierea exterioară, u° — soluția inițială dată în secțiunea inițială $x = x_0$. Domeniul D al mișcării, din planul lui Mises $(x, \bar{\psi})$, se împarte în trei subdomenii: D^i — interiorul stratului limită, D^s — vecinătatea suprafeței corpului în jurul căruia se mișcă fluidul și D^∞ — regiunea punctului de la infinit.

1. **Mișcarea din domeniul interior D^i. Metoda diferențelor finite.** În subdomeniul sau regiunea D^i problema se rezolvă numeric printr-o schemă explicită cu diferențe finite cu 4 puncte de forma [1], [4]:

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} + r\sqrt{V_i - g_{i,j}}(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \tag{1}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, I-1; \ j = 1, 2, \ldots, J-1)$$

$$g_{i,o} = V_i, \ g_{i,J} = 0, \ g_{0,j} = G_{0,j} \text{ (valori date)} \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, I-1, \ j = 0, 1, \ldots, J)$$

unde ($u_\infty = \text{const.}$, δ — grosimea stratului, D_Δ — rețeaua; I, J — numere întregi):

$$x = LX, \ \bar{\psi} = \psi\sqrt{\nu L u_\infty}, \ \psi_\infty = \psi(X, y = \delta), \ u_1 = u_\infty U_1, \ U_1^2 = V(x)$$

$$X_i = X_0 + i\Delta X, \ \psi_j = j\Delta\psi, \ \Delta X = \frac{X_I - X_0}{I}, \ \Delta\psi = \frac{\psi_\infty}{J}, \ r = \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2} = \text{const.}$$

$$u = u_\infty U = u_\infty\sqrt{U_1^2 - G(X, \psi)}, \ G(X_i, \psi_j) \approx g(X_i, \psi_j) \equiv g_{i,j} \tag{3}$$

$$D_\Delta \equiv \{X_i, \psi_j \mid 0 \leqslant X_0 \leqslant X_i \leqslant X_I, \ 0 \leqslant \psi_j \leqslant \psi_\infty\}$$

Convergența și stabilitatea acestei scheme sînt studiate în lucrările [4], respectiv [1]. Condițiile de stabilitate și convergență sînt:

$$r \leqslant \frac{4U_{i,j}}{10\,U_{i,j}^2 - U_{i,j+1}^2 - U_{i,j-1}^2} \tag{4}$$

$$g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1} \geqslant 0 \tag{5}$$

iar eroarea de aproximație a soluției ecuației diferențiale este delimitată prin inegalitatea

$$||z_i|| \leqslant k(X_I - x_0)[\Delta X + (\Delta\psi)^2],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I;\ (0 \leqslant X_0 < X_I) \tag{6}$$

$$(||z_i|| = \max_{(j=0,1,\ldots,J)} |G(X_i,\ \psi_j) - g_{i,j}|\ ;\ k = k(G_{X^2},\ G_{\psi^4}))$$

2. **Mișcarea în domeniul D^s. Singularitatea ecuației lui Mises.** În vecinătatea suprafeței corpului ($\partial^2 G/\partial\psi^2 \to \infty,\ \psi \to 0$) se caută pentru viteaz adimensională $U(X,\ \psi)$ o serie de forma

$$U(X,\ \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(X)\psi^{n/2} \tag{7}$$

$$(D^s \equiv \{X,\ \psi | X_0 \leqslant X \leqslant X_I,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 2\Delta\psi\})$$

unde coeficienții $a_n(X)$ sînt funcții necunoscute care se determină cu condiții suplimentare:

— Condiția de compatibilitate (pentru ecuație)

$$\left(U\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right)_{\psi=0} = -2U_1\frac{dU_1}{dX} \tag{7'}$$

— Condiții pe suprafața corpului care cer să fie nuli coeficienții $\lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$ din dezvoltările (compatibilitate)

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi}U\right)^{(i)}\frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2} = \lambda_{i+1}\,\psi^{-1/2} + \ldots \tag{8}$$

unde, de exemplu,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi}U\right)^{(2)}\frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2} = \frac{\partial}{\partial\psi}\left(U\frac{\partial}{\partial\psi}\left(U\frac{\partial^2 U^2}{\partial\psi^2}\right)\right)$$

Pentru a determina coeficientul a_{i+1} rezolvăm ecuația

$$\lambda_{i+1}(a_1,\ \ldots,\ a_i;\ a_{i+1}) = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Se observă că în cazul de faţă avem

$$U^2 = a_1^2\psi + 2a_1a_2\psi^{3/2} + (2a_1a_3 + a_2^2)\psi^2 \ldots \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \lim_{\psi\to 0}\frac{\partial U^2}{\partial\psi},\quad A \equiv U_1\frac{dU_1}{dX} \\ a_2 &= -\frac{4A}{3a_1^2},\quad a_3 = -\frac{14A^2}{9a_1^5},\quad a_4 = -\frac{80A^3}{27a_1^8} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

În D^s, reprezentăm funcţia $G(X, \psi)$ în forma aproximativă

$$G(X, \psi) = U_1^2(X) - a_1^2\psi + \frac{8}{3}\frac{A}{a_1}\psi^{3/2} + \frac{4}{3}\frac{A^2}{a_1^4}\psi^2 \tag{11}$$

Pentru rezolvarea completă a problemei va trebui să aflăm şi coeficientul a_1 rămas nedeterminat în aplicarea condiţiilor de compatibilitate de pe suprafaţa corpului. În acest scop folosim un procedeu de aproximaţii succesive considerînd că soluţia dată de metoda diferenţelor finite reprezintă o aproximaţie (iniţială) pentru funcţia G în D^s. Se găseşte relaţia

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} + 2\left(\frac{\partial G}{\partial\psi}\right)_{i,0}\Delta\psi = 3g_{i,0} - 2a_1^2\Delta\psi \tag{12}$$

şi, în consecinţă, formula aproximaţiei de ordinul zero

$$(a_1^2)^0 = \frac{3g_{i,0} - 4g_{i,1} + g_{i,2}}{2\Delta\psi} \tag{13}$$

Pentru aproximaţia de ordinul întîi folosim relaţia

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} - 2a_1^2\Delta\psi + \frac{2}{3}\frac{A}{a_1}(\Delta\psi/\theta)^{3/2};\ 0 < \theta < 1, \tag{14}$$

care conduce la ecuaţia de gradul trei

$$z^3 - z_0^2 z - \bar{c} = 0 \tag{15}$$

$$(z \equiv a_1,\ z_0 \equiv a_1^0,\ \bar{c} = 2{,}2228A\sqrt{\Delta\psi},\ \theta^{-3/2} = 6{,}6683) \tag{15'}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii se poate aplica metoda iterativă a lui Newton sau un procedeu de relaxare. Cu valoarea a_1 astfel determinată revenim la formula (11) care ne va da valorile funcţiei G şi, deci, ale vitezei U în domeniul D^s.

Tensiunea de frecare locală pe suprafaţa corpului $\tau_w(X)$ se va calcula, aplicînd legea lui Newton, cu formula

$$\tau_w(X) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu u_\infty^2}{2\sqrt{\nu L u_\infty}}\left(\frac{\partial U^2}{\partial\psi}\right)_w = \frac{\rho u_\infty^2}{2}\frac{a_1^2}{\sqrt{R_e}} \tag{16}$$

Pentru coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii de frecare locală avem formula

$$\sqrt{R_e}\, c_{\tau w} = a_1^2 \tag{17}$$

$$\left(R_e = \rho u_\infty L/\mu,\ c_{\tau w} = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2}\right) \tag{17'}$$

3. **Regiunea punctului de la infinit D^∞.** Pentru calculul valorilor funcției $G(X_i, \psi_j) \approx g_{i,j}$, în secțiunea $X = X_i$ în puncte unde $\psi_{J+1} = (J+1)\Delta\psi$ J fiind un număr folosit în mașina de calcul (program), se pot aplica formulele [3]

$$g_{i,J+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}(9g_{i,J} - 6g_{i,J-1} + g_{i,J-2}), & \text{dacă } g_{i,J+1}\,(g_{i,J+1} - g_{i,J}) < 0 \\ \frac{1}{2} g_{i,J}, & \text{dacă } g_{i,J+1}(g_{i,J+1} - g_{i,J}) > 0 \end{cases} \tag{18}$$

4. **Soluție inițială.** Soluția inițială, de pornire, în procesul numeric de rezolvare a problemei scurgerii plane peste un corp cilindric este dată de soluția automodelată (de similitudine) din vecinătatea punctului critic reprezentată în variabilele (Illingworth-Stewartson)

$$\xi = \mu\rho \int_0^x u_1(x)\mathrm{d}x = \frac{\mu\rho c_1}{2} x^2,\ \eta = \frac{u_1}{\sqrt{2\xi}} \rho y = y \sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}}$$

($u_1 = c_1 x$, $c_1 = \text{const.}$, $y = \text{coordonata normală}$; μ, $\rho = \text{const.}$)

Dacă se introduce funcția vitezei $f(\eta)$ se obțin formulele

$$u = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} = u_1 \frac{df}{d\eta} = \frac{d\bar{\psi}}{d\eta} \sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}},\ \left(\frac{u}{u_1} = \frac{df}{d\eta}\right)$$

de unde rezultă următoarea relație între funcțiile f și ψ

$$\psi = \frac{u_1}{\sqrt{L c_1 u_\infty}} (\eta) f \tag{19}$$

Funcția $f(\eta)$ și primele sale două derivate, pentru mișcări plane și axial-simetrice, sînt date în tabele [2].

Se obține imediat formula

$$G_{o,j} = U_1^2 - U^2 = V_i \left[1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2_{\eta=\eta_j}\right] \tag{20}$$

$$(G_{0,0} = (U_1^2)_0,\ f'(\eta_0 = 0) = 0),\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Cunoscînd soluția inițială $G_{0,j}$, schema cu diferențe finite (1) poate fi programată, în domeniul de convergență și stabilitate, la o mașină electronică de calcul.

STRAT LIMITĂ PE UN CILINDRU CIRCULAR (APLICAȚIE)

5. **Calculul vitezei și tensiunii de frecare.** Se consideră un cilindru circular atacat perpendicular pe generatoarele sale de un curent vîscos incompresibil care la infinit este în translație uniformă cu viteza u_∞ (fig. 1). În acest caz avem formulele (R = raza cilindrului):

$$L = R,\ X = x/R = \alpha \text{ rad},\ u_1 = 2u_\infty \sin\frac{x}{R},\ U_1 = 2\sin X$$

$$X_0 = 0{,}1745 \to 10^\circ;\ r = 0{,}33;\ \Delta\psi = 0{,}1;\ \Delta X = 0{,}0033$$

Pentru $\psi = \psi_\infty$ avem $\partial G/\partial X = 0$ iar pentru $\psi = 0$ avem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = 2U_1U_1' \begin{cases} \geqslant 0 \text{ dacă } X_0 \leqslant X \leqslant \pi/2 \\ \leqslant 0 \text{ dacă } \frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \pi \end{cases} \tag{21}$$

În consecință, în imediata vecinătate a suprafeței corpului obținem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\sqrt{U_1^2 - G}}{(\Delta\psi)^2}(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \leqslant 0 \text{ pentru } \frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \pi \tag{22}$$

Deci, condițiile de convergență și stabilitate nu sînt verificate în apropierea cilindrului în secțiuni $X > \pi/2$. Pe de altă parte trebuie exclusă vecinătatea imediată a suprafeței cilindrului din cauza singularității ecuației lui Mises de pe cilindru. În consecință, domeniul de stabilitate și convergență al schemei (1) pentru cilindrul circular va fi: $X_0 \leqslant X \leqslant \pi/2$; $2\Delta\psi < \psi < \infty$.

Calculul stratului limită incompresibil de pe un cilindru circular se va face după următorul algoritm:

— Calculul mărimii V_i se va face cu formula

$$V_i = U_1^2 = 4\sin^2(0{,}1745 + 0{,}0033i),\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{23}$$

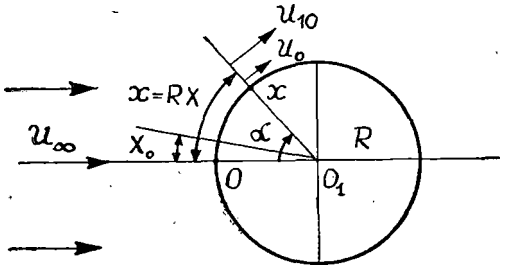


Fig. 1

— Valorile inițiale $G_{0,j}$ se determină cu formula

$$G_{0,j} = 0{,}1208\left[1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\right]_j, \quad \left(f_j = \frac{\psi_j}{0{,}2467}\right) \tag{24}$$

unde se folosește soluția dată de Howarth pentru mișcarea plană din vecinătatea punctului critic. Valorile $G_{0,j}$ sînt date în tabelul 1.

— Schema cu diferențe finite (1)—(3) se programează în limbaj FORTRAN IV la mașina electronică de calcul FELIX—C 256 pentru

$$0{,}1745 \leqslant X \leqslant 1{,}0490$$

În tabelul 2 sînt date valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ calculate cu mașina pentru $j \leqslant J = 15$. Pentru $j < J = 15$ se aplică formulele (18).

— În vecinătatea suprafeței corpului se rezolvă ecuații de forma

$$f_e \equiv z^3 - z_0^2 z - 0{,}7028A = 0 \qquad (A = 2 \sin 2X) \tag{25}$$

care se deduc imediat din (15). Soluțiile ecuațiilor (25) sînt calculate printr-un procedeu de relaxare și sînt date în tabelul 3 (unde este indicat și reziduul $\tilde{R}$). În tabelul 3 este dată și funcția necunoscută $\psi_\infty(X)$ care apare ca soluție a ecuației $g(X, \psi) = 0$. Avînd valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ se poate calcula cu formulele corespunzătoare și viteza u a fluidului în cele trei subdomenii D^s, D^i și D^∞ (pentru $\psi \leqslant 2\Delta\psi$, $\psi < 2\Delta\psi$, $\psi \to \psi_\infty$).

— Coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii locale de frecare pe suprafața corpului se va calcula, acum, folosind formula (17). Valorile coeficientului $c_{\tau w}$ sînt date în tabelul 3. Valorile obținute pentru $c_{\tau w}$ coincid cu cele date de alte metode [2]. Funcțiile G, a_1^2 și ψ_∞ sînt reprezentate grafic în fig. 2 și 3, după tabelele 2 și 3.

Tabel 1

Nr. nod	ψ_j	f_j	$(df/d\eta)_j$	$g_{0,j} = G_{0,j}$
0	0	0	0	0,1208
1	0,1	0,4053	0,7350	0,0555
2	0,2	0,8106	0,8997	0,0230
3	0,3	1,2160	0,9613	0,0091
4	0,4	1,6212	0,9861	0,0033
5	0,5	2,0265	09955	0,0009
6	0,6	2,4318	0,9988	0,0002
7	0,7	2,8371	0,9996	0,0000
8	0,8	3,2424	0,9999	,,

Tabel 2

Valorile funcției $g_{i,j}$

ψ \ X	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	0,9599	1,0490
0,0	0,1208	0,4688	1,0602	1,7221	1,9984	2,2223	2,6839	3,0062
0,1	0,0555	0,3132	0,8134	1,4089	1,6648	1,8750	2,3180	2,6333
0,2	0,0230	0,2103	0,6292	1,1607	1,3958	1,5913	2,0112	2,3155
0,3	0,0091	0,1396	0,4861	0,9570	1,1713	1,3519	1,7465	2,0374
0,4	0,0033	0,0910	0,3737	0,7876	0,9817	1,1474	1,5156	1,7916
0,5	0,0009	0,0581	0,2854	0,6462	0,8209	0,9719	1,3134	1,5736
0,6	0,0002	0,0362	0,2162	0,5281	0,6842	0,8211	1,1359	1,3798
0,7	0,0000	0,0219	0,1622	0,4296	0,5682	0,6915	0,9801	1,2075
0,8	,,	0,0129	0,1205	0,3477	0,4700	0,5803	0,8435	1,0543
0,9	,,	0,0074	0,0886	0,2798	0,3870	0,4852	0,7238	0,9184
1,0		0,0041	0,0644	0,2239	0,3171	0,4040	0,6193	0,7980
1,1		0,0022	0,0462	0,1781	0,2586	0,3349	0,5281	0,6915
1,2		0,0011	0,0328	0,1407	0,2098	0,2765	0,4489	0,5975
1,3		0,0006	0,0230	0,1104	0,1692	0,2271	0,3802	0,5148
1,4		0,0003	0,0158	0,0860	0,1357	0,1857	0,3208	0,4422
1,5		0,0001	0,0108	0,0666	0,1082	0,1510	0,2697	0,3787
1,6		0,0000	0,0062	0,0485	0,0822	0,1180	0,2206	0,3232
1,7		,,	0,0017	0,0307	0,0566	0,0854	0,1720	0,2750
1,8		,,	0,0008	0,0130	0,0311	0,0529	0,1235	0,2286
1,9			0,0008	0,0065	0,0056	0,0204	0,0750	0,1827
2,0			0,0004	0,0028	0,0028	0,0102	0,0266	0,1369
2,1			0,0002	0,0014	0,0014	0,0056	0,0133	0,0912
2,2			0,0000	0,0005	0,00035	0,0024	0,0088	0,0456
2,3			,,	0,0001	0,00015	0,0012	0,0064	0,0228
2,4			,,	0,0000	0,00007	0,0005	0,0046	0,0057
2,5				,,,	0,0000	0,0002	0,0029	0,0029
2,6					,,	0,0000	0,0014	0,0015
2,7							0,0007	0,0003

Tabel 3

X	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	0,9599	1,0490
$z =$								
a_1	1,1170	1,5500	1,8572	2,0350	2,0818	2,1101	2,1384	2,1386
$\widetilde{R} =$								
$f_e(z)$	0,0002	−0,0003	−0,0004	0,0003	−0,0007	−0,0009	−0,0002	0,0005
a_1^2	1,2477	2,4025	3,4492	4,1412	4,3339	4,4525	4,5728	4,5736
ψ_∞	0,7	1,6	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8

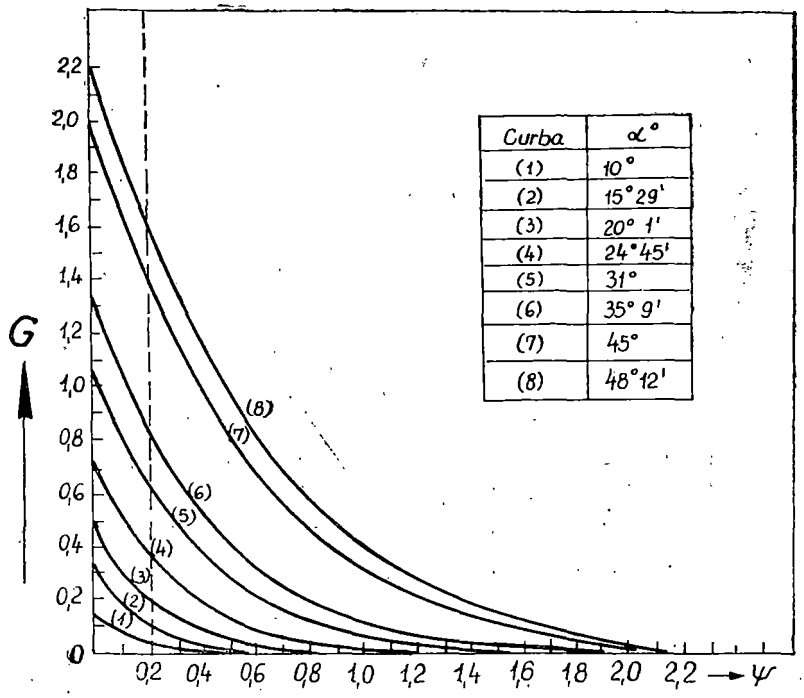


Fig. 2

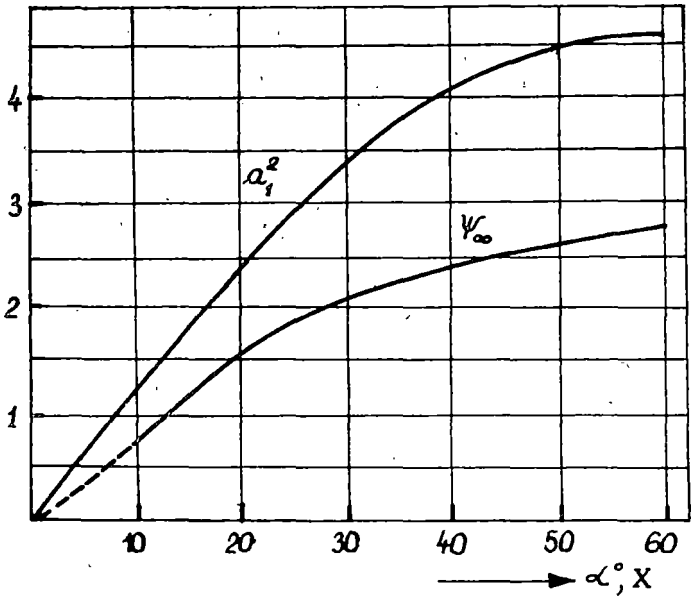


Fig. 3

(Intrat în redacție la 15 noiembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Mitchell, A. R. and Thomson, J. Y., *Finite Difference Meth. of the von Mises Equation ...*, ZAMP, v. 9, 1958, sau Mehanika, v. 4, 1959 p. 45—53.
2. Schlichting, H., *Teoria pogranicinogo sloia*, IIL, Moskva, 1956, p. 142—148.
3. Faiza, Nabi, *Operation Instr. and Descrip. Computer Program for Finite Diff. Eq., ...*, Office of Aerospace Research, United States Air Force (ARL). 67—0093, May, 1967.
4. Brădeanu Doina, *Convergența soluției ecuației cu diferențe finite a stratului limită în forma lui Mises*. Studia Univ. Babeș-Bolyai, Ser. Math.—Mech., f. 1, 1974, p. 81.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ФОРМЕ МИСЕСА ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ПРИМЕНЕНИЕ К ЦИРКУЛЯРНОМУ ЦИЛИНДРУ

(Резюме)

В работе изучается движение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое при помощи численного интегрирования уравнения Мисеса. Автор считает, что область движения, в плоскости Мисеса (x, ψ), делится на три области, в которых применяется метод конечных разностей, интегрирование посредством рядов и экстраполяция. Результаты этой теории применяются затем к вычислению скорости, напряжения и толщины пограничного слоя для обтекания циркулярного цилиндра. Вычисления, приведенные в таблицах, были программированы в языке FORTRAN IV на электронной вычислительной машине FELIX—C 256.

NUMERICAL SOLVING OF THE BOUNDARY LAYER PROBLEM OF MISES FORM BY THE FINITE-DIFFERENCES METHOD. APPLICATION TO THE CIRCULAR CYLINDER

(Summary)

In the paper the movement of the viscous incompressible liquid in the boundary layer by means of numerical integration of Mises equation is studied. We consider that the motion field in Mises's plan (x, ψ) is divided into three subdomains in which the finite differences method, the series integration, and extrapolation are applied. The results of this theory are then applied to calculate the speed, skinfriction, and thickness of the boundary layer reckoning the motion of the fluid round the circular cylinder. The results, presented in tables, have been programmed in FORTRAN IV language by the electronic machine FELIX—C 256.