ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Matematică

MODELE FOTOGRAVITAŢIONALE ÎN MECANICA CEREASCĂ

MIRA-CRISTIANA ANISIU*

Navele spaţiale care au zburat (şi zboară) în spaţiul cosmic au ca sistem de propulsie o masă de reacţie accelerată prin diferite procedee într-un jet de mare viteză. Deplasarea lor se face conform legii atracţiei a lui Newton. În ultima perioadă s-au făcut cercetări intense pentru proiectarea şi construirea unor nave de un tip complet nou, care se deplasează datorită acţiunii presiunii luminii. Pentru ca acceleraţia dobândită în urma acţiunii presiunii luminii să fie semnificativă, noile vehicule trebuie să aibă o masă mică şi o suprafaţă vastă, cât mai refractantă. Începând din anii '60, la NASA s-au elaborat proiecte de astfel de vele, destinate, printre altele, unor misiuni de întâlnire cu cometa Halley. Au fost proiectate în detaliu două tipuri de vele: una pătrată de 800x800 m (aripă solară), şi o alta care folosea 12 lame lungi de 7,5 km în loc de o unică suprafaţă (Heliogyro). În cele din urmă, s-a renunţat la construirea efectivă a acestor aparate. Cercetările, însă, continuă, existând trei asociaţii care urmăresc obţinerea sprijinului în această direcţie:

- World Space Foundation (California), formată pe nucleul de cercetători de la NASA Jet Propulsation Laboratory, care s-au ocupat de proiectul pânzei solare;
- Union Pour la Promotion de la Propulsation Photonique (Toulousse);
- Solar Sail Union of Japan.

Presiunea luminii a fost folosită efectiv pentru controlul orientării şi stabilizarea navei Mariner 10 lansată în 1973, pe când se pregătea pentru întâlnirea cu planeta Mercur. De asemenea, încă din 1964, navele spaţiale Mariner 3 şi Mariner 4 au fost dotate cu câte patru plăci solare dispuse în formă de X cu vele la capete, pentru a servi aceluiaşi scop.

Principiul care stă la baza deplasării solare nu este nou. Influenţa pe care presiunea luminii solare o are asupra particulelor mici (din cozile cometelor, de exemplu) a fost considerată de Johannes Kepler în 1619 în lucrarea *Harmonices mundi*. În acea perioadă se cunoştea teoria corpusculară a luminii, şi existenţa presiunii solare era prezentată ca o consecinţă a acesteia. Isaac Newton, combătând teoria corpusculară a luminii, a încercat să explice devierea cozilor cometelor prin presupunerea existenţei eterului în spaţiul cosmic şi pe baza legii atracţiei universale (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687). Mai târziu, în *Theoria motuum planetarum et cometarum* (1744), Leonhard Euler a reconsiderat existenţa presiunii luminii pe baza teoriei a lui Chirstian Huygens, pentru ca Heinrich Olbers,

* Universitatea "Babeş Bolyai" Cluj-Napoca

în 1812, să impună ideea devierii cozilor cometelor ca urmare a teoriei electrostatice a lui Charles Augustin de Coulomb.

Independent de fenomenele astronomice, fizicienii au încercat să pună în evidenţă şi să explice existenţa presiunii luminii. Astfel, în 1873, în *Electricity and Magnetism*, James Clerk Maxwell a arătat că presiunea luminii e o consecinţă a teoriei sale asupra radiaţiei electromagnetice; în aceeaşi perioadă, Bartoli a demonstrat existenţa presiunii radiative ca o consecinţă a legii a doua a termodinamicii. Verificarea teoriei lui Maxwell a fost făcută în 1899–1907 de către Piotr Nikolaevici Lebedev, care a reuşit să izoleze forţa de presiune radiativă prin experienţe cu ajutorul unei balanţe de torsiune.

Ideea călătoriei în spaţiu folosind presiunea luminii apare la Konstantin Eduardovici Ţiolkovski (1921) şi Friedrich Arturovici Ţander (1924), fiind apoi abandonată până în anii '50, când progresul tehnologic permitea deja construirea unor imense suprafeţe reflectante, foarte subţiri. Herman Oberth, savant german de origine română, scrie încă din 1923 despre o oglindă cosmică putând fi propulsată de presiunea luminii (*Racheta spre spaţiile interplanetare*), pentru a preciza ideile în 1954 (*Oameni în spaţiul cosmic*). Un istoric al acestor căutări a fost făcut de Yelena Nikolaevna Polyakhova (1986) şi Colin McInnes (1991).

Este demn de menţionat faptul că profesorul român Constantin Popovici a considerat, încă din anul 1923, o modificare a legii Newton–Coulomb, apreciind că aceasta este aplicabilă pentru o forţă "radială de atracţie sau de respingere (fie ea gravitaţională, electrică sau presiunea luminii)". Mai târziu, în 1940, el consideră în mod explicit problema unui corp care se deplasează în câmpul de forţe de atracţie gravitaţională şi de respingere luminoasă a unei stele. Aceste idei de pionierat ale lui C.Popovici sunt analizate de către Árpad Pál (1992).

Legea considerată de C.Popovici se obţine privind acţiunea luminii ca având loc după o lege de invers proporţionalitate cu pătratul distanţei obiectului asupra căruia se exercită faţă de corpul luminos. Astfel, conform legii lui Newton, forţa de atracţie va fi:

$$F_1 = -Ar^{-2}, \tag{1}$$

A fiind atracţia corpului luminos (Soarele) la unitatea de distanţă, şi care este proporţională cu masa corpului atras (planetă, particulă, velă). Forţa datorată luminii corpului central va fi:

$$F_2 = Rr^{-2}, \tag{2}$$

cu R repulsia la unitatea de distanţă.

Aşadar, considerând atracţia exercitată de un corp supra unui alt corp, forţa corespunzătoare va avea forma

$$F = kr^{-2}, \tag{3}$$

cu $k = A - R$. Această forţă va rămâne atractivă pentru corpuri asupra cărora efectul luminos acţionează slab (de exemplu, planetele), dar se va micşora devenind chiar forţa de respingere pentru o velă solară de tipul amintit, sau pentru particulele din cozile cometelor.

Forţe de tipul (3) sunt considerate în zeci de lucrări recente, în legătură cu problema celor două corpuri, sau cu problema restrânsă a celor trei corpuri.

Modificarea adusă de C.Popovici legii (3) constă în adfăugarea unui termen de forma $-R\dot{r}(cr^2)^{-1}$, reprezentând forţa datorată vitezei finite a luminii. Aici, c notează viteza luminii, R repulsia la unitatea de distanţă, iar $\dot{r}$ componenta vitezei corpului atras pe raza vectoare. Forţa considerată de C.Popovici (1940) este

$$\varphi = -Ar^{-2} + Rr^{-2} - R\dot{r}(cr^2)^{-1}, \tag{4}$$

sau, într–o, formă mai condensată,

$$\varphi = -(k + l\dot{r})r^{-2}, \tag{5}$$

unde $k = A - R$ şi $l = Rc^{-1}$.

Forma cu care a lucrat C.Popovici este

$$\varphi = -k(1 + \epsilon\dot{r})r^{-2}, \tag{5'}$$

cu $k = A - R$ şi $\epsilon = Rc^{-1}(A - R)^{-1}$, dar aceasta nu mai este echivalentă cu (4) în cazul $k = 0$. Pentru $k \neq 0$, (5') se obţine punând $\epsilon = lk^{-1}$.

Mişcarea unui corp atras de o sursă luminoasă conform legii modificate a lui Newton (5) va fi guvernată de sistemul

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(k + l\dot{r})r^{-3}x \\ \ddot{y} = -(k + l\dot{r})r^{-3}y, \end{cases} \tag{6}$$

cu $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Deşi sistemul este mai complicat decât în cazul legii lui Newton, C.Popovici a arătat că traiectoria este dată de

$$r^{-1} = p^{-1} + \eta_0 p^{-1} e^{-\alpha\theta} \sin((1 - \alpha^2)^{1/2}\theta - \omega), \tag{7}$$

unde $p = C^2k^{-1}$, $\alpha = \varepsilon C(2p)^{-1} = \varepsilon k(2C)^{-1}$, C fiind constanta ariilor.

Mai precis, rezultatul se poate formula în următoarea teoremă.

TEOREMA 1. *Sistemul* (6) *are soluţia plană dată de*

$$r^{-1} = q + u_0,$$

unde $q = kC^{-2}$, $\alpha = l(2C)^{-1}$ *şi*

$$u_0 = \begin{cases} e^{-\alpha\theta}(C_1 e^{(\alpha^2-1)^{1/2}\theta} + C_2 e^{-(\alpha^2-1)^{1/2}\theta}), \text{ dacă } |\alpha| > 1 \\ (C_1 + C_2\theta)e^{\alpha\theta}, \text{ dacă } |\alpha| = 1 \\ e^{-\alpha\theta}(C_1 \sin(1 - \alpha^2)^{1/2}\theta + C_2 \cos(1 - \alpha^2)^{1/2}\theta). \text{ dacă } |\alpha| < 1. \end{cases}$$

$\dot{\theta} = Cr^{-2}$,

în cazul când $C \neq 0$; *pentru* $C = 0$, *corpul atras se mişcă pe o dreaptă ce trece prin punctul atractor, distanţa dintre cele două corpuri fiind dată de ecuaţia*

(8) $$\ddot{r} = -(k + l\dot{r})r^{-2}.$$

Demonstraţie. Trecând în coordonatele polare r şi θ, sistemul (6) devine

(9) $$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -(k + l\dot{r})r^{-2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

A doua ecuaţie dă $\dot{\theta} = Cr^{-2}$, C fiind constanta ariilor. Obţinem

(10) $$\ddot{r} = -(k + l\dot{r})r^{-2} + C^2R^{-3}.$$

În cazul când $C \neq 0$, considerând r ca funcţie de θ, avem

$$\dot{r} = Cr'r^{-2}, \ddot{r} = C^2(r"r - 2r'^2)r^{-5},$$

unde $\dot{r}$ notează derivata în raport cu timpul, iar r' în raport cu θ.

Ecuaţia (10) devine

$$C^2r"r - 2C^2r'^2 - C^2r^2 = -(kr^3 + lCrr').$$

Făcând shimbarea de variabilă $r = u^{-1}$, obţinem ecuaţia liniară cu coeficienţii constanţi

(11) $$u" + 2\alpha u' + u = q,$$

cu $q = kC^{-2}$, $\alpha = l(2C)^{-1}$.

Scriind soluţia generală a ecuaţiei (11), rezultă pentru r^{-1} expresia dată în enunţul teoremei, urmând ca θ să se determine din ecuaţia $\dot{\theta} = Cr^{-2}$.

Fie acum $C = 0$, deci $\theta = const.$ Mişcarea va avea loc pe o drepată a cărei origine va fi situată în corpul atractor. Poziţia corpului atras va fi determinată pe această dreaptă de ecuaţia (8), obţinută din (9) ţinând cont de faptul că $\dot{\theta} = 0$. •

În cazul considerat de C.Popovici, $k \neq 0$, $\varepsilon = lk^{-1}$ şi $|\alpha| < 1$. Atunci, conform Teoremei 1, vom avea

$$r^{-1} = q + e^{-\alpha\theta}(C_1 \sin(1 - \alpha^2)^{1/2}\theta + C_2 \cos(1 - \alpha^2)^{1/2}\theta)$$

şi regăsim expresia dată de C.Popovici ţinând cont de faptul că $q = p^{-1}$ şi $C_1 = \eta_0 p^{-1} \cos\omega$, $C_2 = -\eta_0 p^{-1} \sin\omega$.

Studiem acum existenţa punctelor de echilibru pentru ecuaţiile (8) şi (10).

În cazul mişcării pe o dreaptă, corespunzând ecuaţiei (8), există puncte de echilibru dacă şi numai dacă avem $k = 0$; în această situaţie, orice valoare $r_0 > 0$ este un punct de echilibru.

Fie acum cazul $C \neq 0$, când traiectoria corpului atras este o curbă plană. Ecuaţiile sistemului (9) se decuplează şi vom considera problema punctelor de echilibru pentru ecuaţia (10). Obţinem

$$-kr_0^{-2} + C^2r_0^{-3} = 0,$$

de unde $r_0 = C^2k^{-1} = q^{-1}$ în cauzl când $k > 0$. Pentru $k \leq 0$, nu există puncte de echilibru. Aceste consideraţii pot fi cuprinse în

TEOREMA 2. *În cazul mişcării pe o dreaptă ($C = 0$), ecuaţia (8) admite o infinitate de puncte de echilibru pentru $k = 0$, şi nici un astfel de punct pentru $k \neq 0$; în cazul mişcării plane ($C \neq 0$) există un unic punct de echilibru al ecuaţiei (10), $r_0 = C^2k^{-1} = q^{-1}$ pentru $k > 0$ şi nici unul în caz contrar.*•

Aşadar, în cazul când repulsia luminii depăşeşte atracţia gravitaţională, nu există puncte de echilibru; în cazul egalităţii celor două forţe, există o infinitate de puncte de echilibru în cazul mişcării pe o dreaptă ce trece prin corpul atractor; când repulsia luminii e mai mică decât atracţia gravitaţională, avem un punct de echilibru unic al ecuaţiei (10).

BIBLIOGRAFIE

1. C.R.McInnes — Solar sailing: a new tool for solar system research, Vistas Astron. 34 (1991), 369–408.
2. Á.Pál — Early Romanian contribution to celestial mechanics, Rom. Astron. J.2(2) (1992), 205–207.
3. Y.N.Polyakhova — Space Flight Using a Solar Sail: the Problems and the Prospects, edited by V.A.Yegorov, Ser: Space Flight Mechanics 19, Nauka, Moscow 1986.
4. C.Popovici — Sur une modification de la loi de Newton– Coulomb, Bull. Astron., Mémoires et variétés 3 (1923), 257– 261.
5. C.Popovici — Sur l'énergie de l'attraction éclairé, C.R. Acad. Sci. 209 (1939), 2052–2054.
6. C.Popovici — Sur l'âge du système solaire, C.R. Acad. Sci. 210 (1940), 39–42.

Institutul de Calcul C.P. 68 3400 Cluj–Napoca